МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$tg\alpha$ – ?, $tg\alpha \in R$, миним. $tg\alpha$ имеет 3 разных знач.

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Тогда $\cos^2(2\alpha+2\beta) = 1-\sin^2(2\alpha+2\beta) = 1-\frac{1}{17} =$
$= \frac{16}{17} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

Тогда $\sin(4\alpha+4\beta) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta) =$
~~$= 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$~~

$$\left[\begin{aligned} &\sin(4\alpha+4\beta) = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17} \\ &\sin(4\alpha+4\beta) = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = \frac{8}{17} \end{aligned}\right.$$

2) $\cos(4\alpha+4\beta) = 1-2\sin^2(2\alpha+2\beta) = 1-2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2 =$
$= \frac{15}{17}$

3) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(4\alpha+4\beta-2\alpha)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha - \sin(2\alpha)\cdot\cos(4\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$$\left[\begin{aligned} &-\frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \\ &\frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 4 \quad (1) \\ &4\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = -4 \quad (2) \end{aligned}\right.$$

(1): $4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 4$.

$4\cos^2 \alpha - 4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 4 \quad |: \cos^2\alpha \neq 0$ т.к. $tg\alpha$ определён.

~~Если~~

$4 - 4tg^2\alpha + 2tg\alpha = \frac{4}{\cos^2\alpha}$

С учётом $\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$:

$4 - 4tg^2\alpha + 2tg\alpha = 4(tg^2\alpha + 1)$

$8tg^2\alpha - 2tg\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

(2): $4\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = -4$

$4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = -4 \quad |: \cos^2\alpha \neq 0$ т.к. $tg\alpha$ определён

$4 - 4tg^2\alpha - 2tg\alpha = -\frac{4}{\cos^2\alpha}$

С учётом $\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha + 1$:

$4 - 4tg^2\alpha - 2tg\alpha = -4(tg^2\alpha + 1)$

$2tg\alpha = 8$

$tg\alpha = 4$

4) ~~Ответ~~ Тогда $tg\alpha = 0$, $tg\alpha = \frac{1}{4}$, $tg\alpha = 4$

Ответ: $tg\alpha = 0$, $tg\alpha = \frac{1}{4}$, $tg\alpha = 4$

№2

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ \cancel{3(x-1)^2 + 3y^2 - 4y = 7} \\ 3(x^2 - 2x + 1) + 3y^2 - 4y - 7 = 0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3(x-1)^2+(y+1)(3y-7)=0 \end{cases}$$

Пусть $3y-2=a$, $x-1=b$.

Тогда $3y-2x=3y-2-2(x-1)=a-2b$,

$y+1=\frac{3y-2+5}{3}=\frac{a+5}{3}$

$3y-7=3y-2-5=a-5$

Тогда сист. примет вид:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 3b^2+\frac{a+5}{3}\cdot(a-5)=0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a-2b\geq 0 \\ 9b^2+a^2-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a-2b\geq 0 \\ 9b^2+a^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)(a-4b)=0 \\ a-2b\geq 0 \\ 9b^2+a^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a-2b\geq 0 \\ 9b^2+a^2=25 \end{cases}$$

Если $a=b$, то ~~$9b^2+a^2=25$, $9b^2+b^2=25$~~

$a-2b=\sqrt{ab}$, $\Rightarrow a-2a=\sqrt{a^2} \Rightarrow -a=|a|$, т.е.

$a<0$, $\Rightarrow b<0$.

Тогда, подставляя в $9b^2+a^2=25$, получим:

$9b^2+b^2=25$, $b^2=2{,}5$, $b=\pm\sqrt{2{,}5}$, т.к. $b<0$ ($\Rightarrow a<0$),

то $a=b=-\sqrt{2{,}5}$

Тогда $\begin{cases} x-1=-\sqrt{2,5} \Rightarrow x=1-\sqrt{2,5} \\ 3y-2=-\sqrt{2,5} \Rightarrow y=\frac{2-\sqrt{2,5}}{3} \end{cases}$

Если $a=4b$:

Тогда из ОДЗ $a-2b\geq 0$: $4b-2b\geq 0$, $b\geq 0$

Подставляя в $9b^2+a^2=25$, получим:

$9b^2+16b^2=25$

$b^2=1$, $b=\pm 1$, $b=1$, т.к. $b\geq 0$.

~~$b=\pm 1$~~

Тогда $a=4b=4$.

Тогда $\begin{cases} x-1=1 \Rightarrow x=2 \\ 3y-2=4 \Rightarrow y=2. \end{cases}$

Ответ: $\left(1-\sqrt{2,5};\ \frac{2-\sqrt{2,5}}{3}\right)$; $(2;2)$

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x)\geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$. (1)

$x^2+6x=t$, $t>0$ (т.к. из $\log_4(x^2+6x)$ следует, что $x^2+6x>0$, $t>0$)

Тогда (1) $\Leftrightarrow 3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5} \Leftrightarrow$

$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}\geq 4^{\log_4\left(t^{\log_4 5}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}\geq 4^{(\log_4 5\cdot\log_4 t)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}\geq 4^{\log_4\left(5^{\log_4 t}\right)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}\geq 5^{\log_4 t}\ \Big|:5^{\log_4 t}>0$ всегда.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t} \geq 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{y}$ – убыв. ф-ция.

~~а~~ $\log_4 t$ – возраст. ф-ция.

Тогда $\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t}$ – убыв ф-ция

Аналогично $\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t}$ – убыв ф-ция

тогда $\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t}$ – убыв. ф-ция

тогда решим ур-е

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t} = 1 \quad (2)$

т.к. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t}$ – убыв ф-ция, то (2) имеет не более 1 корня.

$t = 4$ Подходит.

Т.к $g(t) = \left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t}$ – убыв ф-ция и $g(4) = 1$, то нер-во $g(t) \geq 1$ выполняется при $t \leq 4$

Тогда $\begin{cases} t > 0 \\ t \leq 4 \\ t = x^2 + 6x \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 + 6x > 0 \\ x^2 + 6x \leq 4 \end{cases}$

$$\begin{cases} x(x+6) > 0 \\ x^2+6x-4 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{-6<x<0} \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right. \\ x^2+6x-4 \leq 0 \ (3) \end{cases}$$

(3): $x^2+6x-4 \leq 0$.

$D = 36-4\cdot(-4) = 52$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{52}}{2}$, $x_1 = -3+\sqrt{13}$, $x_2 = -3-\sqrt{13}$

Тогда ~~$x\in(-\infty;$~~ $x^2+6x-4 \leq 0$

$(x-(-3+\sqrt{13}))(x-(-3-\sqrt{13})) \geq 0.$

$-3-\sqrt{13}$ $\quad -3+\sqrt{13}$ $\quad x$

$[-3-\sqrt{13}; -3+\sqrt{13}]$

~~$x\in(-\infty; -3-\sqrt{13}] \cup [-3+\sqrt{13}; \infty)$~~.

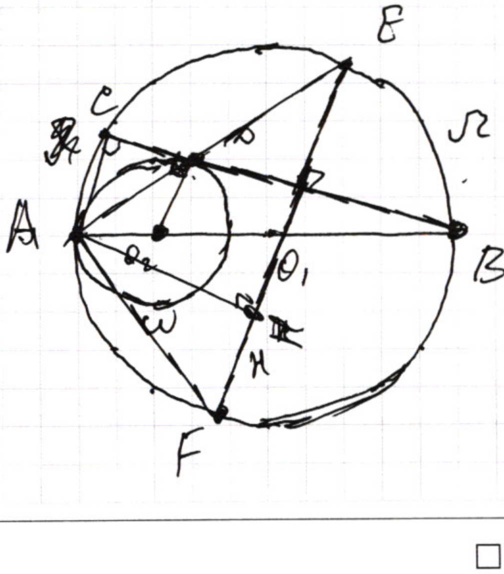
Тогда из $\begin{cases} x\in(-\infty;-6)\cup(0;\infty) \ \cancel{-6<x<0} \\ x\in [-3-\sqrt{13}; -3+\sqrt{13}] \ \cancel{(-\infty; -3-\sqrt{13}] \cup [-3+\sqrt{13}; \infty)} \end{cases}$

и учитывая, что $-3-\sqrt{13} < -3-3 = -6$, $-3+\sqrt{13} >$
$> -3+3 = 0$, получим:

~~$x\in(-\infty;-6$~~ $x\in[-3-\sqrt{13}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{13}]$.

Ответ: $x\in[-3-\sqrt{13}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{13}]$

№ 4



Дано: $\Omega \cap \omega = A$

$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$

~~Найти:~~ AB - диаметр Ω

Найти: R, r, где R - радиус Ω, r - радиус ω

$\angle AFE = ?$, $S_{AFE} = ?$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\angle ACB$ - впис в Ω; $\angle ACB$ опир на диам AB $\Rightarrow$ $\angle ACB = 90^\circ$, $AC \perp BC$

~~2) $EF \perp BC$, $EF \cap BC = M$. Тогда $\angle BMF = 90^\circ$.~~
~~3) $\angle ACB = 90^\circ$, $\angle BMF = 90^\circ$. Тогда $AC \parallel$~~

2) O_2 - центр ω; BD - кас к ω $\Rightarrow$ $O_2D \perp BD$

3) $AC \perp BC$; $O_2D \perp BC$ $\Rightarrow$ $AC \parallel O_2D$

Тогда $\angle CAB = \angle DO_2B$ (как соотв при пар. AC и O_2D).

Тогда $\triangle ACB \sim \triangle O_2DB$ ($\angle ACB = \angle O_2DB = 90$, $\angle CAB = \angle DO_2B$) $\Rightarrow$ $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA}$

$$\frac{BD}{BA+BC} = \frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}} = \frac{13}{18}$$

$$36R - 18r = 26R$$

$$\frac{r}{R} = \frac{5}{9},\ r = \frac{5}{9}R$$

4) AB — секущ. к ω; BD — кас к ω; $AB \cap BD = B$ $\Rightarrow$ $BD^2 = BN \cdot AB$, где $N = BA \cap \omega$, и $N \neq A$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда $BD^2 = \cancel{2R\cdot(2R-2r)}\ AB\cdot(AB-AN) =$

$= 2R\cdot(2R-2r)$.

Тогда с учётом $r = \frac{5}{9}R$:

$BD^2 = 4R\cdot\frac{4}{9}R = \frac{16}{9}R^2$

$R^2 = \frac{9BD^2}{16}$, $R = \frac{3\cdot BD}{4} = \frac{3\cdot\frac{13}{2}}{4} = \frac{39}{8}$

Тогда $r = \frac{5}{9}\cdot R = \frac{5}{9}\cdot\frac{39}{8} = \frac{65}{24}$

5) $\triangle ABC$ – пр/уг

$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - (CD+BD)^2} =$

$= \sqrt{4\cdot\frac{39^2}{8^2} - 9^2} = \sqrt{\frac{39^2 - 4^2\cdot 9^2}{4^2}} = \cancel{(39-36)(39+}$

$= \frac{15}{4}$

~~6) $\sin\angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{\frac{15}{4}}{2\cdot\frac{39}{8}} = \frac{15}{39}$~~

~~По т. синусов в $\triangle ABC$:~~

~~$\cancel{\frac{AC}{\sin A}}$ $\frac{AC}{\sin\angle ABC} = 2R$.~~

~~По т. синусов в $\triangle$~~

$\triangle ACD$ – пр/уг

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{4}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5}{4}\sqrt{13}$

7) AE – хорда Ω

BC – хорда Ω $\Rightarrow AD\cdot DE = CD\cdot BD$.

$AE \cap BC = D$

$\frac{5}{4}\sqrt{13}\cdot DE = \frac{5}{2}\cdot\frac{13}{2} \Rightarrow DE = \sqrt{13}$

Тогда $AE = AD + DE = \frac{9}{4}\sqrt{13}$

8) По т. синусов в $\triangle AFE$:

$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R$, $\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{13}}{2\cdot\frac{39}{8}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9) $\triangle ACD$ - пр/уг.

$\sin\angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{15}{4}} = \frac{2}{3}$

10) $\angle CAD = \angle AEF$ (как накрестлежащие при пар. $AC \parallel FE$)

Тогда в $\triangle AFE$ по т. синусов

$\frac{AF}{\sin\angle AEF} = \frac{AE}{\sin\angle AFE}$

$AF = \frac{\sin\angle AEF}{\sin\angle AFE} \cdot AE = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{3\sqrt{13}}{13}} \cdot \frac{9}{4}\sqrt{13} =$

$= \frac{13}{2}$

11) ~~По~~ ~~Опуст.~~ $AH \perp FE$

Тогда ~~$S_{AFH} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot FH \cdot \sin\angle AFE$~~ $AH = AF \cdot \sin\angle AFE$

$= \frac{13}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

Тогда FH в пр/уг тр AFH будет

$FH = \sqrt{AF^2 - AH^2} = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{13}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{169 - 108}{4}} =$

$= \frac{\sqrt{61}}{2}$

Тогда $S_{AFH} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot FH = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{61}}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} = \frac{3\sqrt{793}}{8}$

12). $\angle FAE = 180 - \angle AFE - \angle AEF$

Тогда $\sin\angle FAE = \sin(\angle AFE + \angle AEF) =$

$= \sin\angle AFE \cdot \cos\angle AEF + \sin\angle AEF \cdot \sin\angle AFE$

т.к. $AF = \frac{13}{2}$, $AE = \frac{33}{4}$, то $AE > AF \Rightarrow \angle AEF < 90$. Аналоличио R $AE = \frac{9}{4}\sqrt{13}$, $AB = \frac{39}{4}$, $AB > AE$, $\angle AFE < 90$

Тогда $\cos\angle ABF = \sqrt{1-\sin^2\angle ABF} = \sqrt{1-\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

$\cos\angle AFE = \sqrt{1-\sin\angle AFE} = \sqrt{1-\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{130}}{13} = \sqrt{\frac{10}{13}}$

Тогда $\sin\angle FAE = \frac{3\sqrt{13}}{13}\cdot\frac{\sqrt{5}}{3} + \sqrt{\frac{10}{13}}\cdot\frac{2}{3} =$

$= \frac{\sqrt{65}}{13} + \frac{2\sqrt{130}}{39} = \frac{3\sqrt{65}+2\sqrt{130}}{39}$

Тогда $S_{FAE} = \frac{1}{2}\cdot\sin\angle FAE\cdot AE\cdot AF =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{3\sqrt{65}+2\sqrt{130}}{39}\cdot\frac{13}{2}\cdot\frac{9}{4}\sqrt{13} =$

$= \frac{3}{16}\cdot(3\cdot13\sqrt{5}+2\cdot13\sqrt{10}) = \frac{108\sqrt{5}+78\sqrt{10}}{16}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$, $r = \frac{65}{24}$, ~~$\sin\angle AFE = \frac{3\sqrt{13}}{13}$~~

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$, $S_{AFE} = \frac{108\sqrt{5}+78\sqrt{10}}{16}$

№5

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(p) = \left\{\frac{p}{4}\right\}$

$x, y \in N$

$x \in [3; 27]$, $y \in [3; 27]$.

Найти кол-во (x, y), $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

1) $f(ab) = f(a)+f(b)$

Тогда $f(a) = f(ab) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

Тогда $f(b) = -f\left(\frac{1}{b}\right)$

2) Пусть n - целое число

тогда $n = p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$, где p_i - прост. дел. n.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда $f(n) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots + f(p_k^{\alpha_k}) =$

$= \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 \cdot f(p_2) + \ldots + \alpha_k f(p_k) = \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots + \alpha_k \left[\frac{p_k}{4}\right] \geq 0.$

~~тогда~~

~~3)~~ тогда $f\left(\frac{1}{n}\right) \leq 0$.

3) $x, y \in N$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

тогда $f(x) < -f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(x) < f(y)$

4) Используя 2 получим

$f(3) = 0$	$f(14) = 1$
$f(4) = 0$	$f(15) = 1$
$f(5) = 1$	$f(16) = 0$
$f(6) = 0$	$f(17) = 4$
$f(7) = 1$	$f(18) = 0$
$f(8) = 0$	$f(19) = 4$
$f(9) = 0$	$f(20) = 1$
$f(10) = 1$	$f(21) = 1$
$f(11) = 2$	$f(22) = 2$
$f(12) = 0$	$f(23) = 5$
$f(13) = 3$	$f(24) = 0$
	$f(25) = 2$
	$f(26) = 3$
	$f(27) = 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Тогда пусть $f(x)=0$.

Тогда x не может выбрать 10 способами, а y ~~для~~ $f(y)>f(x)=0$ тогда ~~y~~ y можно выбрать $25-10=15$ способами.

Тогда всего пар для $f(x)=0$, $15\cdot10=150$.

Аналогично: $f(x)=1 \Rightarrow x$ — 7 способов, тогда $y=8 \Rightarrow$ всего $7\cdot8=56$.

$f(x)=2 \Rightarrow x$ — 3 способа $\Rightarrow y$ - 5 способов.

Всего пар $3\cdot5=15$

$f(x)=3 \Rightarrow$ ~~3~~ x - 2 способа, y — 3 способа.

Всего 6.

$f(x)=4 \Rightarrow$ ~~y~~ x — 2 способа $\Rightarrow y$ - 1 способ

Всего 2 ~~спо~~

$f(x)=5$ — 1 способ, y — 0 способов.

Всего 0.

Тогда всего ~~сп~~ таких пар

$150+56+15+6+2+0=229$

№ 6.

$\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$.

$x\in(1;3]$ при любых x.

a,b — ?

1) $2+\frac{1}{2(x-1)}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$.

$h(x)=2+\frac{1}{2(x-1)}$, $f(x)=ax+b$, $g(x)=8x^2-34x+30$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $g(1) = 8\cdot 1 - 34\cdot 1 + 30 = 4$

$g(3) = 8\cdot 3^2 - 34\cdot 3 + 30 = 0$

~~3) $h'(x)$~~

~~тогда~~ $h(x) \geq f(x) \geq g(x)$

$f(1) \geq 4$

$f(3) \geq 0.$

3) $h'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

~~Тогда~~ ур-е касательной к графику $h(x)$:

$y = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}(x-x_0) + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}$

Пусть ~~какая-то~~ из ~~касательных~~ проходит через $(1;4)$:

$4 = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}(1-x_0) + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)}$

$\frac{1}{2(x_0-1)} + \frac{1}{2(x_0-1)} = 2$

$\frac{1}{x_0-1} = 2, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

~~тогда коэф. наклона к касательной будет~~

Проверим, проходит ли эта касательная через точку $(3;0)$:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$0 = -\frac{1}{2(\frac{3}{2}-1)^2}(3-\frac{3}{2}) + 2 + \frac{1}{2(\frac{3}{2}-1)} = -2 \cdot \frac{3}{2} + 3 = 0.$

Тождество верно, значит касательная в $h(x)$ проходит через $(1;4)$ и $(3;0)$.

Если ~~на~~ $g(x)$ будет совпадать с $y(x)$, то она будет удовлетворять условию задачи.

В этом случае $a = -\frac{1}{2(x_0-1)^2} = -2$ и

$b = -\frac{1}{2(x_0-1)^2} \cdot (x_0) + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} = -2 \cdot (-\frac{3}{2}) + 2 + 1 =$

$= 6$

Других a и b быть не может.

Пусть они есть. Тогда какая-то прямая $y_1(x) = a_1 x + b_1$ будет либо ниже, либо выше $y(x) = -2x + 6$ на отр. $[1;3]$.

Если она выше, то она пересекается с $h(x)$ в двух точках т.к. $y = -2x + 6$ — касательная к $h(x)$, если она ниже, то она принимает значение меньше 4 в т. с абсциссой 1 или меньше 0 в т. с абсциссой 3.

Значит других a и b быть не может.

~~Это~~ Ответ: $a = -2$; $b = 6$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница №14

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{1}{17}$.

$\cos(2\alpha+2\beta) = \left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

$\sin(4\alpha+4\beta) = -\frac{8}{17}$

$\sin(4\alpha+4\beta) = \frac{8}{17}$

$\sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos(4\alpha+4\beta)$

$+ \sin 2\alpha = -\frac{1}{17}$

$\cos(4\alpha+4\beta) = \cos^2(2\alpha+2\beta) - \sin^2(2\alpha+2\beta) =$

$= \frac{15}{17}$

$-\frac{8}{17}\cos 2\alpha + \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{1}{17}$

$-8\cos 2\alpha + 32\sin 2\alpha = -1$

$\frac{8}{17}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin(4\alpha+4\beta-2\alpha)+\sin 2\alpha =$

$= \sin(4\alpha+4\beta)\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cos(4\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha =$

$= -\frac{1}{17}$

2) $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(4\alpha+4\beta) = \mp\frac{8}{17}$

$\cos(4\alpha+4\beta) = 1-2\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{15}{17}$

3) $\left[\begin{array}{l} -\frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{1}{17} \\ \frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{1}{17} \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3(x-1)^2 + 3y^2 - 4y - 7 = 3(x-1)^2 + (y+1)(3y-7) = 0. \end{cases}$$

$3y-2=a$

$x-1=b$

$$\begin{cases} a \cancel{+} 2b = \sqrt{ab} \\ 3b^2 + \frac{(a+5)}{3}\cdot(a-5) = 0. \end{cases} \quad ab\geq 0$$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \Rightarrow a^2 - 5ab + 4b^2 = 0. \\ 9b^2 + a^2 - 25 = 0. \end{cases}$$

$(a-b)(a-4b)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b. \end{array}\right.$

$a=b$: $9b^2+b^2=25 \Rightarrow b = \pm\sqrt{2{,}5} = a - \varnothing$,

т.к. $a-2a \neq \sqrt{a^2}$

$a=4b$: $9b^2+16b^2=25$

$b=\pm 1 \Rightarrow a=\pm 4.$

$b=-1, a=-4$ $\varnothing$

$b=1, a=4$

$3y-2=4 \Rightarrow \underline{y=2}$

$x-1=1 \Rightarrow \underline{x=2}$

№ 3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$$

$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}, \quad t\geq 0.$$

$t^{\log_4 5} = x$

$\log_4 5 \cdot \log_4 t = \log_4 x$

$\log_4 5^{\log_4 t} = \log_4 x$

$5^{\log_4 t} = x.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

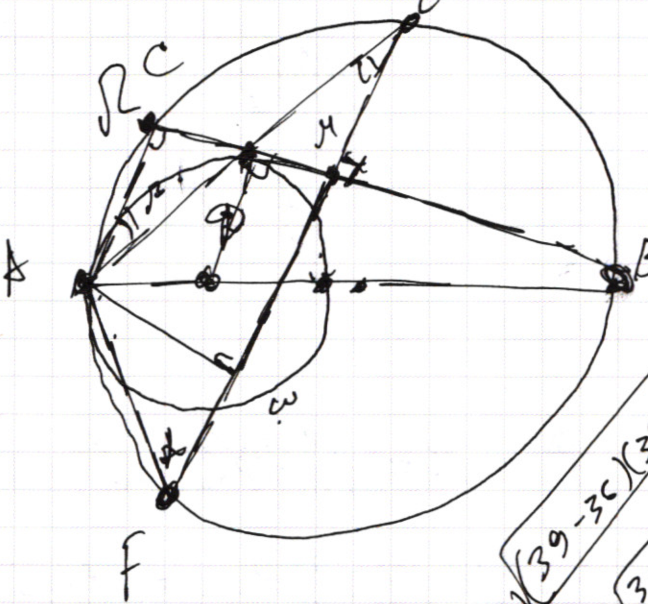
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



R, r, α, S_{AEF}

$CD = \frac{5}{2}, BD = \frac{13}{2}$

$AD \cdot AE = CD \cdot BD$

$\sqrt{(39-36)(39+36)} = \sqrt{\frac{3 \cdot 75}{4}} = \frac{15}{4}$

$2R \cdot (2R - 2r) = BD^2$

$\frac{BD}{BD+CD} = \frac{2R - r}{2R}$

$\frac{\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}+\frac{5}{2}} = 1 - \frac{r}{2R}$

$\frac{13}{9} = 2 - \frac{r}{R}$

$\frac{r}{R} = \frac{5}{9}$

$BD^2 = (2R-2r) \cdot 2R = 2R \cdot 2\left(R - \frac{5}{9}R\right) = 4R \cdot \frac{4}{9}R = \frac{13^2}{4}$

$R = \frac{3 \cdot 13}{8} = \frac{39}{8} \Rightarrow r = \frac{5}{9}R = \frac{65}{72}$

$AC = \sqrt{\frac{39^2}{2^2} - 9^2} = \sqrt{(39-18)(39+18)} = \sqrt{21 \cdot 57} = 3\sqrt{133}$

$AD = \sqrt{(3\sqrt{7} - 19)^2 + \frac{25}{4}} = \frac{39^2}{2^2} - 9^2 + \frac{5^2}{2^2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$, $x, y \in N$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

$f(2) = 0$, $f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$.

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$.

$f(17) = 4$ ~~$f(13) = f(26) + f(\frac{1}{2})$~~

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0$.

$\frac{1}{y} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{27}\right\}$

$x = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \dots p_n^{\alpha_n}$

$f(x) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \dots + f(p_n^{\alpha_n}) =$

$= \alpha_1 \cdot f(p_1) + \alpha_2 \cdot f(p_2) + \dots + \alpha_n f(p_n) =$

$= \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \dots + \alpha_n \left[\frac{p_n}{4}\right]$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(a) = f(ab) + f\left(\frac{1}{b}\right)$

$f(b) = -f\left(\frac{1}{b}\right)$ ≥ 0.

$f(b) \ge 0$

$f\left(\frac{1}{b}\right) \le 0$.

$f(x) \ge 0$

$f\left(\frac{1}{x}\right) \le 0$, $x \in Z$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$.

≥ 0 $\quad \le 0$.

$\left|f\left(\frac{1}{y}\right)\right| > f(x)$

$-f\left(\frac{1}{y}\right) > f(x)$

$f(y) > f(x)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

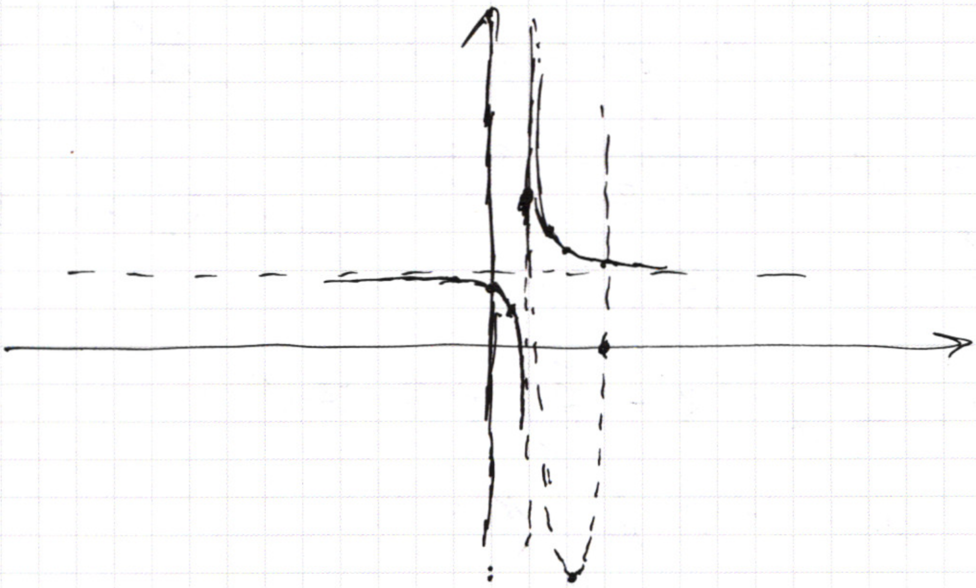
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30.$

$2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax+b. \geq$



$f(x) = ax+b.$ $f(1) \geq 4.$

$\cancel{f(0) \geq}$

$b \geq 0.$

$a+b \geq 4.$

$\left(2+\frac{1}{2x-2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \cdot (-1) = -\frac{1}{(x-1)^2}$

$-\frac{1}{(x_0-1)^2}(x-x_0) + 2 + \frac{1}{2x_0-2} \geq ax_0+b.$

$\left(2+\frac{1}{2x-2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{(x-1)^2}\right) = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$-\frac{1}{2(x_0-1)^2}(1-x_0) + 2 + \frac{1}{2x_0-2} = 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\frac{1}{2t^2}} = \frac{1}{2t} + \frac{1}{2t} + 2 = 4$

$t = \frac{1}{2}, \quad x_0 = \frac{3}{2}$

$\cancel{k = -\frac{1}{2(x_0-1)^2} = -2}$

$\cancel{b = 2 + \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}-2} = 3}$

$\cancel{y = -\frac{24}{9}\cdot 3 + \frac{7}{3} = \frac{5}{3}}$

$\frac{1}{x_0-1} = 2 \Rightarrow x_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{2(\frac{3}{2}-1)^2} = -2$

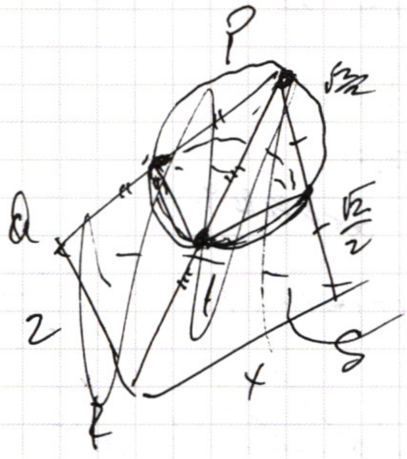
$\cancel{b = 2 + \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}-2} = 3}$

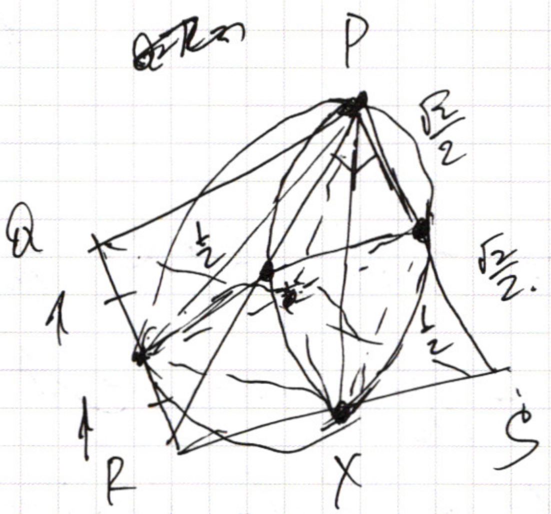
$2 + \frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}-2} = 3. \qquad y = \cancel{-2\cdot 3 + 3 = 3}$

$y = -2\left(3 - \frac{3}{2}\right) + 3 = 0.$

$a = -2$ и $b = 6.$

№7.





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} 4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = 4 \quad (1) \\ 4\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = -4 \end{array}\right.$$

(1): $4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 4.$

~~$\sin\alpha = 0: \cos^2\alpha = 1$~~

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \Rightarrow \cancel{tg\alpha = 0}\ \varnothing. \\ \sin\alpha \ne 0 \\ -4tg^2\alpha + 2tg\alpha + 4 = \frac{4}{\cos^2\alpha} = 4(tg^2\alpha + 1) \end{array}\right.$$

$-4tg^2\alpha + 2tg\alpha + 4 = 4tg^2\alpha + 4$

$8tg^2\alpha - 2tg\alpha = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = \frac{1}{4} \end{array}\right.$$

(2): $4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = -4.$

$\cos\alpha \ne 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - 4tg^2\alpha - 2tg\alpha = -4tg^2\alpha - 4$

$2tg\alpha = 8,\ tg\alpha = 4.$

$$\left\{\begin{array}{l} 3y - 2x = \sqrt{\overset{\sim 2}{3xy - 2x - 8y + 2}} \\ 8x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{array}\right.$$

$3y - 2x = a$

$xy = 8$

~~$a = \sqrt{38}$~~

$3^{\log_4 t} + t \geq 5^{\log_4 t}$.

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t} \quad /: 5^{\log_4 t}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t} \geq 1$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\cancel{x}\,t}$ – убыв., $\left(\frac{4}{5}\right)^{t}$ – убыв

$\log_4 t$ – возр.

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t}$ – ~~возр~~ убыв

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_4 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4 t} \cancel{\geq} 1$. – ед. корень

$t = 4 \Rightarrow$ при $t \leq 4$ выполн.

$0 \leq x^2 + 6x - \cancel{4} \leq \cancel{0}4$

~~$D = 36 + 16 = 52 = 4 \cdot 13$.~~

$x = -6$

$x \in \cancel{[-6; 0]}$. $x \in (-\infty; -6] \cup [0; \infty)$.

$x^2 + 6x - 4 \leq 0$.

$x \in \left[\frac{-6-2\sqrt{13}}{2}; \frac{-6+2\sqrt{13}}{2}\right]$.

$\wedge \qquad \vee$

$-6 \qquad 0$.

$x \in \left[\frac{-6-2\sqrt{13}}{2}; -6\right] \cup \left[0; \frac{-6+2\sqrt{13}}{2}\right]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)