МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2a+4b)+\sin 2a = \frac{-8}{17}$.

$\sin(2a+4b)+\sin 2a = 2\sin\frac{2a+4b+2a}{2}\cos\frac{2a+4b-2a}{2} =$

$2\sin(2a+2b)\cos 2b = \frac{-8}{17} \Rightarrow \cos 2b = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$\Rightarrow \sin 2b = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ (возможные значения)

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2a\cos 2b + \sin 2b\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Два случая:

$\sin 2a\,\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 4\sin 2a + \cos 2a = -1$

$\sin 2a\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2a = \frac{-1}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow 4\sin 2a - \cos 2a = -1$.

1(й) $4\sin 2a + \cos 2a = -1$.

$8\sin a\cos a + \cos^2 a - \sin^2 a = -\sin^2 a - \cos^2 a$

$8\sin a\cos a = -2\cos^2 a$

при $\cos a = 0$, $tg\,a$ не существует $\Rightarrow$ один вариант

$8\sin a = -2\cos a \Rightarrow tg\,a = \frac{-1}{4}$.

2 случай:

$4\sin 2a - \cos 2a = -1.$

$\Updownarrow$

$8\sin a\cos a - (\cos^2 a - \sin^2 a) = -\sin^2 a - \cos^2 a.$

$\Updownarrow$

$8\sin a\cos a = -2\sin^2 a$

Если $\sin a = 0$, то $tg\, a = 0$.

если $\sin a \neq 0$.

$8\cos a = -2\sin a$

$\Downarrow$

$tg\, a = -2$.

Т.к значений не меньше 3, то все три случая реализуются.

Ответ: $-\frac{1}{4}$, 0, −2.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}. \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} (3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2. \quad 1 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \quad 2 \\ \cancel{3xy-2x-3y+2}\;3y-2x \geq 0 \end{cases}$$

Решим 1, как квадратное уравнение относительно y.

1 $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2.$

$\Updownarrow$

$9y^2-15xy+3y+4x^2+2x-2=0$

$D=(9x-9)^2$

$$y_{1,2}=\frac{15x-3\pm|9x-9|}{18}=\frac{15x-3\pm(9x-9)}{18}=\left[\begin{array}{l} 1\frac{1}{3}x-\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Подставим полученные значения в 2.

$3x^2+3\left(1\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2-6x-4\left(1\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)=4$

$\Updownarrow$

$3x^2+3\left(\frac{16}{9}x^2-\frac{16}{9}x+\frac{4}{9}\right)-6x-\frac{16}{3}x+\frac{8}{3}=4$

$x^2\left(3+\frac{16}{3}\right)-\frac{16}{3}x+\frac{4}{3}-6x-\frac{16}{3}x+\frac{8}{3}=4$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$x^2\left(3+\frac{16}{3}\right)-2\overset{\left(\frac{3^2+6}{3}\right)}{\cancel{[illegible]}}x=0.$

$\Updownarrow$

$x\left(x\left(3+\frac{16}{3}\right)-\overset{\left(\frac{3^2+6}{3}\right)}{\cancel{[illegible]}}\right)=0$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} x=0. \\ x=\overset{2}{\cancel{[illegible]}}\cdot 2 \end{array}\right. \Rightarrow$ $x=0,\ y=-\frac{2}{3}$ – не подходит, т.к. $3\left(-\frac{2}{3}\right)<0$ ~~3y−2x~~

$x=\overset{2}{\cancel{[illegible]}},\ y=\overset{2}{\cancel{[illegible]}}.$ – подходит, т.к. $3y-2x\geq 0.$

Подставляя $y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$ получаем:

$3x^2+3\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)^2-6x-4\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\right)=4$

$\Updownarrow$

$3x^2+3\left(\frac{1}{9}x^2+\frac{2}{9}x+\frac{1}{9}\right)-6x-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=4$

$3x^2+\frac{3}{9}x^2+\frac{6}{9}x+\frac{3}{9}-6x-\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}=4$

$\Updownarrow$

$x^2\left(3+\frac{1}{3}\right)-x\left(6+\frac{2}{3}\right)-5=0.$

$\frac{10}{3}x^2-\frac{20}{3}x-5=0.$

$\Updownarrow$

$x=\left[\begin{array}{l} 1+\frac{1}{2}\sqrt{10} \\ 1-\frac{1}{2}\sqrt{10}. \end{array}\right. \Rightarrow$ $x=1+\frac{1}{2}\sqrt{10},\ y=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{10}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\sqrt{10}.$

не подходит, т.к. $3y-2x<0$

$x=1-\frac{1}{2}\sqrt{10},\ y=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\sqrt{10}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\sqrt{10}.$

подходит, т.к. $3y-2x\geq 0$

Ответ: $(2;2)$; $\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{10};\ \frac{2}{3}-\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (4^{\log_4 3})^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2 \\ x^2+6x>0 \text{ (т.к под логарифмом).} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (x^2+6x)^{\log_4 3}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2 \\ x^2+6x>0. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} (x^2+6x)^{\log_4 3}-(x^2+6x)^{\log_4 5} \geq -(x^2+6x). \\ x^2+6x>0 \end{cases}$$

$x^2+6x=t$

$$\begin{cases} t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3} \leq t. \\ t>0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \cancel{t^{\log_4 5}-t^{\log_4 4}-t^{\log_4 3} \leq 0.} \\ \cancel{t>0.} \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} 5^{\log_4 t}-3^{\log_4 t} \leq 4^{\log_4 t} \\ t>0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 5^{\log_4 t} \leq 4^{\log_4 t}+3^{\log_4 t} \\ t>0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 \le \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} \\ t > 0. \end{cases}$$

справа сумма монотонно убывающих функций, слева константа, а при $t = 16$ достигается равенство

$\Downarrow$

$t \in [0; 16]$ — решение неравенства.

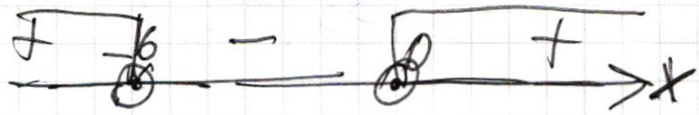
$$0 < x^2 + 6x \le 16$$

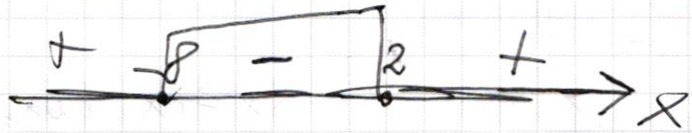
$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x(x+6) > 0 \\ x^2 + 6x - 16 \le 0. \end{cases}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x(x+6) > 0. \\ (x+8)(x-2) \le 0. \end{cases}$$



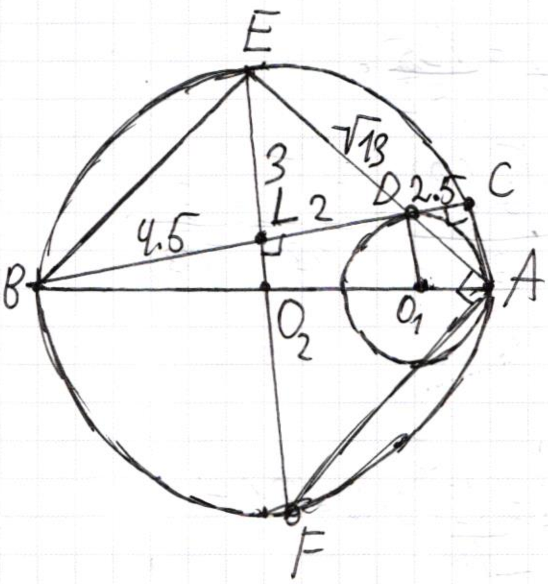


$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-8; 2]. \end{cases}$$

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



N4.

Решение: Т.к окружности Ω и w – касаются, то гомотетия с центром в точке касания ~~перевод~~ с коэффициентом $\frac{EA}{DA}$ переводит w в Ω. D переходит в E, O_1 переходит в O_2 $\Rightarrow$ DO_1 перешло в EO_2 $\Rightarrow$ $DO_1 \parallel EO_2$, но BC – касательная к w, значит $DO_1 \perp BC \Rightarrow EO_2 \perp BC \Rightarrow$ O_2 – лежит на EF

$\angle BCA = 90°$, т.к опирается на диаметр окружности Ω. $\Rightarrow LO_2$ – средняя линия $\triangle BCA \Rightarrow BL = LC = 4{,}5 \Rightarrow LD = 2$, $DC = 2{,}5 \Rightarrow$ т.к $\triangle ELD \sim \triangle ACD$, $\frac{ED}{DA} = \frac{2}{2{,}5} = \frac{4}{5}$.

Но также $ED \cdot DA = BD \cdot DC = \frac{65}{4}$

$\Rightarrow \frac{4}{5} DA^2 = \frac{65}{4} \Rightarrow DA = \sqrt{13} \cdot \frac{5}{4}$, $ED = \sqrt{13}$

$\angle ELD = 90^0 \Rightarrow EL^2 = ED^2 - LD^2 = 9 \Rightarrow EL = 3$

$EL \cdot LF = BL \cdot LC \Rightarrow \frac{81}{4} = 3 \cdot LF \Rightarrow LF = \frac{27}{4}$.

$\Rightarrow EF = \frac{27}{4} + 3 = \frac{39}{4} \Rightarrow R_\Omega = \frac{39}{8}$.

$\frac{R_\Omega}{R_W} = \frac{AE}{AD} = \frac{4,5}{2,5} = \frac{9}{5} \Rightarrow R_W = \frac{5}{9} \cdot \frac{39}{8} = \frac{195}{72}$.

$\sin \angle AFE = \frac{EA}{EF} = \frac{\sqrt{13}\left(1 + \frac{5}{4}\right)}{\frac{39}{4}} = \frac{\sqrt{13}\left(\frac{9}{4}\right)}{\frac{39}{4}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

$\Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.

$AF^2 = EF^2 - EA^2 = \frac{9 \cdot 13^2}{16} - 13 \cdot \frac{81}{16} = \frac{13}{16}(9 \cdot 13 - 81) =$

$\frac{13}{16}(36) \Rightarrow AF = \frac{\sqrt{13}}{4} \cdot 6 = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$S(AFE) = \frac{EA \cdot AF}{2} = \frac{\sqrt{13}\left(\frac{9}{4}\right) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13}}{2} = 13 \cdot \frac{27}{16}$.

Ответ: $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$, $S(AFE) = \frac{13}{16} \cdot 27$,

$R_\Omega = \frac{39}{8}$, $R_W = \frac{195}{72}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5.

Очевидно, что $f(1)=0$, т.к $f(a\cdot 1)=f(1)+f(a) \Rightarrow f(1)=0$

Тогда $f(\frac{1}{y})=-f(y)$, т.к $f(\frac{1}{y})+f(y)=f(1)=0$.

Если $f(\frac{x}{y})<0$, то $f(x)+f(\frac{1}{y})<0 \Leftrightarrow f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow$ $f(x)<f(y)$. Т.к множества, на которых мы выбираем x и y одинаковые, то если $f(x)\neq f(y)$ нам подойдет либо пара (x,y), либо (y,x). Найдем пары $x\neq y$ такие что $f(x)=f(y)$. ($f(\frac{x}{x})=f(1)=0$ - не подходит).

$f(p)=[\frac{p}{4}] \Rightarrow f(2)=0, f(3)=0, f(5)=1, f(7)=1, f(11)=2,$ $f(13)=3, f(17)=4, f(19)=4, f(23)=5.$

Рассмотрим все $3\leq n\leq 27$, что $f(n)=0$.

$n=p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n} \Rightarrow f(n)=p_1\alpha_1+\cdots p_n\alpha_n=0 \Rightarrow$ $n=2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}$, т.к для других p $f(p)>0$.

От 3 до 27 таких чисел - (3, 4, 6, 9, 12, 16, 24, 18, 8) ~~- девять~~ пт. сито.

Рассмотрим $3\leq n\leq 27$, что $f(n)=1$.

Такие числа должны иметь вид $n=5\cdot 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}$ или $n=7\cdot 2^{\alpha_1}\cdot 3^{\alpha_2}$. Таких чисел - (5, 10, 15, 20, 7, 14, 21) - семь.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Рассмотрим $3 \le n \le 27$, что $f(n)=2$.
Такие числа должны иметь вид $5^2 \cdot 2^{d_1} \cdot 3^{d_2}$, $5 \cdot 7 \cdot 2^{d_1} \cdot 3^{d_2}$, $7^2 \cdot 2^{d_1} \cdot 3^{d_2}$, $11 \cdot 2^{d_1} \cdot 3^{d_2}$.
Таких чисел – (25, 11, 22) – три.

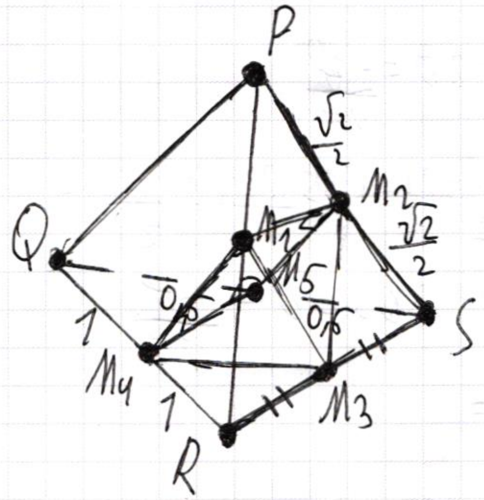
Рассмотрим $3 \le n \le 27$, что $f(n)=3$.
Несложно заметить, что произведение простых чисел, для которых $f(n) \ge 1$, ≥ 35, $\Rightarrow$ нам подходят 13 и 26.
исключение – 5·5, но $f(25)=2$
– два числа.
Тогда $3 \le n \le 27$, что $f(n)=4$ – два – (17, 19),

а таких, что $f(n)=5$ – одно (23).
Таким образом все числа от 3 до 27 разбиты по 5 групп с равными $f(n)$ (внутри каждой группы).
Итого кол-во искомых пар – $C_{25}^2 - C_{10}^2 - C_7^2 - C_3^2 - C_2^2 - C_2^2 - C_1^2 = \frac{25 \cdot 24}{2} - \frac{10 \cdot 9}{2} - \frac{7 \cdot 6}{2} - 3 - 1 - 1 =$
$25 \cdot 12 - 45 - 21 - 5 = 300 - 71 = 229$.
Ответ: 229.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7.



Решение: $M_1M_2 = \frac{RS}{2} = M_4M_5$,

$M_1M_2 \parallel M_4M_5 \parallel RS$ (т.к M_1M_2, M_4M_5 - средние линии), но $M_1M_2M_4M_5$ - лежат на одной сфере, а т.к они ещё и лежат в одной плоскости, то $M_1M_2M_4M_5$ - вписан $\Rightarrow M_1M_2M_5M_4$ - прямоугольник.

$\sin(2a+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2a+4\beta)+\sin 2a = \frac{-8}{17}$

$\sin 2a \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2a = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin 2a \cos 4\beta + \sin 2\beta \cos 4a} + \sin 2a = \frac{-8}{17}$

$\sin(2a+4\beta)+\sin 2a = 2\sin\frac{2a+4\beta+2a}{2}\cos\frac{2a+4\beta-2a}{2} =$

$2\sin(2a+2\beta)\cos 2\beta = \frac{-8}{17}$

$\cos 2\beta =$

$\frac{2}{-\sqrt{17}}\cos 2\beta = \frac{-8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sqrt{2-\sqrt{10}-\frac{1}{2}\sqrt{10}+\frac{1}{4}\cdot 10-}$

$2+\sqrt{10}-2+\frac{1}{2}\sqrt{10}+2$

$\frac{1}{2}\sqrt{10}$

$6,5$

$10\sqrt{2}$

$\sin(2a+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2a \cos 2\beta + \cos 2a \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2a \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2a \frac{1}{\sqrt{17}} = -1$

$3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\sqrt{10}\right) - 2\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{10}\right) =$

$\frac{10}{4}$ $\sqrt{\frac{10}{4}}$ $\frac{\sqrt{10}}{2}$

$2-\frac{1}{2}\sqrt{10}-2+\sqrt{10} = \frac{1}{2}\sqrt{10}$

$\sqrt{3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)-2\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{10}\right)-3\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\sqrt{10}\right)+2}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log_4 5} \geq -t.$

N6.

$t^{\log_4 3}(1 - t^{\frac{1}{2}}) \geq -t.$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30.$

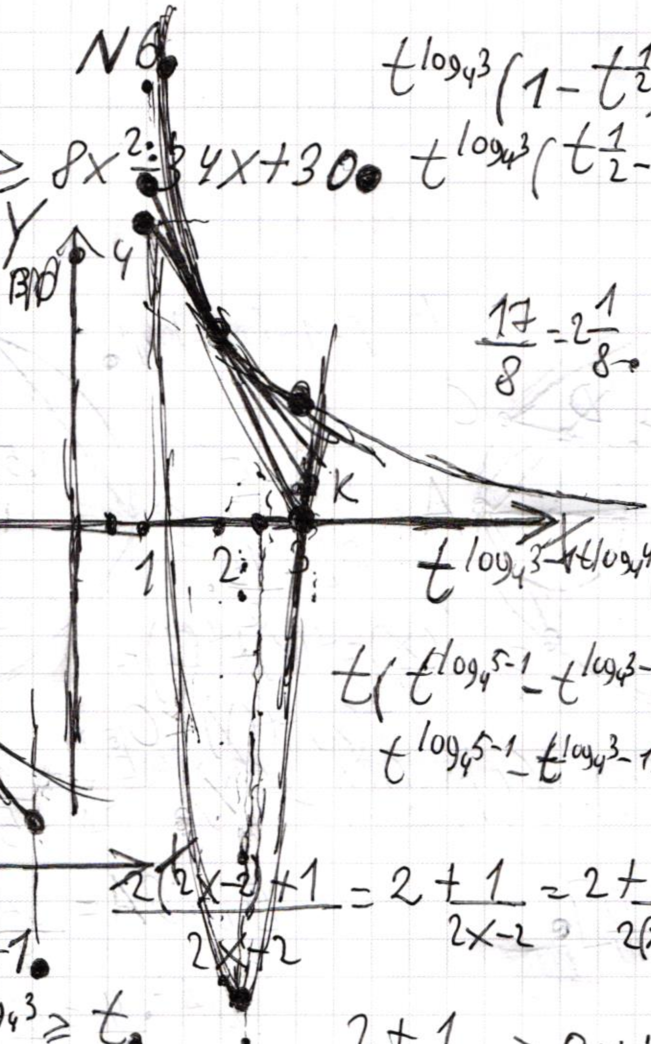
$t^{\log_4 3}(t^{\frac{1}{2}} - 1) \geq t.$

$t^{\log_4 3}(1 - t^{\log_4 5 - \log_4 3}) \geq -t.$

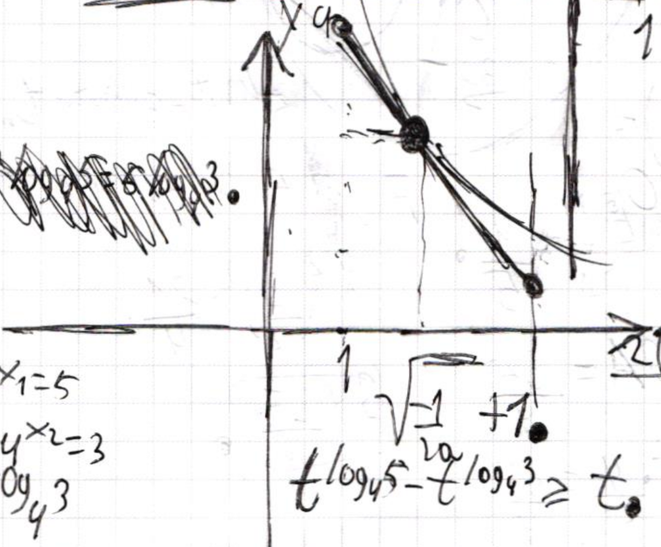
$t^{\log_4 3}(1 - t^{\log_4 2}) \geq -t$

$\frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}.$

$(9^a)^b = (9^b)^a.$



$t^{\log_4 3 - 1}t^{\log_4 4}(t^{\frac{1}{2}} - 1) \geq 1.$



$t(t^{\log_4 5 - 1} - t^{\log_4 3 - 1} - 1) \geq 0$

$t^{\log_4 5 - 1} - t^{\log_4 3 - 1} - 1 \geq 0.$

$\frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$4^{x_1} = 5$

$4^{x_2} = 3$

$\log_4 3$

$\sqrt{\frac{-1}{2a}} + 1.$

$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} \geq t.$

$2 + \frac{1}{2(x-1)} \geq ax+b.$

$\log_4 ?$

$8x^2 - 34x + 30 \leq ax+b.$

$2 + \frac{1}{2x-2} = ax+b.$

$8x^2 - 34x + 30 - ax - b \leq 0.$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x$

$8x^2 - x(34+a) + 30 - b \leq 0$

$\boxed{a}.$

$\geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$\sqrt{(34+a)^2 - 32(30-b)}$

$\left(\frac{1}{2x-2}\right)' = \left(\frac{1}{2(x-1)}\right)' =$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq -x^2 - 6x$

$\frac{34+a \pm \sqrt{(34+a)^2 - 960 + 32b}}{16}.$

$4^{\log_4 t}$

$34 + a + \sqrt{(34+a)^2 - 960 + 32b} \geq 48.$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)' =$

$t + t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5}.$

$1 + \log_4 3\, t^{\log_4 3 - 1} \geq \log_4 5\, t^{\log_4 5 - 1}.$

$\sqrt{(34+a)^2 - 960 + 32b} \geq 14 - a.$

$\frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right) =$

$\sqrt{\frac{-1}{2a}} + 1 = x.$

$\frac{-1}{2(x-1)^2} = a.$

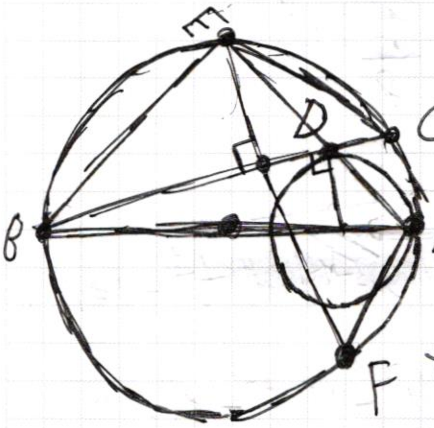
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

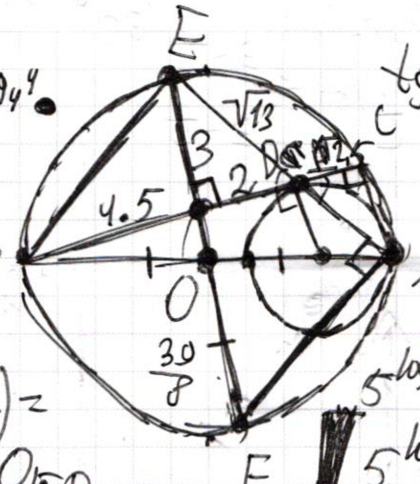
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\log_4 5 - 1 = \log_4 5 - \log_4 4$

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$



$tg a = \frac{\sin a}{\cos a}$

$5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t} \le t$

$5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t} \le 4^{\log_4}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$. $f(y) > f(x)$.

$\frac{ED}{DA} = \frac{4}{5}$.

$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{81}{4}$.

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$ED \cdot DA = \frac{65}{4}$

$\boxed{3 + \frac{27}{4}}$.

$f(1) = 0$. $f(x) = f(y)$.

$DA^2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{65}{4}$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

$DA^2 = \frac{25 \cdot 13}{16} \Rightarrow DA = \sqrt{13} \cdot \frac{5}{4}$.

$4^{\log_4 t}$

$f(2^n \cdot 3^k) = 0$.

$ED = \sqrt{13}$.

$\frac{39}{4}$ - ди

~~$f(1) = f(1) \cdot f(n)$~~

$\frac{p_1 \cdot p_2}{p_3 \cdot p_4}$

$f(25) = f(11)$

$\frac{39}{8}$ - радиус

$5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t} \le t$. n

$q < 1$.

$f(q) < 0$.

$f\left(\frac{p_1 \cdot p_2}{p_3 \cdot p_4}\right) = f(p_1 \cdot p_2) + f\left(\frac{1}{p_3 \cdot p_4}\right)$

$\frac{117}{-81}$
36

$f(p_1 \cdot p_2) - f(p_3 \cdot p_4) = f(x) - f(y)$.

~~$f(q) \cdot f(1) \; 1$~~ q

$q > 1$.

~~$f(2^n) = 1$~~.

$f(q) > 0$.

$f(2) = 0$.

$f(3) = 0$.

$f(5) = 1$.

$f(7) = 1$.

$f(11) = 2$.

$f(13) = 3$.

$f(17) = 4$.

$f(19) = 4$.

$f(23) = 5$.

$f(2) = f(3)$

$f(11) = f(13)$

$f(5) = f(7)$

$f(17) = f(19)$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2a+4b)+\sin 2a = -\frac{8}{17}$.

$\cancel{\sin(2a+4b) = \sin((2a+2b)+2b) = \sin(2a+2b)\cos(2b)+\cos(2a+2b)\sin(2b)}$

$\cancel{+\sin(2a) = -\frac{8}{17}}$.

x^2

$\frac{10\sqrt{10}}{3}$

$\sin(2(a+b)) = 2\sin(a+b)\cos(a+b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

$\sin(2(a+2b)) = 2\sin(a+2b)\cos(a+2b)$ $\frac{400}{9}+\frac{200}{3}=$

$2\sin(a+2b)\cos(a+2b)+2\sin(a)\cos(a) = -\frac{8}{17}$ $\frac{1000}{9}$

$\sin(a+2b)\cos(a+2b)+\sin(a)\cos(a) = -\frac{4}{17}$ $\frac{8}{3}$

$(\sin a\cos 2b+\cos a\sin 2b)(\cos a\cos 2b-\sin a\sin 2b) =$ $2\cdot\frac{4}{3}$

$\sin a\cos a(\cos 2b)^2 - \sin^2 a\cos 2b\sin 2b+\cos^2 a\sin 2b\cos 2b+\cos a$

$\frac{328}{50}$

N2. $3x^2+3$

$\frac{82}{25}\cdot\frac{4}{3}$ $\frac{278}{3}$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

$(3y-2x)^2 = 3xy-2x-3y+2$ $\frac{328}{75}-\frac{2}{3}$ $\frac{278}{75}$

$\cancel{9y^2-12xy+4x^2} = -2x-3y+2+3xy$

$\cancel{9y^2-15xy+4x^2}+2x+3y-2=0$.

$3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2-3$.

$\cancel{3(x-1)^2+3y^2-4y=7}$

$\cancel{3(x-1)^2+3y^2-4y-7=0}$

$3(x-1)^2+3(y+1)(y-\frac{7}{3})=0$.

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$\frac{82}{3} = \frac{25}{3}x$ $\frac{\frac{20}{3}\pm\frac{10\sqrt{10}}{3}}{\frac{20}{3}}$

$x=\frac{82}{25}$ $\frac{20\pm 10\sqrt{10}}{20}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$2(3y-2x)^2=6xy-4x-6y+4$$

$$3x^2+3y^2-6x-4y+(6xy-4x-6y+4)=4+2(3y-2x)^2$$

$$3x^2+3y^2-10x-10y+6xy=2(3y-2x)^2$$

$$3(x+y)^2-10(x+y)=2(3y-2x)^2$$

$$\cancel{3(x+y)(3(x+y)-10)=2(3y-2x)^2}$$

$$3(x+y)^2-10(x+y)-2(3y-2x)^2=0$$

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}\\3x^2+3y^2-6x-4y=4\end{cases}$$

$$3x^2-6x+(3y^2-4y-4)=0$$

$$D=36-12(3y^2-4y-4)=$$

$$36-36y^2+48y+48=$$

$$-36y^2+48y+84=$$

$$-12(3y^2-4y-7)=$$

$$-12\left(3(y+1)\left(y-\frac{7}{3}\right)\right)$$

$$\left\{1;\frac{7}{3}\right\}$$

$$\begin{cases}y=1\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\\y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\\y=\frac{15x-3\pm(9x-9)}{18}\end{cases}$$

$$225-144=81$$

$$(3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2$$

$$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$$

$$(9x-9)^2$$

$$9y^2-15xy+3y+4x^2+2x-2=0$$

$$9y^2-y(15x-3)+4x^2+2x-2=0$$

$$D=(15x-3)^2-36(4x^2+2x-2)=$$

$$225x^2-90x+9-144x^2-72x+72=$$

$$81x^2-162x+81=$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)