МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

Сначала решим первое уравнение:

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$$\begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x\geq 0 \\ 9y^2-15xy+3y+4x^2+2x-2=0 \end{cases}$$

решим квадратное уравнение, где корнем является y:

$9y^2-3(5x-1)y+4x^2+2x-2=0$

$D=9(5x-1)^2-9\cdot4(4x^2+2x-2)=9(25x^2-10x+1-16x^2-8x+8)=$

$=9(9x^2-18x+9)=81(x-1)^2$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{3(5x-1)+9(x-1)}{18}=\frac{(5x-1)+3(x-1)}{6}=\frac{8x-4}{6}=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{3(5x-1)-9(x-1)}{18}=\frac{(5x-1)-3(x-1)}{6}=\frac{2x+2}{6}=\frac{x+1}{3} \end{array}\right.$$

~~мы под~~ подставим неравенство $3y-2x\geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{4x-2}{3} \\ 4x-2-2x\geq 0;\ x\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\frac{x+1}{3} \\ x+1-2x\geq 0;\ x\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Подставим полученные значения y, выраженные через x, во 2-е уравнение:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\dfrac{4x-2}{\cancel{2}3} \\ x\geq 1 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\dfrac{x+1}{3} \\ x \leq 1 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\dfrac{4x-2}{3} \\ x\geq 1 \\ 3x^2+\cancel{3}\dfrac{(4x-2)^2}{\cancel{9}3}-6x-\dfrac{16x-8}{3}=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\dfrac{x+1}{3} \\ x \leq 1 \\ 3x^2+\cancel{3}\dfrac{(x+1)^2}{\cancel{9}3}-6x-\dfrac{4x+4}{3}=4 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{3} \\ x\leq 1 \\ 3x^2+\cancel{\dfrac{\overset{-2x+5}{x^2+2x+1-4x-4}}{3}}\ \dfrac{\overset{-2x-3}{x^2\cancel{+2x+1-4x-4}}}{3}-6x=4 \end{cases} \\ \begin{cases} y=\dfrac{4x-2}{\cancel{9}3} \\ x \geq 1 \\ 3x^2+\dfrac{\overset{-32x+12}{16x^2\cancel{-8x-16x+4-16x+8}}}{3}-6x=4 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{3} \\ x\leq 1 \\ 9x^2+x^2-2x-3-18x=12;\ 10x^2-20x-15=0; \end{cases} \\ \begin{cases} y=\dfrac{4x-2}{3} \\ x \geq 1 \\ 9x^2+16x^2-32x\cancel{+12}\cancel{-12}-18x=\cancel{12}\,0;\ 25x=50 \end{cases}\end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=\frac{x+1}{3} \\ x\le 1 \\ 2x^2-4x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=0 \\ y=\frac{1}{3}-\frac{2}{3} \\ x\ge 1 \text{ (противоречие)} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ x\geq 1 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{4+\sqrt{10}}{6} \\ x\le 1 \text{ (противоречие)} \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ x\le 1 \\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{(2;2);\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2};\frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)\right\}$

№6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \text{ ; } 2x-2>0 \text{ на нашем промежутке} \\ ax+b \geq 8x^2-34x+30 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x-3 \geq 2ax^2+2bx-2ax-2b \text{ ; } f(x)= 2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3 \leq 0 \\ 8x^2-(34+a)x+30-b \leq 0 \end{cases}$

Разберём первое неравенство:

при $a>0$: ~~для всех значений~~ $x \in (1;3]$ ~~функц~~

~~получается на~~ $f(x) = 2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3 \leq 0$

это парабола с ветвями, направленными вверх, наши значения $f(x)$ должны быть ≤ 0. Для этого $f(1)$ и $f(3)$ должны быть ≤ 0

$\begin{cases} a>0 \\ f(1) \leq 0 \text{ ; } 2a+2b-2a-4-2b+3 \leq 0 \text{ ; } -1 \leq 0 \\ f(3) \leq 0 \text{ ; } 18a+6b-6a-12-2b+3 \leq 0 \text{ ; } 12a+4b-9 \leq 0 \end{cases}$

при $a=0$:

$f(x) = 2bx-4x-2b+3 \leq 0$

Функция линейна, производная монотонна, следовательно достаточно проверить границы:

$\begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(3) \leq 0 \\ a=0 \end{cases}$

$\begin{cases} a=0 \\ 2b-4-2b+3 \leq 0 \\ 6b-12-2b+3 \leq 0 \text{ ; } 4b \leq 9 \text{ ; } b \leq \frac{9}{4} \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}; \quad \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -(1+\cos 2\alpha) \\ 4\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \cos 2\alpha - 1 \end{array} \right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos 2\alpha + 1 \le 0; \ \cos 2\alpha = -1 \\ 4\cdot 0 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \cos 2\alpha \ge 1; \ \cos 2\alpha = 1 \\ 4\cdot 0 = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

$\cancel{\cos 2 =}$ $\cancel{\cos}$ $\cos 2\alpha = \pm 1$

$2\cos^2\alpha - 1 = \pm 1$

$$\left[\begin{array}{l} \cos^2\alpha = 0; \ \mathrm{tg}\,\alpha \in \varnothing \\ \cos^2\alpha = 1; \ \mathrm{tg}\,\alpha = 0 \end{array} \right.$$

Ответ: $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$.

№5

~~f(1)~~ Найдём $f(1)$:

~~A~~ Для любого $n \in \mathbb{Q}$:

$f(n) = f(n) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0.$

Теперь найдем $f(\frac{1}{m})$, где $m \in N$:

$f(1) = f(m) + f(\frac{1}{m})$

$f(\frac{1}{m}) + f(m) = 0$

$f(\frac{1}{m}) = -f(m)$

Следовательно ~~$f(\frac{n}{m})$, где~~ для $\forall$ $n, m \in N$ - $f(\frac{n}{m}) = f(n) - f(m)$

Нам нужно найти кол-во пар $(x; y)$, для которых $f(x) < f(y)$

$\cancel{f(1) = f(2)} = f(3) = f(4) = f(6) = f(8) = f(9) = f(12) = f(16) = f(18) = f(24) = f(27) = 0$

(10 случаев)

$f(5) = f(7) = f(10) = f(14) = f(15) = f(20) = f(21) = 1$ (7 случаев)

$f(11) = f(22) = f(25) = 2.$ (3 случая)

$f(13) = f(26) = 3$ (2 случая)

$f(19) = f(29) = 4$ (2 случая)

$f(23) = 5$ (1 случай)

Для каждого x посчитаем кол-во y, для которых $f(x) < f(y)$

$10 \cdot 15 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 150 + 56 + 15 + 6 + 2 = 206 + 15 + 8 =$

$= 221 + 8 = 229$

Ответ: 229.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} \sin(2\alpha+8\beta) = -\frac{1}{17} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$ $1-\frac{1}{17^2}=\frac{17^2-1}{17^2}$ $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{\sqrt{17^2-1}}{17} = \pm\frac{\sqrt{16\cdot18}}{17} = \pm\frac{12\sqrt{2}}{17}$

$-\frac{1}{17}\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\left[\frac{1}{17}\cos 2\beta + \frac{12\sqrt{2}}{17}\sin 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{8}{17}\right.$

$\sin 2\alpha + 12\sqrt{2}\sin 2\beta - \cos 2\beta = -8$

$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$3y-2x>0$

$9y^2-15xy+4x^2 = \cancel{3xy}-2x-3y+2$

$3y-2x = \sqrt{x(3y-2)-(3y-2)} = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$9\left(y-\frac{4x+2}{3}\right)\left(y-\frac{x-2}{3}\right)=0$

$(3y-4x-2)(3y-x+2)=0$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$\cancel{4x^2-8x+4+9y^2-12y+4+10x+15y-15xy-2=0}$

$(3y-2x)^2 = 3xy-(2x+3y)+2$

$\cancel{(3y-4x)}(3y-x)$

$\left[y = \frac{3(5x-1)+9(x-1)}{18} = \frac{8x-4}{6} = \frac{4x-2}{3}\right.$

$9a^2-15a+4=0$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$\frac{3(5x-1)-3(x-1)}{6} =$

$D = 225-4\cdot9\cdot4 = 9(25-16) = 81$

$x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y = \frac{4}{3}$ $\frac{2x-4}{6} = \frac{x-2}{3}$

$(x-1)^2-1+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-\frac{4}{9} = \frac{4}{3}$ $\frac{25}{9}$

$9\left(a-\frac{15+9}{18}\right)\left(a-\frac{15-9}{18}\right) = 9\left(a-\frac{4}{3}\right)\left(a-\frac{1}{3}\right)$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$ $y^2-\frac{4}{3}+\frac{4}{9}$

$9y^2-3y(5x-1)+2(2x^2+x-1)=0$

$D = 9(5x-1)^2-9\cdot8(2x^2+x-1) =$ $\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+1 = \frac{4+4\cdot3+9}{9} = \frac{25}{9}$

$= 9(\cancel{25x^2-10x+1-16x^2-8x+8}) = 81(x-1)^2$; $D = (9(x-1))^2$

$3(1+\sqrt{\ldots})^2 = 3+3\sqrt{20}+\frac{2}{5}$

$\frac{9}{5}+\frac{6}{\sqrt{20}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\left(y-\frac{4x+2}{3}\right)}$ $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ $D=16+4\cdot2\cdot3=40$

$\cancel{3x^2+3y^2-6x-4y=4}$ $\frac{4+2\sqrt{10}}{4}=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$ $\frac{4+\sqrt{10}}{6}$

$3y^2$

$\frac{3-1}{4}=\frac{1}{2}$ $\frac{3+1}{4}$ $\frac{-1-3}{4}=-1$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$ $\frac{5}{3}x-\frac{1}{3}$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$ $2x^2+x-1$

$9y^2-(15x-3)y+4x^2+2x-2=0$ $D=1+8=9$

$D=9(5x-1)^2-9\cdot4(4x^2+2x-2)=9(25x^2-10x+1-16x^2-8x+8)=$

$=81(x-1)^2$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{15x-3+9x-9}{18}=\frac{24x-12}{18}=\frac{4x-2}{3} \\ y=\frac{15x-3-9x+9}{18}=\frac{6x+6}{18}=\frac{x+1}{3}\end{array}\right.$ $\cancel{\frac{14+4\sqrt{10}}{4}}$

$3\cdot\frac{7+2\sqrt{10}}{2}+3\,\frac{16+10+8\sqrt{10}}{36}$

$(3y-x-1)(3y-4x+2)=0$ $\frac{13}{6}$

$\left[\begin{array}{l} 3x^2+12\frac{(2x-1)^2}{9}-8x+4-6x=40;\ 3x^2+\frac{21+6\sqrt{10}+13+4\sqrt{10}}{6}= \\ x \end{array}\right.$

$\frac{8(x-1)}{4x-2-2x>0}$ $x+1-2x>0$ $=\frac{34+10\sqrt{10}}{6}=\frac{17+5\sqrt{10}}{3}$

$\cancel{3x^2+3\cdot4}$

$x\geq1$ $x\leq1$ $\frac{32}{13}$ $=-1-4\sqrt{10}$

$3x^2+3\cdot\frac{(4x-2)^2}{9}-6x-\frac{16x-8}{3}=4$

$9x^2+(4x-2)^2-18x-16x+8=12$ $\cancel{4\cdot2\cdot2}$ $\frac{4+\sqrt{10}}{6}$

$25x^2-16x+4-18x-16x=4$

$2\cdot\frac{2+\sqrt{10}}{6}+2$

$\cancel{x^2=2x}$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2\end{array}\right.$ $y=\frac{8-2}{3}=2$

$\frac{4+2\sqrt{10}}{4}=\frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$3x^2+\frac{(x+1)^2}{3}-6x-\frac{4x+4}{3}=4$ $6+3\sqrt{10}=\frac{18+9\sqrt{10}}{3}$ $\frac{4+\sqrt{10}}{6}$

$\cancel{10x^2\ 9x^2+x^2+8x+4-18x-4x+4=12}$ $-20x$

$(2+\sqrt{10})^2=4+10+4\sqrt{10}$

$9x^2+x^2+2x+1-18x-4x-4=15$

$10x^2-20x=15$ $2x^2-4x-3=0$

$2x^2-4x=3$ $D=16+4(4+2\cdot3)=40$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

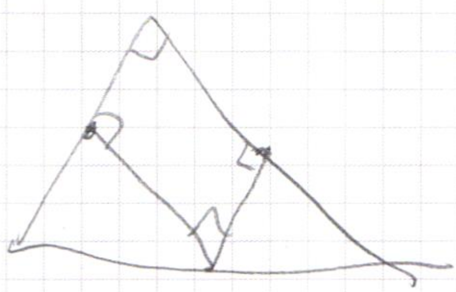
при $a<0$:

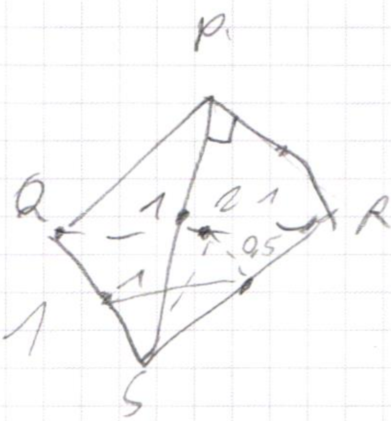
$f(x) = 2ax^2 + (2b-2a-4)x - 2b+3 \le 0$ $\forall a$ $f(1)=-1$

Ветви параболы направлены вниз. ~~Либо дискриминант ≤ 0,~~ ~~либо~~ абсцисса начала параболы ≤ 1.

$\left[\begin{array}{l} D\le 0;\ \cancel{4}(8b-8a\cancel{+2})^2 + 8^2(2b-3) \le 0 \\ \frac{2a-2b+4}{4a} \le 1; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b^2+a^2 \cancel{-2ab} \cancel{+4} - 2ab + \overset{8b}{\cancel{4b}} - 4a + \cancel{4b} + 6 - 2 \le 0 \\ 8a-2b+4 \ge \overset{2a}{\cancel{4a}};\ 2a+2b \le 4;\ a+b \le 1 \end{array}\right.$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

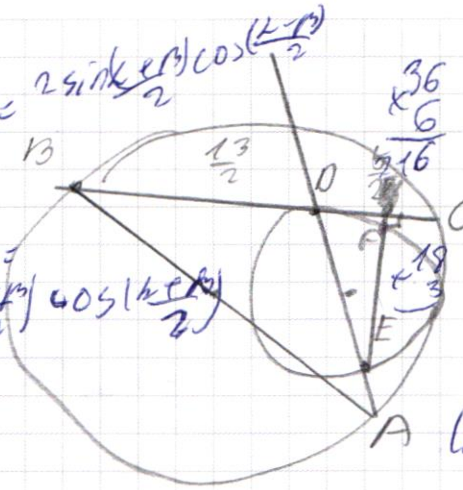
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

~~3log~~

$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = \sin\alpha + \sin(-\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$



$b \ge a - 3a$

$b \ge 4 - a$

~~$3^{\log_4}$~~

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

~~$3^{\log}$~~

$3^{\log_4(x^2+6x)} \ge (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)$

$\log_4 3 \cdot \log_4(x^2+6x) \ge \log_4(x^2+6x) + \log_4\left((x^2+6x)^{\frac{5}{4}} - 1\right)$

$\log_4(x^2+6x)(\log_4 3 - 1) \ge \log_4\left((x^2+6x)^{\frac{5}{4}} - 1\right)$

~~$4^{\log_4 3 - 1} \ge 4$~~

$\log_4 \frac{3}{4}$

$(x^2+6x)^{\log_4 \frac{3}{4}} \ge (x^2+6x)^{\frac{5}{4}} - 1$

$\frac{(x^2+6x)^{\log_4 3}}{x^2+6x} \ge$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$

~~$\sin\alpha$~~

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$-\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b$

~~$\sin 2$~~

~~$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + 4\sin 2\alpha = \frac{8}{17}$~~

$4x - 3 - 2ax^2 - 2bx + 2ax - 2b \ge 0$

~~$2ax^2 + 2bx$~~

$2ax^2 + 2bx - 2ax - 4x - 3 - 2b \le 0$

~~$\sin$~~

~~$2\sin\beta\cos 2\alpha = \frac{3}{3}$~~

~~$4a$~~ $4ax + 2b - 2a + 4$

$2\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$ax^2 + bx - ax + 2x - \frac{3}{2} - b \le 0$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

$2\sin\beta\cos(2\alpha+\beta) -$

$\sin(2\alpha+2\beta) - \sin 2\beta =$

при $a \ge 0$

~~17~~ ~~$2\sin 2\alpha - \sin 2\beta =$~~

$x = 2\alpha$

$f(1) \le 0$

$1 - \frac{16}{17}$ $= 2\sin 2\cos(\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$y = 2\alpha + 4\beta$

$f(3) \le 0$

$\sin\left(\frac{x+y}{2}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~$\sin 2\alpha - \sin(2\alpha+4\beta)$~~ $\sin(2\alpha) =$

$8a +$

$\sin(2\alpha+2\beta) - 2\alpha =$

при $a < 0$

$\sin x + \sin y = -\frac{8}{17} = 2\sin\beta\cos(2\alpha+\beta)$

$f(1) \ge 0$

~~$4 - a$~~ $\le 9 - 12a - 8a$

~~$2\sin$~~ $-\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot \cos\frac{y-x}{2} = -\frac{8\sqrt{17}}{17}$

$f(3) \ge 0$

$-\frac{b}{2a} \in [1; 3]$

$\frac{9a - 12a}{4} \le$

$\cos 2\beta = \pm\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$f(x) = 2ax^2 +$

~~$4 - a$~~ $\le 9 - \frac{12a}{4}$

~~$8a$~~ $a \le -\frac{7}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3x^2+\frac{(x+1)^2}{3} - 6x - \frac{4(x+1)}{3} = 4$

$9x^2+(x+1)^2 - 18x - 4(x+1) = 12$

$(x+1)(x-3) + 9x^2 - 18x - 12 = 0$

$x^2-2x-3+9x^2-18x-12=0$

$10x^2-20x-15=0$

$-\frac{8b-2a-4}{2a}$

$2x^2-4x-3=0$

$D = 16+4\cdot6=40$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{4+2\sqrt{10}}{4}=\frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ x=\frac{4-2\sqrt{10}}{4}=\frac{2-\sqrt{10}}{2};x= \end{array}\right.$

$\frac{2+\frac{\sqrt{10}}{2}+1}{3}=\frac{4+\sqrt{10}}{6}$

$\frac{1-\frac{\sqrt{10}}{2}+1}{3}=\frac{2-\frac{\sqrt{5}}{2}}{3}=$

$=\frac{2}{3}-\frac{\sqrt{10}}{6}=\frac{4-\sqrt{10}}{6}$

$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{18}}$

$(x-1-\frac{\sqrt{10}}{2})(x-1+\frac{\sqrt{10}}{2})=0$

$x^2-x+\frac{\sqrt{10}}{2}x-x+1-\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}x+\frac{\sqrt{10}}{2}-\frac{5}{2}=x^2-2x-\frac{3}{2}=0$

$\cancel{3^{\log_4(x^2+6x)}+6x}$

$\frac{2+\sqrt{10}}{8}\le 1$

$3(1-\sqrt{\frac{5}{2}})^2+3(\frac{2}{3}-\sqrt{\frac{5}{18}})^2-6+6\sqrt{\frac{5}{2}}-$

$\frac{2-\sqrt{10}}{8}\le 1$

$\frac{1-\frac{\sqrt{10}}{2}+1}{3}=\frac{4-\sqrt{10}}{6}$

$\cancel{\log_4 3\cdot\log_4(x^2+6x)+\log_4 6x\ge\log_4 5\log_4}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+\cancel{x^2+6x-(x^2+6x)^{\log_4 5}}\ge 2(x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}\ge(x^2+6x)((x^2+6x)^{\log_4\frac{5}{4}}-1)$

$\log_4 3\log_4(x^2+6x)\ge\log_4(x^2+6x)+\log_4((x^2+6x)^{\frac{5}{4}}-1)$

$\log_4(x^2+6x)\cancel{(\log_4 3-1)}\cdot\log_4\frac{3}{4}\ge\log_4((x^2+6x)^{\frac{5}{4}}-1)$

$(x^2+6x)^{\log_4\frac{3}{4}}\ge(x^2+6x)^{\frac{5}{4}}-1$

$(x^2+6x)^{\frac{5}{4}}-(x^2+6x)^{\log_4\frac{3}{4}}-1\le 0$

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ b \leq \frac{0-12a}{4} \\ b \geq 4-a \\ b \geq -3a \end{cases}$$

$b^2-2b(a-4)+a^2-4a-2$

$D = 4^2(a-4)^2 - 4(a^2-4a-2) = 4(\cancel{a^2-8a+16}-a^2+4a+2) =$

2

$\frac{-8b+8a+4}{2\cdot 4a} = \frac{a+2-b}{2a}$ $\quad b-a-2$

$3-2b - \frac{(a+2-b)^2}{2a}\cdot a - \cancel{\frac{a(a+2-b)^2}{4a}} \leq 0$

~~$b^2-2b(2a-8)$~~

$b^2-2b(a-4)+a^2-4a-2 \quad \frac{(a+2-b)^2}{2a} \geq 3-2b$

$\frac{D}{4} = a^2-8a+16-a^2+4a+2$

$\cancel{=-(4a-18)} \leq 0$

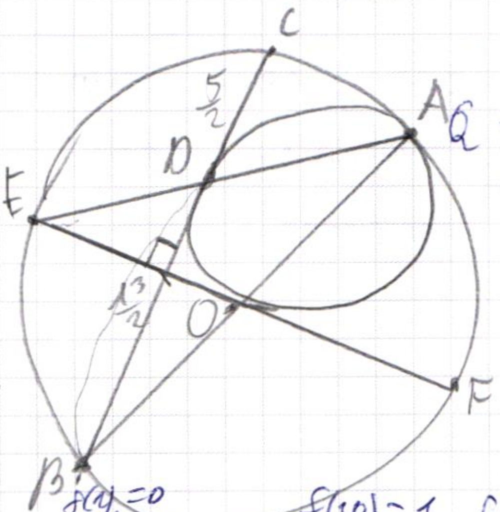
$=18-4a \quad \cancel{4a-18 \geq 0}$

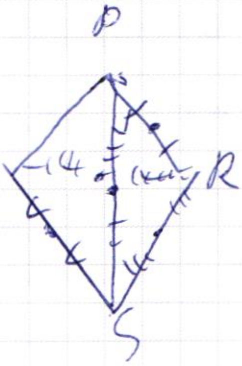
$a \geq$

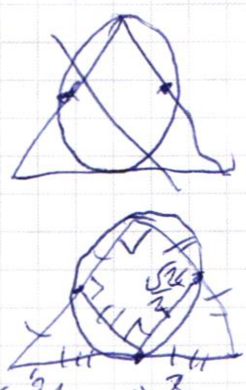
$(a+2-b)^2 \leq 6a-4ab$

$a^2+b^2+4+\cancel{4a}-\cancel{2ab}-4b \leq 6a - \cancel{4ab}$ $\quad +2ab \quad 2a$

$ED^2 =$







$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0$
$f(5)=1$
$f(6)=0$
$f(7)=1$
$f(8)=0$
$f(9)=0$
$f(10)=1$
$f(11)=2$
$f(12)=0$
$f(13)=3$
$f(14)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(17)=4$
$f(18)=0$
$f(19)=4$
$f(20)=1$
$f(21)=4$
$f(22)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=0$
$f(25)=2$
$f(26)=3$
$f(27)=0$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{3}{\cancel{10}} - \frac{4}{13}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$1-\cancel{\frac{1}{}}$

$\cancel{4}\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = -1-4\cos 2\alpha$

$$\begin{cases} 1-\cos 2\alpha = (1+4\cos 2\alpha)^2 \\ 1+4\cos 2\alpha \leq 0; \cos 2\alpha = 0 \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $a<0$:

$f(x) = 2ax^2 + (2b-2a-4)x - 2b+3 \le 0$

Это парабола с ветвями, направленными ~~вверх~~ вниз, ~~и ней~~ значения должны быть ~~меньше~~ быть ≤ 0, ~~значения $f(x)$ должны быть ≥ 0, однако при $x=1$ $f(x)<0$ (не подходит).~~ ~~для~~ $f(1)\le 0$ при $\forall a$ $x \Rightarrow -\frac{B}{2A}$ (абсцисса начала параболы) должно быть ~~мен~~ ≤ 1 либо $D<0$

В первом уравнении:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} a>0 \\ 12a+4b\le 9\end{cases} \\ \begin{cases} a=0 \\ b\le \frac{9}{4}\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} a\ge 0 \\ 12a+4b\le 9\end{cases}$$

~~Второе уравнение~~: $g(x) = 8x^2 - (34+a)x + 30 - b \le 0$

Во втором ~~уравнении~~ неравенстве все значения должны быть ≤ 0.

Так как это парабола, ветви которой направлены вверх, нужно, чтобы для границ это условие работало:

$$\begin{cases} g(1)\le 0 \\ g(3)\le 0\end{cases}$$

$$\begin{cases} 8-34-a+30-b\le 0;\ 4-a-b\le 0;\ a+b\ge 4 \\ 72-102-3a+30-b\le 0;\ 3a+b\ge 0\end{cases}$$

Из двух неравенств получаем:

$$\begin{cases} a\ge 0 \\ 12a+4b\le 9 \\ a+b\ge 4 \\ 3a+b\ge 0\end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$a^b = d$ $a^{bc} = d^c$ $bc =$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$ $\sin 2\beta \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}\right.$ $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -1$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$ $(x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0$

$f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{1}{m}\right)+\dots+f\left(\frac{1}{m}\right) =$ $3^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)\left((x^2+6x)^{\log_4 1{,}25}-1\right)$

$= m f\left(\frac{1}{m}\right) =$ $\log_4 3^{\log_4(x^2+6x)} \geq \log_4(x^2+6x) + \log_4\left((x^2+6x)^{\log_4 1{,}25}-1\right)$

$= f$ $f(n) =$ $t = \log_4(x^2+6x)$

$= f(1)+f(n)$

$f(1) = 0$ $t\log_4 3 \geq \log_4\left(4^{t\cdot\log_4 1{,}25}-1\right)$

$f\left(\frac{1}{m}\right) + f(m) = 0$ $t\log_4 3 \geq \log_4(1{,}25^t - 1)$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} \geq 1{,}25^{x^2+6x} - 1$

$f\left(\frac{1}{m}\right) =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)