МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$\begin{cases} x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124 \\ 8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92 \end{cases}$$

$\sqrt[3]{64y^2-x^2}=x-124$

$\sqrt[3]{64y^2-x^2}=8y+92.$

$x-124=8y+92$ $\quad x=8y+124+92=8y+216$ $\quad 216=2^3\cdot3^3$

$\sqrt[3]{64y^2-x^2}=8y+92$ → подставим вместо x $8y+216$.

$\sqrt[3]{64y^2-(8y+216)^2}=8y+92$

$\sqrt[3]{(8y-8y-216)(8y+8y+216)}=8y+92.$

$\sqrt[3]{-216(16y+216)}=8y+92$

$-2\cdot3\cdot2\sqrt[3]{2y+27}=8y+92.$

$-12\sqrt[3]{2y+27}=8y+92$ $\quad -3\sqrt[3]{2y+27}=2y+23$

$t=2y+27.$

~~Повысим степень на 3.~~

~~$-27(2y+27)=8y^3+3y\cdot(23)^2+3y^2(23)+(23)^3$~~

~~$8y^3+69y^2+y(1587+54)+12796=0.$~~

~~$8y^3+69y^2+y1641+12796=0.$~~

$-3\sqrt[3]{t}=t-4$ $\quad -27t=t^3-3t^2 4+3t16-64$

$t^3-12t^2+75t-64=0.$

при $t=1$ решение присутствует.

$$\begin{array}{r|l} t^3-12t^2+75t-64 & t-1 \\ \underline{t^3-t^2} & t^2-11t+64 \\ -11t^2+75t & \\ \underline{-11t^2+11t} & \\ 64t-64 & \\ \underline{64t-64} & \\ 0. & \end{array}$$

$t^3-12t^2+75t-64=(t-1)(t^2-11t+64)=0.$

$t^2-11t+64=0$ $\quad D=121-4\cdot64<0$ – других решений нет, $t=1$

нет.

$2y+27=1.$ $\quad y=\frac{-26}{2}=-13$

$x=8y+216=8(-13)+216=216-104=112.$

Ответ: $x=112$; $y=-13$.

Задача 2

$\sqrt{\log_{2x^3}x^9}\le\log_{2x}\frac{1}{x^3}.$

ОДЗ: $x>0$;

$2x\ne1 \Rightarrow x\ne\frac{1}{2}$

$2x^3\ne1$ $\quad x^3\ne\frac{1}{2}\Rightarrow x\ne\frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$

$\log_{2x^3}x^9\ge0$

$\Downarrow$

при $2x^3>1$ $\quad x^9\ge1.$

$x>\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$; $x\ge1.$

при $2x^3<1$ $\quad x^9\le1$

$x<\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad x\le1.$

ОДЗ: $x\in(0;\frac{1}{2})\cup(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}})\cup[1;+\infty)$

при $x=1$ решение существует, так как $0=0$.

при $x\ne1$:

$\sqrt{\log_{2x^3}x^9}\le\log_{2x}\frac{1}{x^3}.$

$\sqrt{\frac{\log_x x^9}{\log_x 2x^3}}\le\frac{\log_x\frac{1}{x^3}}{\log_x 2x}$

$\sqrt{\frac{9}{3+\log_x2}}\le\frac{-3}{1+\log_x2}$ $\quad t:\ \log_x2=t$; $\log_x2>-3$ $\quad t>-3$

$\sqrt{\frac{9}{3+t}}\le\frac{-3}{1+t}$, так как левая часть неравенства больше нуля и правая часть больше левой, то левая часть неравенства больше нуля $\Rightarrow t<1$. $\log_x2<1$.

значит возведем в квадрат обе части:

$\frac{9}{3+t}\le\frac{9}{1+2t+t^2}$

$1+2t+t^2>3+t$ $\quad t^2+t-2>0.$ $\quad(t+2)(t-1)>0$

$-2 \quad 1$

$t \in (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$ (согл ОДЗ). Так как $t < 1$ и $t > -3$, то

$t \in (-3; -2)$

$\log_x 2 \in (-3; -2)$.

$-3 < \log_x 2 < -2$.

$\frac{1}{8} < x < \frac{1}{4}$

$x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup \{1\}$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{8}; \frac{1}{4}\right) \cup \{1\}$.

Задача 3

~~остаток числа от 10^k равен числу составленному из последних k цифр.~~

Пусть наше число $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$. Предположим, что 10^n, 10^{n+1}, 10^{n+2} – три числа, сумма остатков при делении на эти числа числа $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ дает 12414.

Если $n+2 \leq 4$. Тогда максимальная сумма остатков равна:

$$\begin{array}{r} 9999 \\ +\ 999 \\ +\ 99 \\ \hline 11097 \end{array}$$

что меньше чем 12414. Значит $n+2 > 4$. Но $n+2 < 7$. Так как если $n+2 \geq 7$, тогда один из остатков равен $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, при чем $a_1 \neq 0$, тогда сумма остатков будет больше или равно чем $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, что больше чем 12414.

Пусть $n=5$. Тогда сумма остатков равна:

$$\begin{array}{r} \overline{a_3a_4a_5a_6a_7} \\ +\ \overline{a_4a_5a_6a_7} \\ +\ \overline{a_5a_6a_7} \\ \hline 12414 \end{array}$$

Запишем это в виде:

$a_7 \cdot 3 + a_6 \cdot 3 \cdot 10 + a_5 \cdot 3 \cdot 100 + a_4 \cdot 2 \cdot 1000 + a_3 10000 = 12414$.

Заметим, что $a_3 = \{0; 1\}$. Так как при $a_3 > 1$ сумма больше 20000

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 3

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $a_3 = 1$. Тогда

$$a_7 3 + a_6 3\cdot 10 + a_5 3\cdot 100 + a_4\cdot 2\cdot 1000 = 2414.$$

$a_4 = \{0; 1\}$. Так как при $a_4 > 1$ левая часть больше или равна 3000.

$a_4 = 0$: $a_7 3 + a_6 3\cdot 10 + a_5\cdot 3\cdot 100 = 2414$
такое невозможно, так как левая часть кратна 3, $\cancel{a_7 + a_6 10 + a_5 100} = 8$
и правая нет.

$a_4 = 1$: $a_7 3 + a_6 3\cdot 10 + a_5 3\cdot 100 = 414$.

$a_7 + a_6 10 + a_5 100 = 138 \Rightarrow a_5 = 1\ \ a_6 = 3\ \ a_7 = 8$, так как a_7, a_6, a_5 — цифры.

Значит всего случаев при $a_3 = 1$ и $n = 5$:

$n_1, n_2, 1, 1, 1, 3, 8$. $\quad 9\cdot 10 = 90$.

Пусть $a_3 = 0$. Тогда.

$$a_7 3 + a_6 3\cdot 10 + a_5 3\cdot 100 + a_4 2000 = 12414.$$

Прибавим к обеим частям $a_4 1000$

$$a_7 3 + a_6 3\cdot 10 + a_5 3\cdot 100 + a_4 3000 = 12414 + a_4 1000$$

$$a_7 + a_6 10 + a_5 100 + a_4 1000 = 4138 + \frac{a_4 1000}{3} \Rightarrow$$

~~Так как слева~~ $\cancel{\frac{a_4 1000}{3}} = a_4 1000 \,\vdots\, 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_4 = \{0; 3; 6; 9\}$.

$a_4 : 0$ $\quad a_7 + a_6 10 + a_5 100 = 4138$ — невозможно.

Если $a_4 = 3$: $a_7 + a_6 10 + a_5 100 + 3000 = 4138 + 1000$

$a_7 + a_6 10 + a_5 100 = 2138$ — невозможно.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Если $a_4 = 6$

$a_7 + a_6 10 + a_5 100 + 6000 = 6\,138$

$a_7 + a_6 10 + a_5 100 = 138 \Rightarrow a_7 = 8 \quad a_6 = 3 \quad a_5 = 1.$

Если $a_4 = 9$.

$a_7 + a_6 10 + a_5 100 + 9000 = 4138 + 3000$ - невозможно, т.к. левая часть больше правой.

Значит при $a_3 = 0$ и $n = 5$ случаев

$n, n, 0, 6, 1, 3, 8$ $\quad 9 \cdot 10 = 90.$

Пусть $n = 6$. Тогда:

$$\begin{array}{r} \overline{a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} \\ + \quad \overline{a_3 a_4 a_5 a_6 a_7} \\ \overline{a_4 a_5 a_6 a_7} \\ \hline 1\;2\;4\;1\;4 \end{array}$$

$a_2 100000 + a_3 2 \cdot 10000 + a_4 \cdot 3 \cdot 1000 + a_5 \cdot 3 \cdot 100 + a_6 \cdot 3 \cdot 10 + a_7 \cdot 3 = 12414.$

$a_2 = 0$: Так как $a_2 \geq 1$, то левая часть $\geq 100{,}000 > 12414$.

~~$a_3 = \{1; 0$~~

$a_3 = 0$: Так как $a_2 \geq 1$, то левая часть $\geq 20000 > 12414$.

$a_7 3 + a_6 3 \cdot 10 + a_5 \cdot 3 \cdot 100 + a_4 \cdot 3 \cdot 1000 = 12414.$

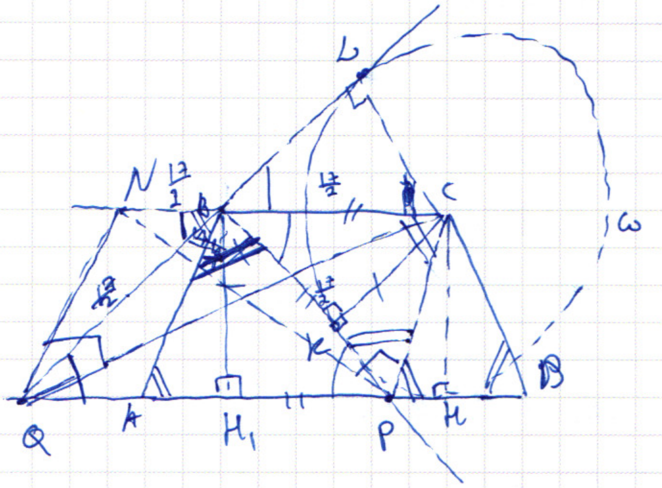
$a_7 + a_6 10 + a_5 100 + a_4 1000 = 4138$

$n, 0, 0, 4, 1, 3, 8 \Rightarrow$ всего 9 случаев.

Тогда всего таких чисел $90 + 90 + 9 = 189$

Ответ: 189.

Задача 4



$AB = CD$

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$.

$AP = \frac{17}{2}$

$NC = 17$.

$\angle CPN = 90^\circ$

$\angle ADC$ - ?

$\angle NQC$ - ?

S_{NCDQ} - ?

~~СН~~ Пусть К точка касания ω и AD, тогда СН - высота ABCD. ~~CP = AP~~ из $\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$ следует, что $8CP = 15NP$. пусть $NP = 8x$, $CP = 15x$

$NC^2 = NP^2 + PC^2$

$\sqrt{289} = \sqrt{64x^2 + 225x^2} = \sqrt{289x^2} \Rightarrow x = 1. \Rightarrow NP = 8 \quad CP = 15.$

$\angle BCP = \angle CPD$, так как $BC \parallel AD$. Тогда $\frac{CH}{DH} = \frac{8}{15}$. пусть

$CH = 8y \quad DH = 15y$. Тогда $\sqrt{CP^2} = \sqrt{CH^2 + PH^2}$

$\sqrt{225} = \sqrt{64y^2 + 225y^2}$, $\sqrt{225} = \sqrt{289}\, y \Rightarrow y = \frac{15}{17} \Rightarrow$

$CH = \frac{120}{17} \quad DH = \frac{225}{17}$.

$CH = KC = CL$, так как радиусы ω. Пусть BH_1 высота трапеции из т. B. Тогда $BH_1 = CH = CK$. $\angle CBP = \angle BPA$, так как $BC \parallel AB$. $\Rightarrow \triangle BH_1P = \triangle CKB$. $\Rightarrow$

$BC = BP \Rightarrow \triangle PBC$ - равнобедренный.

$\operatorname{tg}\angle BCP = \frac{8}{15} \quad \frac{\sin\angle BCP}{\cos\angle BCP} = \frac{8}{15}$.

$\frac{\sqrt{1-\cos^2\angle BCP}}{\cos\angle BCP} = \frac{8}{15}$.

$\frac{1-\cos^2\angle BCP}{\cos^2\angle BCP} = \frac{64}{225}$. $\quad \frac{1}{\cos^2\angle BCP} = \frac{64}{225} + 1 = \frac{289}{225}$.

$\cos\angle BCP = \frac{\sqrt{225}}{\sqrt{289}} = \frac{15}{17}$.

Тогда по теореме косинусов.

$BC^2 = BP^2 + PC^2 - 2\cos\angle BPC \cdot BP \cdot PC$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{BC^2 = BC^2} + PC^2 - 2\cdot\frac{15}{17}\cdot BC\cdot PC.$

$BC = \frac{PC^2}{2\cdot\frac{15}{17}\cdot RC} = \frac{PC\cdot 17}{30} = \frac{15\cdot 17}{30/2} = \frac{17}{2}.$

~~РДк~~

так как $AP = BC$, то $PD = 2HD \Rightarrow HD = PH = \frac{225}{17}$.

Тогда $\operatorname{tg}\angle ADC = \frac{CH}{HD} = \frac{\frac{120}{17}}{\frac{225}{17}} = \frac{120}{225} = \frac{8}{15}$. $(\angle ADC = \angle BCP)$

~~Так как QL и QH касательные к ω из одной плоскости, то $QL = QH$~~

C - центр вписанной окружности в угол $\angle LBP \Rightarrow$

$\angle LBC \angle CBP$. $\angle NBQ = \angle LBC$ (вертикальные углы).

$\angle BCP = \angle BAP$ и $\angle CBP = \angle BPA \Rightarrow \angle ABP = \angle BAP = \cancel{\angle B}$

$\angle NBA = \angle BAP$.

Так как $\angle NBQ = \angle LBC = \angle BPQ$. $\angle BQD = \angle NBQ$ $(NC \parallel QD)$. $\triangle QBP$ - равнобедренный ~~$QP = 2H, P = 2(HC - PH) =$~~

~~$= 2\left(\frac{17}{2} - \frac{225}{17}\right) = 2\left(\frac{289 - 450}{2\cdot 17}\right) = \frac{171}{17}$~~

$QB = BP = NB = BC \Rightarrow QB$ - медиана $\Rightarrow \angle NQC$ - прямой угол.

$S_{NQCD} = CH\cdot\frac{(NC + QD)}{2} = CH\frac{(NC + AD + H_1P)}{2} = CH\frac{(NC + A\cancel{P} + AP - AH_1)}{2} =$

$= CH\frac{(NC + 2AP - HD)}{2} = \frac{120}{17}\frac{\left(17 + 17 - \frac{225}{17}\right)}{2} = \frac{\cancel{120}^{60}(289\cdot 2 - 225)}{17^2} =$

$= \cancel{\;\;} \; 120 - \frac{225}{289}$

~~Ответ~~: $\angle ADC = \operatorname{arctg}\frac{8}{15}$; $\angle NQC = 90^\circ$ $S_{NQCD} = 120 - \frac{225}{289}$.

Задача 5

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$\cancel{\frac{1}{2}\sin(x+2y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+2y) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$

$\cancel{\sin(x+2y+\frac{\pi}{3}) = 4\cos(x+\frac{\pi}{6})}$

$\cancel{\cos(x+2y-\frac{\pi}{6})}$

$\cancel{\sin(} \cos\left(x+2y-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin(x+2y) + \sqrt{3}(\cos(x+y))\cos y - \sqrt{3}\sin(x+y)\sin y = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin x\cos 2y + \cos x\sin 2y + \sqrt{3}(\cos(x+y))\cos y - \sqrt{3}\sin(x+y)\sin y =$

$= 8\cos x\cos\frac{\pi}{6} - 8\sin x\sin\frac{\pi}{6}$.

$\sin x(\cos^2 y - \sin^2 y) + \cos x\, 2\sin y\cos y + \sqrt{3}(\cos(x+y))\cos y - \sqrt{3}\sin(x+y)$

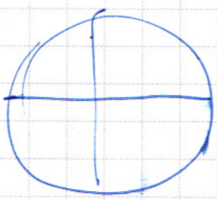
$$\begin{cases} \sqrt{3}\cdot\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \sin\left(x+2y+\frac{\pi}{3}\right) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases} \qquad \sin(x+y) = \cancel{25\sin^2(\tfrac{\pi}{3}-x)}\sqrt{1-\frac{25\sin^2(\frac{\pi}{3}-x)}{3}}$$

$\sqrt{3}$ $\quad \sqrt{3}\cos x\cos y - \sqrt{3}\sin x\sin y = 5\sin\frac{\pi}{3}\cos x - 5\sin x\cos\frac{\pi}{3}$

$\sqrt{3}\cos x\cos y - \sqrt{3}\sin x\sin y = 5\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \frac{5}{2}\sin x$

$\cancel{\sqrt{3}(\cos}$

$\sqrt{3}\cos x\left(\cos y - \frac{5}{2}\right) - \sqrt{3}\sin x\left(\sin y - \frac{5}{2\sqrt{3}}\right) = 0 \,\Big|: \cancel{\frac{\sin x\sin y}{\cos x\cos y}}$



$1 - \frac{5}{2\cos x\cos y} - \text{arctg}$

$\text{ctg}\,x\,\text{ctg} - \frac{5}{2\sin x\sin y}\cdot\frac{\sqrt{3}}{} - \sqrt{3} + \frac{5}{2\sqrt{3}\sin x\sin y} = 0$

$\text{ctg}\,x\,\text{ctg}\,y - \frac{5(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{3}\sin x\sin y} = 0.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\underset{=\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{1}{2}}\sin(x+2y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+2y) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cancel{\cos\left(x+2y-\frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\frac{1}{2}\sin(x+2y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+2y) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - \sin x\,\frac{1}{2}\right)$$

$$\sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 4\sqrt{3}\cos x - 4\sin x$$

$$\sin x\cdot\cos 2y + \cos x\sin 2y + \sqrt{3}\cos x\cos 2y - \sqrt{3}\sin x\sin 2y =$$

$$= 4\sqrt{3}\cos x - 4\sin x$$

$$\cancel{\sin x(\cos 2y + \sqrt{3}\sin 2y\ 4)} -$$

$$\sin x(\cos 2y - \sqrt{3}\sin 2y + 4) + \cos x(\sin 2y + \sqrt{3}\cos 2y - 4\sqrt{3}) = 0.$$

$$\sqrt{3}\cos x\cos y - \sqrt{3}\sin x\sin y = 5\sin\frac{\pi}{3}\cos x - 5\cos\frac{\pi}{3}\sin x = 0.$$

$$\cos x\left(\sqrt{3}\cos y - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) - \sin x\left(\sqrt{3}\sin y + \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\sin x\left(\cos 2y - \sqrt{3}\sin 2y + 4 - \sqrt{3}\sin y - \frac{5}{2}\right) + \cos x\left(\sin 2y + \sqrt{3}\cos 2y - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos y - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) = 0.$$

$$\sin x\left(\cos^2 y - \sin^2 y - \sqrt{3}\sin 2y + 4 - \sqrt{3}\sin y - \frac{5}{2}\right) + \cos x\left(\left(2\sin y\cos y + \sqrt{3}\cos^2 y - \sqrt{3}\sin^2 y - 4\sqrt{3} + \sqrt{3}\cos y - \frac{5\sqrt{3}}{2}\right) = 0\right.$$

$$\sin x\left(\cos^2 y - \sin^2 y - \sqrt{3}\sin y + 4 - \sqrt{3}\sin y - \frac{5}{2}\right) + \frac{\cos x}{\sqrt{3}}\left(\frac{2\sin y\cos y}{\sqrt{3}} + \cos^2 y - \sin^2 y - \right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

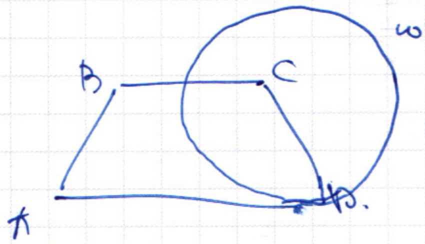
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

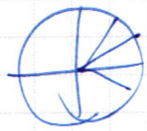
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

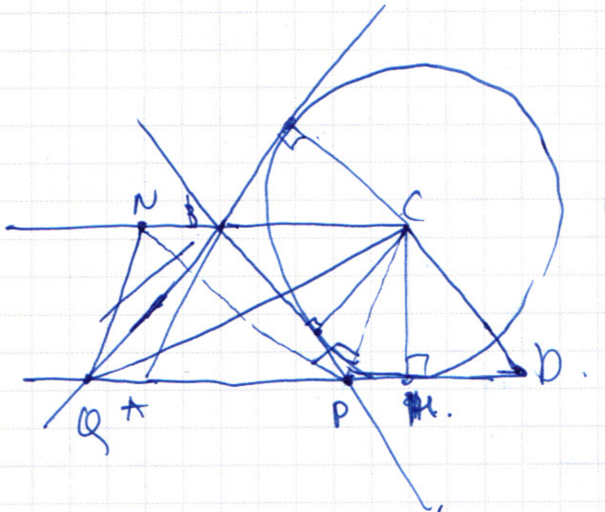
4.



$AD > BC$



$$\begin{array}{r} 10 \\ -\,460 \\ 289 \\ \hline 171 \end{array}$$



$AB = CD$.

$AD > BC$.

171

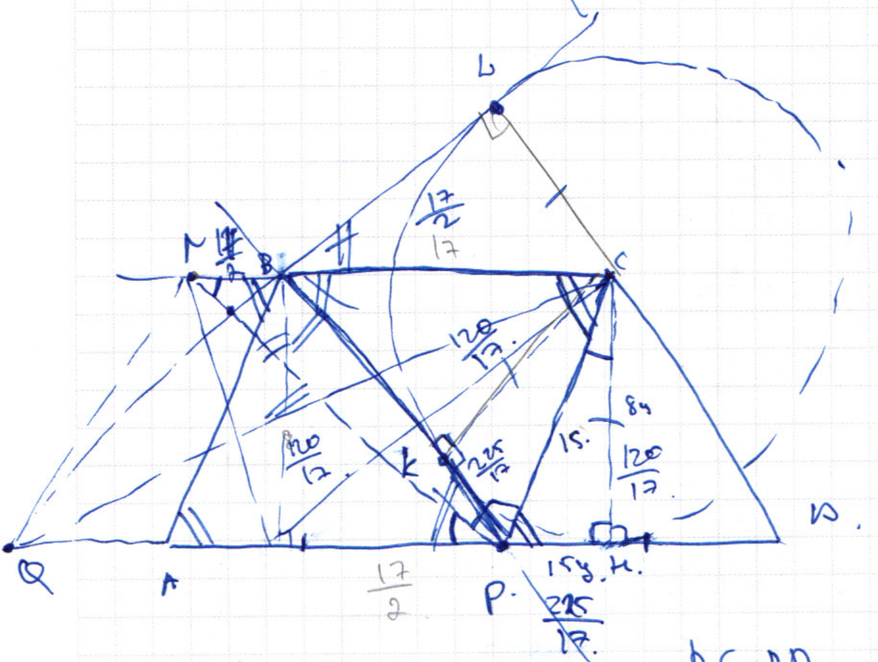
$\angle CPN = 90°$.

$\angle ADC$, $\angle NQC$, S_{NCPQ}.

$\angle NQP = \operatorname{arcctg} \frac{8}{15}$.

$AP = \frac{17}{2}$

$NC = 17$.



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\,17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15 \\ \times\,15 \\ \hline 75 \\ 15 \\ \hline 225 \end{array}$$

$289 = 225x^2 + 64x^2$

$x = 1$

$$\begin{array}{r} 15 \\ \times\,8 \\ \hline 120 \end{array}$$

$225 = 225y^2 + 64y^2$.

$225 = 289y^2$.

$y^2 = \frac{225}{289} = \left(\frac{15}{17}\right)^2$.

$y = \frac{15}{17}$.

$BC = BP$.

$QL = QK$.

$BP = NB$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

5. $\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\frac{1}{2}$

$\sqrt[3]{2} < 2.$

$ctg\, x + ctg\, y$

$\frac{1}{2}\sin(x+2y) + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos(x+2y) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$

$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

$\cancel{\cos(30^\circ - x}$ $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x-2y\right) = 4\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$

$\sqrt{3}\cos x\cos y - \sqrt{3}\sin x\sin y = 5\sin\frac{\pi}{3}\cos x - 5\cos\frac{\pi}{3}\sin x$

$\sqrt{3}\cos x\cos y - \sqrt{3}\sin x\sin y = 5\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x - 5\frac{1}{2}\sin x.$

$\cancel{\frac{1}{2}\sin x\cos 2y} -$

$\sin x\cos 2y + \cancel{\cos 2y \sin x}$ ($\cos x \sin 2y$) $+ \sqrt{3}\cos x \sin 2y - \sqrt{3}\sin x\sin 2y =$

$= 8\cos x\frac{\sqrt{3}}{2} - 8\sin x\frac{1}{2}$

$\sin x(\cos^2 y - \sin^2 y) + \cos x \cdot 2\sin x\cos x + \sqrt{3}\cos x$

$(\cos^2 y - \sin^2 y$

$\cancel{\cos x\sqrt{3}(\cos y - 2\sqrt{\cos}) - \sqrt{3} + 2}$

$112 \times 112 = 224\ ;\ 112\ ;\ 12544$

$64 \cdot 169 - (112)^2$

$112\cdot$

169×64

$93 \times 8 = 104$

$64y^2 \cancel{x^2 - (64y - x)(64y + x)}$

$1641 \mid 457$, $1 \mid 3$

$452 \mid 19$, 3

$112;\ -13.$

$(a+b)(a+b)(a+b)$

27×8, 6

$76 - 76.$

1644

$C.$

$C_3^1 = \frac{3!}{2!} = 3$

$23 \times 3 = 69$

$457 \mid 17$, 34, 97, 2

$13 \times 8 = 104$

$529 \times 3 = 1587$

$23 \times 23 = 69,\ 46,\ 529$

27×27

$23 \times 23 = 46$, $16 \times 3 = 48$

$12796 \mid 2$
$6398 \mid 2$
$3199 \mid 7$
457

457

$529 \times 23 = 1587,\ 1058,\ 12167$

$27 \times 27 = 189,\ 54,\ 629$

$46 + 23 = 9$

$48 + 27 = 75$

$457 \mid 13$, 39, $67.$, 3

$3199 \mid 7$, 28, 39, 35, 49, 457

$457 \mid 7$, 42, 3, 6

$12167 \times 629 = 12796$

$457 \mid 11$, 1, 4

$64 \times 4 = 256$

$-3t =$

$2y + 27 = t.$

$-3\sqrt[3]{t} = t - 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=124$ $\qquad \sqrt[3]{64y^2-x^2}=t.$ $\qquad x-t=124.$

$8y-\sqrt[3]{64y^2-x^2}=-92$ $\qquad 8y-t=-92.$

$\cancel{64y^2-x^2=(x-124)^3}$

$x-8y=124+92=216.$

$t=x-124 \qquad x=216+8y.$

$t=8y+92$

$216+8y-\sqrt[3]{64y^2-(216+8y)^2}=124$

$(216+8y)^2=$

$216+8y-\sqrt[3]{64y^2-(216)^2-2\cdot216\cdot8y-64y^2}=124.$

$216+8y-\sqrt[3]{216(-216-16y)}=124.$

$8y+\sqrt[3]{216(216+16y)}=-92$

$8y+6\sqrt[3]{(216+16y)}=-92.$

$8y+6\cdot2\sqrt[3]{(3^3+2y)}=-92.$

$8y+12\sqrt[3]{(3^3+2y)}=-92.$

$2y+3\sqrt[3]{(3^3+2y)}=-23.$

$3\sqrt[3]{(3^3+2y)}=-23-2y.$

$27(3^3+2y)=$

$$\begin{array}{r} 216 \\ \times 216 \\ \hline 1296 \\ 216 \\ 432 \\ \hline 46656 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 216 \\ -124 \\ \hline 92 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 92 & 4 \\ 92 & 23 \end{array}$$

$216=2^3\cdot3^3.$

$16=2^3\cdot2$

$\sqrt{\log_{2x}x^9}\leq\log_{2x}\frac{1}{x^3}.$ $\qquad x>0.$ $\quad x\neq\frac12.$

$\sqrt{9\log_{2x}x}\leq\log_{2x}(x)^{-3}.$

$\sqrt{3\log_{2x}x}\leq-3\log_{2x}x.$ $\qquad 3t>0.$

$\log_{2x}x = t.$

$\sqrt{3t}\leq-3t.$ $\qquad 3t\leq9t^2.$ $\qquad 3t\leq9t^2.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$10^3 \quad n \geq 5.$

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$

$$\begin{array}{r} 999 \\ 99 \\ 9 \\ \hline 1107 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 9999 \\ 999 \\ 99 \\ \hline 11097 \end{array} \leq 12414.$$

1000000

$n \geq 5$

$n < 7.$

12414.

$a_1 a_2 a$

$a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$

$a_4 a_5 a_6 a_7$

$a_5 a_6 a_7$

$a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$

$a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$

$a_4 a_5 a_6 a_7.$

10.

~~$3a_7 + 10 \cdot 3a_6 + 100 \cdot 3a_5 + 2a_4 + a_3 = 12414.$~~

$3a_7 + 10 \cdot 3a_6 + 100 \cdot 3 \cdot a_5 + 1000 \cdot 2a_4 + 10000a_3 = 12414.$

$3a_7 + 10 \cdot 3a_6 + 100 \cdot 3 \cdot a_5 + 1000 \cdot 3a_4 + \underset{0}{10000 \cdot 2a_3} + \underset{0}{a_2 \cdot 10000}$

$a_1 \neq$.

$a_3 = 0; \ a_2 = 0.$

$a_3 = 0$

$a_3 = 1.$

$3a_7 + 10 \cdot 3a_6 + 100 \cdot 3 \cdot a_5 + 1000 \cdot 3a_4 = 12414.$

$3a_7 + 10 \cdot 3a_6 + 100 \cdot 3 a_5 \cdot 1000 \cdot 2a_4 = 12414.$

$3a_7 + 10 \cdot 3a_6 + 100 \cdot 3a_5 + 1000 \cdot 2a_4 = 2414.$

$a_1 = \{1; 9\}$ $a_3, a_2 = 0.$

$a_3 = 0.$

$a_7 + 10a_6 + 100a_5 + 1000a_4 = 4138$

$3a_7 + 10 \cdot 3a_6 + 100 \cdot 3a_5 + 1000 \cdot 3a_4 = 12414 + a_4 1000$

$a_7 + 10a_6 + 100a_5 + 1000a_4 = 4138 + \frac{a_4 1000}{3}.$

$12414 : 3 = 4138$

$a_4 : 3.$

$a_4 = 3; 6; 9.$

$a_4 = 1; 0.$

$a_4 = 9.$ $\frac{3000}{3}$

$3a_7 + 10 \cdot 3a_6 + 100 \cdot 3a_5 + 1000 \cdot 2a_4 = 2414$

$3a_7 + 10 \cdot 3a_6 + 100 \cdot 3a_5 = 414.$

$414 : 3$

$4138 + 3000 = 7138$

$a_7 + 10a_6 + 100a_5 = 138$

$a_4 = 3$

$\frac{3000}{3} = 1000$

$3a_7 + 10a$

$4138 + 1000 = 5138.$

$a_4 = 6 \quad \frac{6000}{3} = 2000; \ 6138.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)