МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin($

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

(2) $x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+13$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

Пусть $3y=a$, тогда

$(x-2)^2+\cancel{9}(a-3)^2=25$

На коорд. пл. xOa это окр. с центром $(2;3)$ и радиусом 5

(1) $\cancel{x-\frac{2}{3}a=\sqrt{\frac{2}{3}...}}$

~~ОДЗ~~

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}\iff$

$\iff\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \end{cases}$

Меняем обозначения. $(x-2)=a$; $3(y-1)=b$

ОДЗ: $ab\geq 0$

$a-\frac{2}{3}b\geq 0$

$(a+2-\frac{2}{3}b-2)^2=\frac{ab}{3}$ $\quad x=a+2 \quad y=\frac{b}{3}+1$

$(a-\frac{2}{3}b)^2=\frac{ab}{3}$

$\cancel{a^2-\frac{4}{3}ab+\frac{4}{9}b^2-\frac{1}{3}ab=0}$

$(3a-2b)^2=3ab$

~~Пусть~~ $\cancel{b\neq 0,\ t=\frac{a}{b}.\ (3t-2)^2=3t}$

$9a^2-12ab+4b^2-3ab=0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

$9a^2 - 15ab + 4b^2 = 0$

Пусть $b \neq 0$, $t = \frac{a}{b}$

$9t^2 - 15t + 4 = 0$

$D = 225 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 225 - 144 = 81$

$t_1 = \frac{15+9}{18} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3}$

$t_2 = \frac{15-9}{18} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

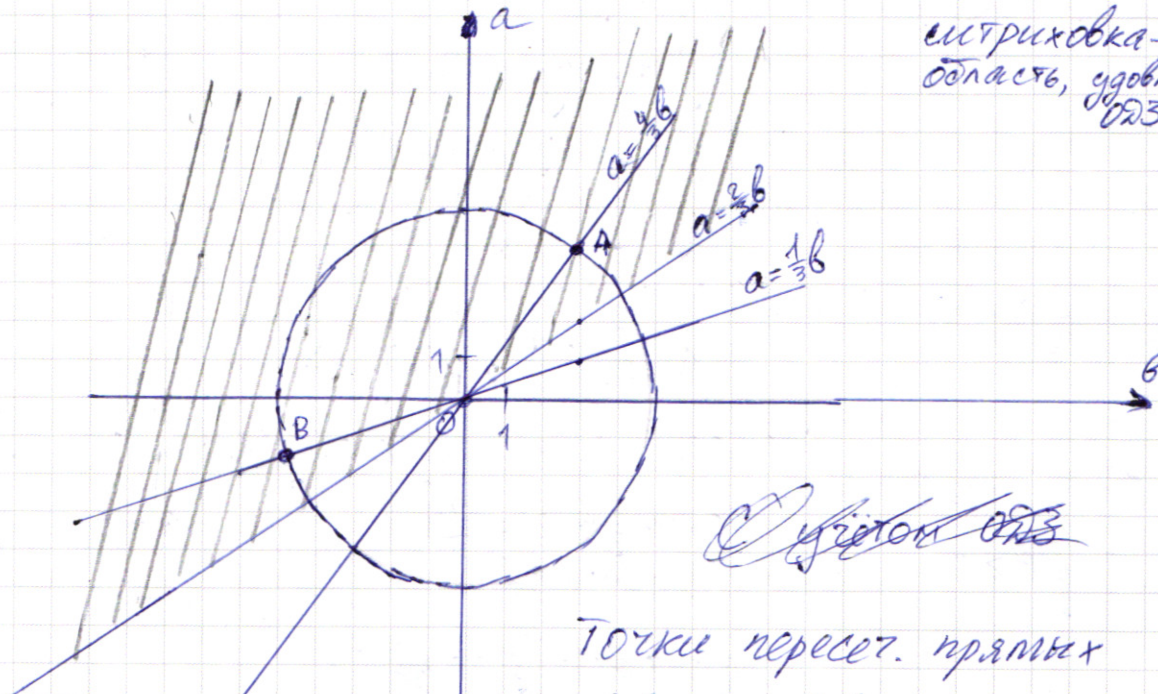
Если $b = 0$, то $9a^2 = 0$, т.е. $a = 0$

итак, ~~2~~ 1:
$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = b = 0 \\ a = \frac{4}{3}b \\ a = \frac{1}{3}b \end{array}\right. \\ ~~ab~~\ a - \frac{2}{3}b \geq 0,\ a \geq \frac{2}{3}b \end{cases}$$

2 $(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$a^2 + b^2 = 25$

На ~~a~~ aOb коорд. плоск. окр. с центром $(0;0)$ и $R = 5$



штриховка - область, удовл. ОДЗ

~~С учётом ОДЗ~~

Точки пересеч. прямых $a = \frac{4}{3}b$ и $a = \frac{2}{3}b$ с окр., удовлетворяющие ОДЗ:

~~A(4;3)~~ A и B

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Посчитаем их координаты:

A: $a=\frac{4}{3}b$

$\left(\frac{4}{3}b\right)^2+b^2=25$

$\left(\frac{16}{9}+\frac{9}{9}\right)b^2=25$

$\frac{25}{9}b^2=25$

$b^2=9$

т.к. $b>0$ у точки A (см. рис.)

$b=3$; $a=\frac{4}{3}b=4$

B: $a=\frac{2}{3}b$

$\left(\frac{2}{3}b\right)^2+b^2=25$

$\left(\frac{4}{9}+\frac{9}{9}\right)b^2=25$

$\cancel{13}\, b^2=\frac{25\cdot 9}{13}$

т.к. у точки B $b<0$,

$b=-\frac{5\cdot 3}{\sqrt{13}}=-\frac{15\sqrt{13}}{13}$

$a=\frac{2}{3}b=-\frac{10\sqrt{13}}{13}$

Очевидно, что точка $(0;0)$ не принадл. окр.

Итак, вернёмся к исх. пер.:

A: $x=a+2=4+2=6$

$y=\frac{b}{3}+1=\frac{3}{3}+1=2$

B: $x=a+2=2-\frac{10\sqrt{13}}{13}$

$y=\frac{b}{3}+1=1-\frac{5\sqrt{13}}{13}$

~~Ответ~~ Ответ: $(6;2)$

$\left(2-\frac{10\sqrt{13}}{13};\ 1-\frac{5\sqrt{13}}{13}\right)$

Сделаем проверку (устно), всё сходится.

№ 7

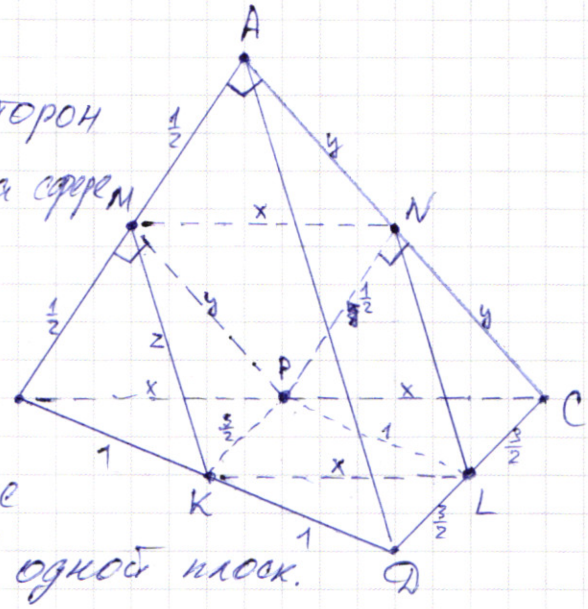
Дано: $ABCD$ — ~~тр~~ пирам.

K, L, M, N, P — сер. соотв. сторон

A, K, L, M, N, P лежат на сфере

$AB = 1$; $BD = 2$; $CD = 3$

найти BC и R_{min}



Решение:

1) Заметим, что четыре точки лежащие в одной плоск. и на одной сфере, лежат на одной окр. (т.к. сечением сферы является окр.)

2) $MN \parallel KL \parallel BC$ (как сред. линии соотв. Δ)

т.к. 2 паралл. прямые $MN \parallel KL$ лежат в одной плоск., $KMNL$ лежат на одной окр. (см. п.(1))

$MN \parallel KL$

$MK \parallel NL \parallel AD$ (как ср. л. соотв. Δ) $\Big\} \Rightarrow$ $KLNM$ — паралл. (по признаку паралл-а)

У паралл-а противоп. углы равны, а у впис. четыр. их сумма равна $180°$.

Значит, $\begin{cases} \alpha = \beta \\ \alpha + \beta = 180° \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = \beta = 90°$, где α и β — противоп. углы впис. паралл-а

Значит, все углы в $KLNM$ прямые, т.е. он прямоугольник

3) Аналогично п. 2, $M, N, P, A \in (ABC)$

~~MN~~ $MP \parallel AC$ и $PN \parallel AB$ (как сред. линии)

По ~~св.~~ призн. паралл-а $AMNP$ — паралл., причём впис. (см. п.1), значит он прямоугольник, т.е. $\angle BAC = 90°$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$, поэтому на ОДЗ модуль раскрывается всегда со знаком +.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

Пусть $x^2+18x=t$, $t>0$ (ОДЗ).

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$(5^{\log_5 t})^{\frac{1}{\log_5 12}}+t \geq t^{\log_{12}13} \quad ; \quad \frac{1}{\log_5 12}=\log_{12}5$$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

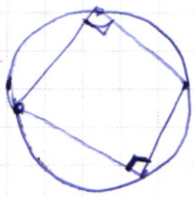
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

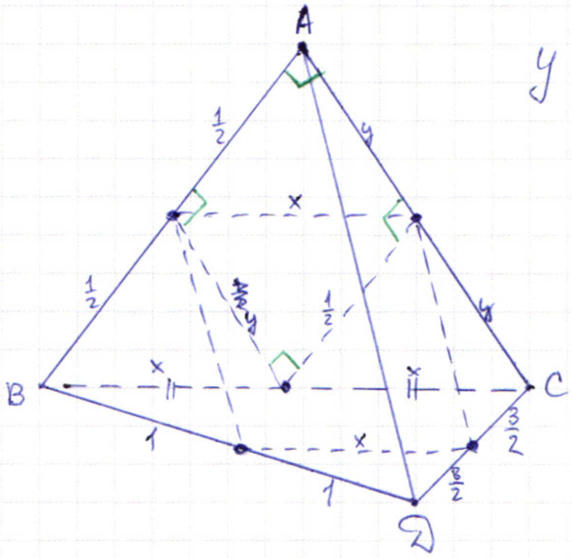
$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\varphi+2\beta) =$

$= \sin\varphi\cos2\beta +$

$+ \cos\varphi\sin2\beta$





$y = \sqrt{x^2 - \frac{1}{4}}$

$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$\cancel{-2x^2}$ $-4x^2 - 15x - 10 = 0$

$\cancel{D\ 225}$

$4x^2 + 15x + 10 = 0$

$D = 225 - 160 = 65$

$x_1 =$

$5^{-\log_{12}(x^2+18x)} + x^2$

$\boxed{5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}}$

$5^{\log_{12} t} \geq t \cdot (t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$

$\log_{12} t \geq \log_5 t + \log_5 (t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$

$\log_{12} t \geq \frac{\log_{12} t}{\log_{12} 5} + \frac{\log_{12}(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)}{\log_{12} 5}$

$8x^2 + 30x + 17 = 0$

$D_1 = 225 - 8 \cdot 17 = 225 - 136 =$

$= 89$

$5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}} = \cancel{\ldots}\ \cancel{\ldots}\ \cancel{t}\ t^{\frac{1}{\log_5 12}}$

$t^{\frac{1}{\log_5 12} - 1} + 1 \geq t^{\log_{12} 13 - 1}$

$t^{\alpha} + 1 \geq t^{\beta}$

$t^{\log_{12} 5 - 1} + 1 \geq t^{\log_{12} 13 - 1}$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geq t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$\cancel{88}$
-25
64

17×17
119
$+17$
289

225
-136
89

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$1 + t^{1-\log_{12}5} \geq t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$$

$$t^{\log_{12}\frac{12}{5}} + 1 \geq t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$$

$$t^{\alpha} - t^{\beta} \leq 1$$

$$\cancel{t^{\beta}(t^{\alpha-\beta} - 1) \leq 1}$$

$$\cancel{t^{\alpha-\beta} - 1 \leq \frac{1}{t^{\beta}}}$$

$$\cancel{t^{x}}(t^{\alpha-x} - t^{\beta-x}) \leq \frac{1}{t^{x}}$$

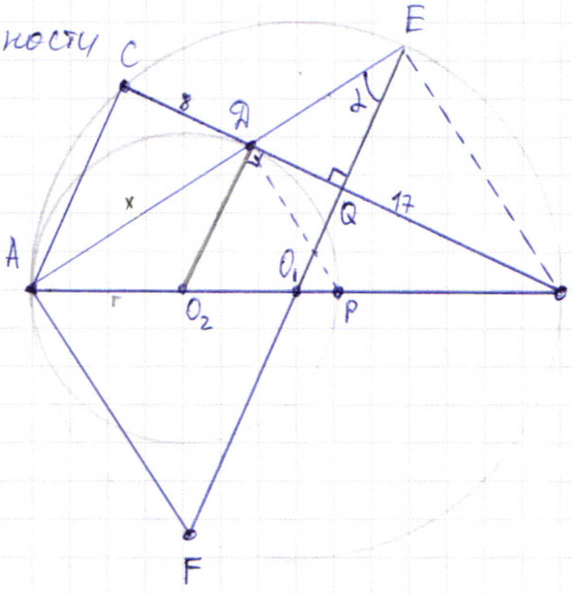
$$t^{\log_{12}\frac{12}{5}}\left(t^{\log_{12}\frac{\frac{13}{5}}{\frac{12}{5}}} - 1\right) \leq 1$$

$$\cancel{t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1 \leq t}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: Ω, ω - окружности

$\Omega \cap \omega = A$ - касаются внутр. обр.

AB - диаметр Ω

BC - хорда Ω

BC - касат. к ω

$BC \cap \omega = D$

$AD \cap \Omega = A, E$

$EF \perp BC$, $F \in \Omega$

$CD = 8 \quad BD = 17$

Найти $r, R, \angle AFE, S_{AEF}$

Решение:

1) Пров. EO_1. Пусть $AB \cap \omega = A, P$. Пров. DP и EB

Как впис. углы, опирающ. на диаметры соотв. окружностей:

$\angle ADP = 90°$ и $\angle AEB = 90°$ и $\angle ACB = 90°$

2) $\left.\begin{array}{l}\angle ADP = \angle AEB = 90° \\ \angle EAB \text{ - общий}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADP \sim \triangle AEB$ (по 2-м углам)

$\frac{AD}{AE} = \frac{AP}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R}$, т. к. $AP = 2r$ и $AB = 2R$ - диаметры

$\frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r}{R}$ (по построению) $\quad AO_2 = r \quad AO_1 = R$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $\left.\begin{array}{l} \frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} \\ \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r}{R} \\ \angle EAO_1 \text{ - общий} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ADO_2 \sim \triangle AEO_1$ (по углу и соотн. прилеж. сторон)

$\angle ADO_2 = \angle AEO_1$ (из подобия), $O_2D \parallel O_1E$ (по рав-ву соотв. углов при сек. AE)

$\left.\begin{array}{l} O_2D \perp BC \text{ (как радиус, пров. в точку касания)} \\ O_2D \parallel O_1E \end{array}\right\} \Rightarrow O_1E \perp BC$

$\left.\begin{array}{l} EO_1 \perp BC \text{ (по док.)} \\ EF \perp BC \text{ (по усл.)} \end{array}\right\} \Rightarrow O_1 \in EF$, EF прох. через центр Ω

Т.к. $F \in \Omega$ и $E \in \Omega$, EF - диаметр Ω

4) По свойству степени т. B отн. окр. ω:

$BD^2 = BP \cdot BA$

$17^2 = (2R - 2r) \cdot 2R$ (1)

5) $\left.\begin{array}{l} \angle ACB = 90° \\ \angle O_2DB = 90° \\ \angle CBA \text{ - общий} \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по 2-м углам)

$\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC}$; $BO_2 = 2R - r$; $BA = 2R$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{17+8}$; $1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{25}$; $\frac{r}{2R} = \frac{8}{25}$ $\frac{r}{R} = \frac{16}{25}$; $r = \frac{16}{25}R$

6) (1): $17^2 = \left(2R - 2\cdot\frac{16}{25}R\right)\cdot 2R$

$\frac{17^2}{4} = R^2\left(1 - \frac{16}{25}\right)$; $\frac{17^2}{4} = \frac{9}{25}R^2$

$R^2 = \frac{25\cdot 17^2}{4\cdot 9} = \left(\frac{5\cdot 17}{2\cdot 3}\right)^2$; $\boxed{R = \frac{5\cdot 17}{2\cdot 3} = \frac{85}{6}}$; ~~$r = \frac{16}{25}R = \frac{16\cdot 85}{6\cdot 25}$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\boxed{r = \frac{16}{25}R = \frac{16\cdot 85}{25\cdot 6} = \frac{8\cdot 17}{5\cdot 3} = \frac{136}{15}}$$

7) $EO_1 \perp BC$ (по док.), $AC \perp BC$ (по док.) $\Rightarrow AC \parallel EO_1$

$AC \parallel EO_1$, O_1 – сер. AB $\Rightarrow$ Q – сер. BC, O_1Q – сред. л. $\triangle ACB$ (по призн. сред. л. $\triangle$)

$EF \cap BC = Q$ (обозначаем)

$CQ = \frac{1}{2}BC = \frac{8+17}{2} = 12,5$; $DQ = CQ - CD = 12,5 - 8 = 4,5$

8) По теор. Пиф. в $\triangle ACB$ – п/у:

$$AC = \sqrt{4R^2 - CB^2} = \sqrt{4\cdot\frac{85^2}{36} - 25^2} = \sqrt{\frac{85^2}{9} - 25^2} = 5\cdot\sqrt{\frac{17^2}{9} - 5^2} =$$
$$= 5\sqrt{\frac{17^2 - 25\cdot 9}{9}} = 5\sqrt{\frac{289-225}{9}} = 5\sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{5\cdot 8}{3} = \frac{40}{3}$$

9) $\angle CDA = \angle EDQ$ (как вертик.), $\angle ACD = \angle EQD = 90^\circ$ $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle EQD$

$$\frac{EQ}{AC} = \frac{DQ}{CD} = \frac{4,5}{8}$$

$$EQ = \frac{4,5}{8}\cdot AC = \frac{9}{16}\cdot\frac{40}{3} = \frac{3\cdot 5}{2} = \frac{15}{2}$$

$$tg\,AEF = \frac{DQ}{EQ} = \frac{\frac{9}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5} = tg\,\alpha$$

как впис. угол, опир. на диаметр EF:

$\angle EAF = 90^\circ$; $tg\,AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{1}{\frac{AF}{AE}} = \frac{1}{tg\,\alpha} = \frac{5}{3}$ (в $\triangle FAE$-п/у)

$$\boxed{\angle AFE = arctg\left(\frac{5}{3}\right)}$$

10) Пусть $AF = x$, тогда $AE = x\,ctg\,\alpha$

По теор. Пиф. в $\triangle FAE$:

$$x^2 + x^2 ctg^2\alpha = FE^2 = 4R^2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x^2\left(1+\frac{25}{9}\right)=4\cdot\frac{85^2}{6^2}$$

$$x^2=\left(\frac{2\cdot 85}{6}\right)^2\cdot\frac{9}{34}=\frac{85^2}{3^2}\cdot\frac{9}{34}=\frac{85^2}{34}=\frac{17^2\cdot 5^2}{17\cdot 2}=\frac{17\cdot 25}{2}$$

$$\begin{array}{r} \times\,125 \\ 17 \\ \hline +\,875 \\ 125 \\ \hline 2125 \end{array}$$

$$x=\frac{85}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}}=\frac{85}{\sqrt{34}}=5\sqrt{\frac{17}{2}}$$

$$S_{FAE}=\frac{1}{2}AE\cdot AF=\frac{1}{2}\cdot x\cdot x\,ctg\,\alpha=\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{5}{3}=\frac{17\cdot 25\cdot 5}{2\cdot 2\cdot 3}=\frac{2125}{12}$$

Ответ: $R=\frac{85}{6}$; $r=\frac{136}{15}$; $\angle AFE=arctg\left(\frac{5}{3}\right)$; $S_{AEF}=\frac{2125}{12}$

№ 5

Если число составное, то его можно представить как сумму:

число $k = m \cdot n \cdot \ldots$

$f(k) = f(m) + f(n) + \ldots$, где $m, n, \ldots$ – простые множители.

$f(k) \geq 0$ ~~(очевид~~, ~~т.к. целые части~~

~~$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$~~ т.к. при $m, n \ldots > 0$

$f(m), f(n), \ldots \geq 0$, т.к.

целая часть положит. числа неотрицательна,

а значит сумма этих целых частей неотриц.

Следовательно, при $x \in \mathbb{N}$ $f(x) \geq 0$, не важно, простое x или составное

значит, при $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(x) \geq 0$, значит $f\left(\frac{1}{y}\right) < -f(x)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) \leq 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

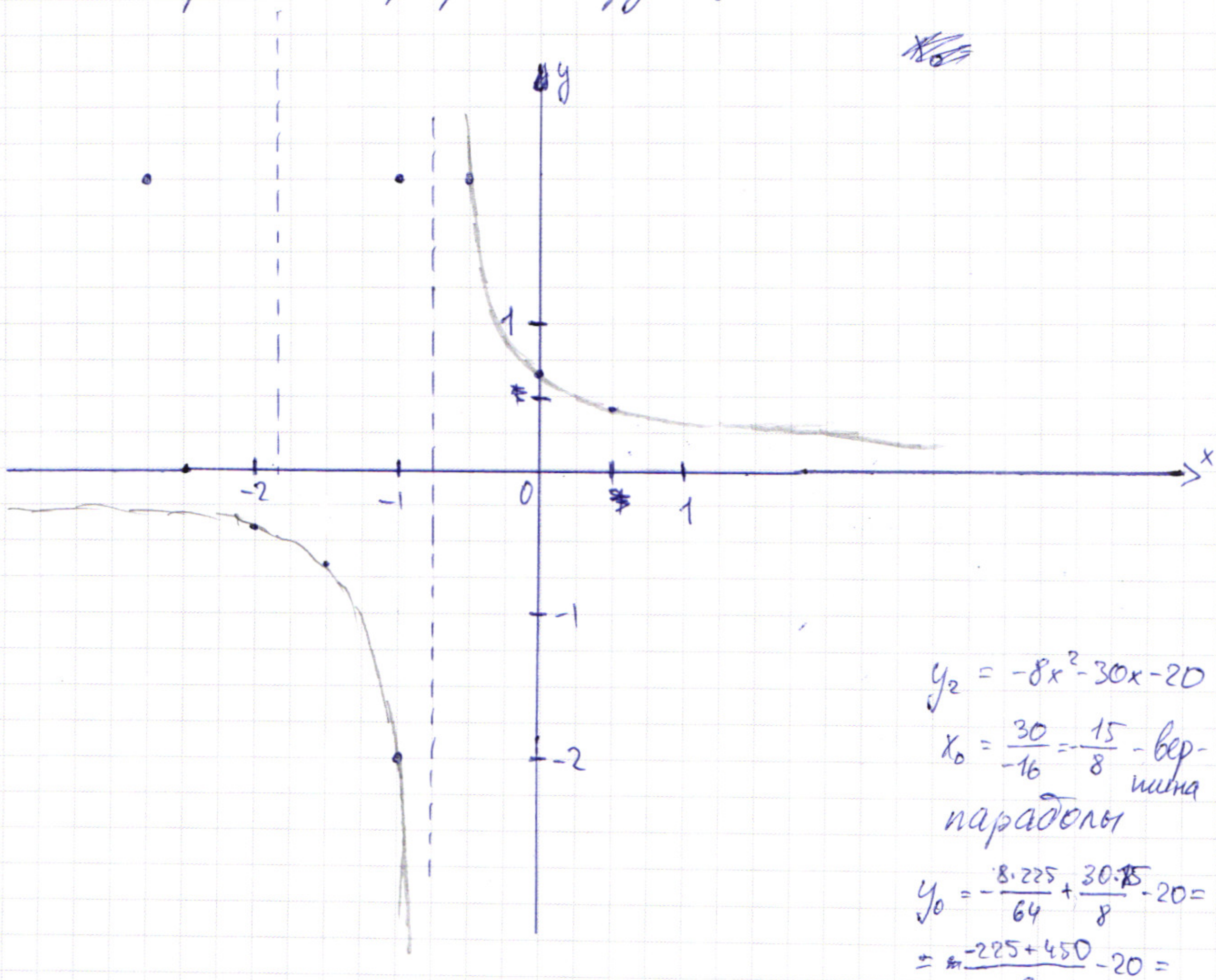
№6

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$

Вычтем из всех частей нер-ва 3:

$$\frac{2}{4x+3} \le ax + (b-3) \le -8x^2 - 30x - 20$$

Построим графики функций:



$y_2 = -8x^2 - 30x - 20$

$x_0 = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$ – вершина параболы

$y_0 = -\frac{8 \cdot 225}{64} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 20 =$

$= \frac{-225+450}{8} - 20 =$

$= \frac{225-160}{8} = \frac{65}{8}$