МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

1) Рассмотрим второе равенство:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

По формуле суммы синусов:

$2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\frac{4\beta}{2}=-\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta=-\frac{1}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$, тогда $\sin 2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

2) Вернёмся к первому равенству:

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha\pm\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\pm 2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

Теперь рассмотрим отдельно для „+" и „−".

Т.к. значений $tg\alpha$ не меньше 3, то $\cos\alpha\neq0$; $\sin\alpha\neq0$

$\oplus$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha+1-2\sin^2\alpha=0$

$2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0 \quad |:\sin^2\alpha$

$\frac{2}{tg\alpha}+\frac{3}{tg^2\alpha}-1=0$, $tg\alpha\neq0$

$2tg\alpha+3-tg^2\alpha=0$

$tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0$

$tg\alpha=\frac{2\pm4}{2}=-1;3$

$\ominus$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha+1-2\cos^2\alpha=0$

$2\sin\alpha\cos\alpha+3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0 \,|:\cos^2\alpha$

$2tg\alpha+3tg^2\alpha-1=0$

$3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$

$tg\alpha=\frac{-2\pm4}{6}=-1;\frac{1}{3}$

Ответ: $-1;\frac{1}{3};3$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

О.Д.З.: $(x-6)(2y-1)\geq 0$; $x\geq 12y$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (6y-3)^2+(x-6)^2=90 \end{cases}$$

– Введём замену:

$a=x-6$; $b=6y-3$

$$\begin{cases} a+6-2b-6=\sqrt{\frac{ab}{3}} \\ a^2+b^2=90 \end{cases}, \quad ab\geq 0, \quad a-2b\geq 0.$$

$$a-2b=\sqrt{\frac{ab}{3}}$$

$$a^2-4ab+4b^2=\frac{ab}{3}$$

$$3a^2-13ab+12b^2=0$$

$$D=169b^2-12\cdot 12b^2=169b^2-144b^2=25b^2$$

$$a=\frac{13b\pm 5b}{6}=3b;\ \frac{4}{3}b$$

Подставим в другое уравнение:

$$b^2+9b^2=90 \qquad b^2+\frac{16}{9}b^2=90$$

$$b^2=9 \qquad \frac{25b^2}{9}=90$$

$$\begin{cases} b=\pm 3 \\ a=\pm 9 \end{cases} \qquad b^2=\frac{18\cdot 9}{5}=\frac{162}{5}$$

$$\begin{cases} b=\pm\sqrt{\frac{162}{5}} \\ a=\pm\sqrt{\frac{288}{5}} \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=9 \\ 6y-3=3 \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-9 \\ 6y-3=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=15;\ y=1 \\ x=-3;\ y=0 \text{ – не подходит} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-6=\sqrt{\frac{288}{5}} \\ 6y-3=\sqrt{\frac{162}{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} x-6=-\sqrt{\frac{288}{5}} \\ 6y-3=-\sqrt{\frac{162}{5}} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\sqrt{\frac{288}{5}}+6 \\ y=\frac{\sqrt{\frac{162}{5}}+3}{6} \end{cases} \text{ – не подходит} \\ \begin{cases} x=6-\sqrt{\frac{288}{5}} \\ y=\frac{3-\sqrt{\frac{162}{5}}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $x=15, y=1$; $x=6-\sqrt{\frac{288}{5}}$, $y=\frac{3-\sqrt{\frac{162}{5}}}{6}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5

z	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$f(z)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2
$f(\frac{1}{z})$	0	0	0	-1	0	-1	0	0	-1	-2	0	-3	-1	-1	0	-4	0	-4	-1	-1	-2	-5	0	-2

Следует найти кол-во пар чисел x и y, таких, что $f(x\cdot\frac{1}{y})<0$.

$f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$, при этом $2\le x\le 25$; $2\le y\le 25$.

Тогда, т.к. известны значения функции от простых чисел, найдём значения функции для всех чисел от 2 до 25:

$f(4)=f(2)+f(2)=0$
$f(6)=f(2)+f(3)=0$
$f(8)=f(4)+f(2)=0$
$f(9)=f(3)+f(3)=0$
$f(10)=f(2)+f(5)=1$
$f(12)=f(2)+f(6)=0$
$f(14)=f(2)+f(7)=1$
$f(15)=f(3)+f(5)=1$
~~$f(16)=$~~ и т.д.

Для простых чисел (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23) – значения по условию равны их целой части при делении на 4.

Значения функции от величин $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ и т.д. можно найти следующим образом:
$f(z\cdot\frac{1}{z})=f(1)=f(z)+f(\frac{1}{z})$, где z - целые числа от 2 до 25 и $f(1)=0$.
Следовательно $f(z)=-f(\frac{1}{z})$

Ответ: 206

Посчитаем итоговое количество:

Если $f(z)=0$ то подходят все $f(\frac{1}{z})<0$, таких вариантов: $10\cdot14=140$

$f(z)=1$; $f(\frac{1}{z})<-1$, $7\cdot7=49$ $\quad$ $f(z)=3$, $1\cdot3$ $\quad$ $f(z)=5$ – вариантов нет

$f(z)=2$; $f(\frac{1}{z})<-2$, $3\cdot4$ $\quad$ $f(z)=4$, $2\cdot1$

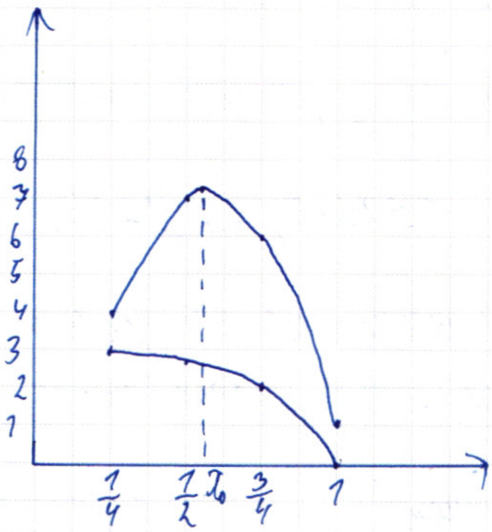
Ответ: $140+49+12+3+2=206$

№6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ $\qquad x_0 = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16}$ – вершина параболы

$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

Построим графики функций на отрезке $[\frac{1}{4}; 1]$:



ax+b – это всевозможные прямые.

при этом чтобы удовлетворялось условие, на отрезке $[\frac{1}{4}; 1]$ ~~это~~ они должны проходить между двумя другими графиками.

Такая прямая возможна только одна: проходящая через точки $(1;1)$; $(\frac{1}{4};4)$ и касающаяся графика $4+\frac{4}{4x-5}$ в точке $(\frac{3}{4};2)$.

Другие варианты невозможны, т.к. крайнее положение прямой, касающейся верхнего графика так же касается и нижнего.

$y=ax+b$

$\begin{cases} 1=a+b \\ 4=\frac{1}{4}a+b \end{cases}$

$a=1-b$

$4=\frac{1}{4}-\frac{b}{4}+b$

$3\frac{3}{4}=\frac{3}{4}b$

$\frac{15}{4}=\frac{3b}{4}$

$b=5;\ a=-4$

$y=-4x+5$

Проверим что данная прямая касается нижнего графика: $2=-4\cdot\frac{3}{4}+5$

$2=2$ ч.т.д.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

Замена $10x-x^2=t$, $t>0$

$|-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}-t$

Т.к. $t>0$, то модуль убирается со внутренним „–".

$t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} - t^{\log_3 3}$

$4^{\log_3 t} + 3^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

Замена: $\log_3 t = a$

$3^a+4^a \geq 5^a$, следовательно $a \leq 2$, т.к. дальше равенство не выполняется (при $a=2$ – прямоугольный треугольник, $3^a+4^a=5^a$).

$\log_3 t \leq 2$

$t \leq 9$, $t>0$

$10x-x^2 \leq 9$ $\qquad$ $x(x-10)>0$

$x^2-10x+9 \geq 0$ $\qquad x_1=1; x_2=9$ $\qquad$ $x \in (-\infty; 0) \cup (10; +\infty)$

$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (10; +\infty)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)

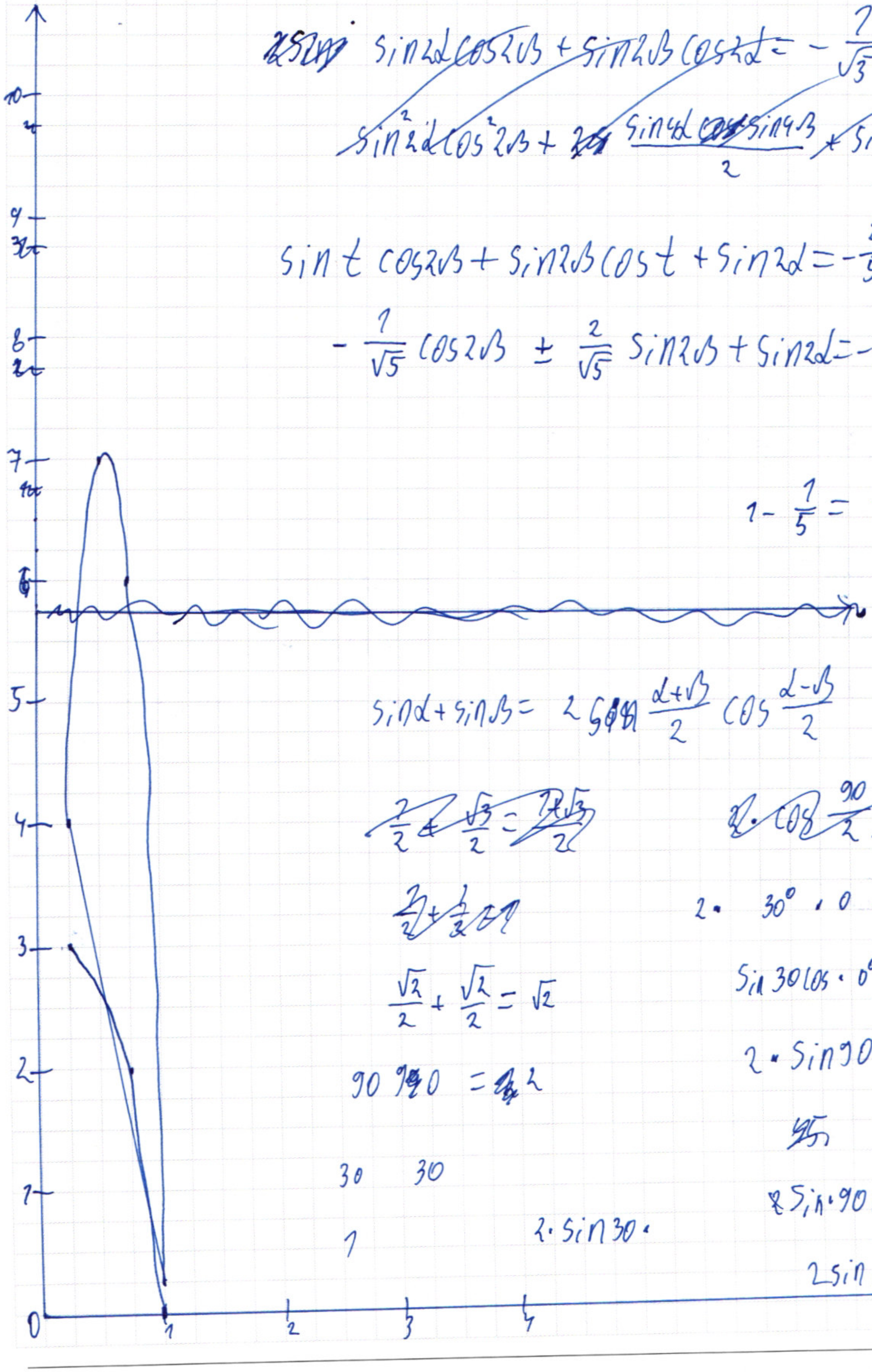
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$~~

~~$\sin^2 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\frac{\sin 4\alpha \sin 4\beta}{2} + \sin^2 2\beta \cos^2 2\alpha = \frac{1}{5}$~~

$\sin t \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos t + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cos 2\beta \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2}$

~~$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$~~

~~$2 \cdot \cos \frac{90}{2} \cos$~~

~~$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$~~

$2 \cdot 30^\circ \cdot 0 = 1$

$\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$\sin 30 \cos \cdot 0^\circ = \frac{1}{2}$

$90\ 90 = 2$

$2 \cdot \sin 90 \cdot \cos 0 = 2$

~~45~~

30 30

$2 \sin \cdot 90 \cos \cdot 0 = 2$

1

$2 \cdot \sin 30 \cdot$

$2 \sin \cos$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{1}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\beta=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$+$

$\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha=-1$

$\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha+1=0$

$\sin 2\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$

$2\sin\alpha\cos\alpha+3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=0$

$\cancel{2 tg}$

$\frac{2}{tg\alpha}+\frac{3}{tg^2\alpha}-1=0$

$\cancel{\frac{5}{tg\alpha}=1}$

$\cancel{tg\alpha=5}$

$-$

$\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha+1=0$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2\sin^2\alpha-2\cos^2\alpha+1=0$

$2\sin\alpha\cos\alpha+3\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$ + $f(x/y)<0$

$f(p)=[p/4]$

~~1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25~~
~~0 0 1 1 1 1 2 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 5 5 5 5 6 6~~

~~$t=\frac{1}{y}$~~ ~~$f(x)=0;1;2;3;4;5;6$~~

~~$f(xt)<0$~~ ~~$f(t)$~~

0, 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

$f(xt)<0$ 0, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5

$f(xt)=f(x)+f(t)$

~~$f(2)$~~ ~~$f(x)^2$~~

$f(4)=0$ $f(9)=0$

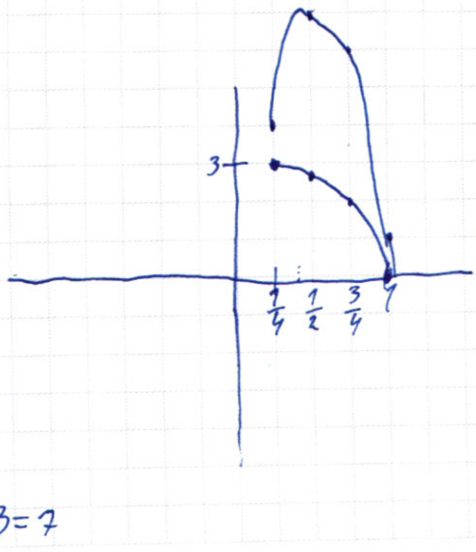
$f(6)=0$ $f(10)=1$

$f(8)=0$ $f($

N6

$x\in[\frac{1}{4};1]$

$\frac{16x-16}{4x-5}\leq ax+b\leq -32x^2+36x-3$



$\frac{8-16}{-3}=\frac{8}{3}$

$\frac{4-16}{-4}=\frac{12}{4}=3$

$\frac{3\cdot4-16}{3-5}=\frac{4}{2}=2$

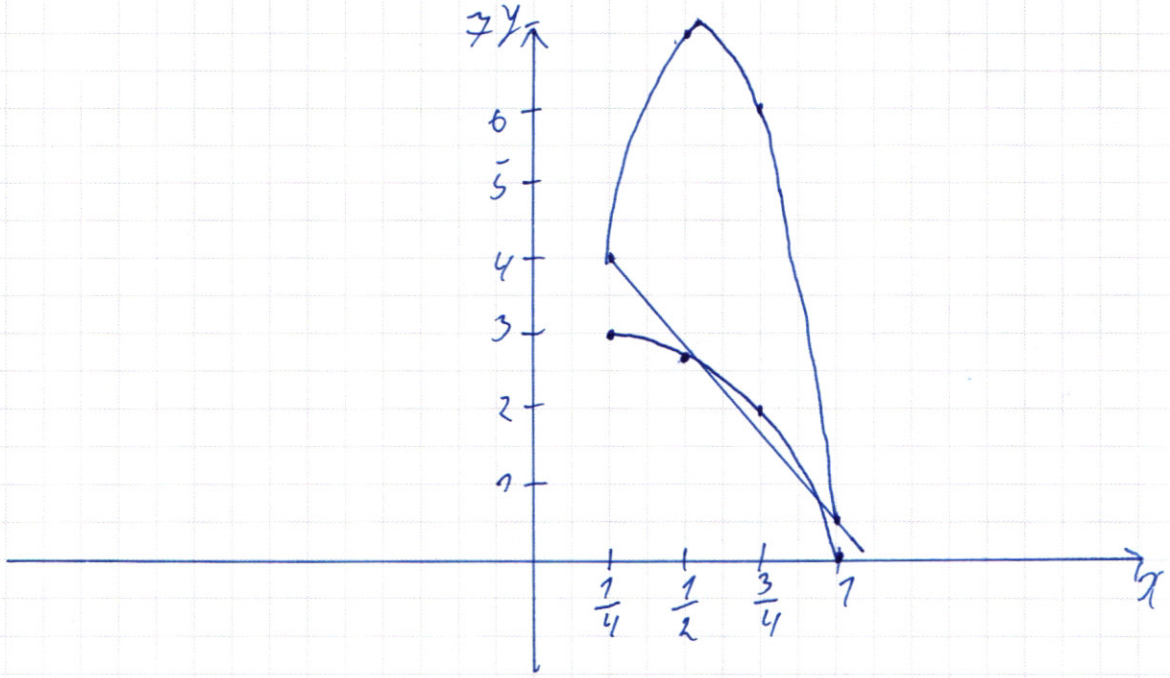
$-32+36-3=$ $-18+27-3=4$ $-8+18-3=7$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\frac{16x-16}{4x-5}$ $\quad -32x^2+36x-3$

$\frac{-32}{16}+\frac{36}{4}-3=-2+9-3=4$

$\frac{1}{4};\ \frac{1}{2};\ \frac{3}{4};\ 1$

$\frac{-32}{4}+\frac{36}{2}-3=-8+18-3=7$

$\cancel{\frac{16\cdot\frac{1}{4}-16}{1-5}=-\frac{12}{4}=3}$

$\frac{-32\cdot 9}{16}+\frac{36\cdot 3}{4}-3=-18+27-3=6$

$\cancel{\frac{8-16}{2-3}=\frac{8}{3}}$

$\frac{36}{64}=\frac{18}{32}=\frac{9}{16}$

$\cancel{\frac{12-16}{3-5}=\frac{4}{2}=2}$

$\frac{16x-20+4}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$

58 32

7,5 5,5

13,5

−1,5

$\frac{-2,5}{6}$

№2

$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$2y(x-6)-(x-6) = (x-6)(2y-1)$

~~2y = b+2~~

$6y = b+3$

$(6y-3)^2+(x-6)^2 = 90$

$x-6=a;\ 6y-3=b$

108·90=9720

$\begin{cases} b^2+a^2=90 \\ a+6-2b-6 = \sqrt{\frac{ab}{3}} \end{cases}$

$\begin{cases} b^2+a^2=90 \\ a-2b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \end{cases}$

18 × 16 = 108 + 18 = 288

~~$\begin{cases} b^2+a^2=90 \\ a-6b=\sqrt{ab} \end{cases}$~~

~~$a^2-12ab+36b^2=ab$~~

~~$27b^2-13ab=-90$~~

~~$27b^2-13ab+90=0$~~

~~$D=169a^2-9720$~~

~~$b=\frac{13a\pm\sqrt{169a^2-9720}}{54}$~~

$a^2-4ab+4b^2=\frac{ab}{3}$

$3a^2-13ab+4b^2=0$

$D=169b^2-12\cdot4b^2=121b^2$

$a=\frac{13b\pm11b}{6}=4b;\ \frac{b}{3}$

$b^2+16b^2=90$

$b^2=\frac{90}{17}$

$\frac{16}{9}\cdot\frac{162}{5}=\frac{18\cdot16}{5}$

$1,33\cdot12=12+4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$3^{\log_2 4} = 9 = 3^{\frac{1}{\log_4 2}}$

$|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2-10x+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\cancel{2^{\log_3 4}}$

$10x-x^2=t$

$|-t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}-t \quad , t>0$

$\cancel{t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}-t}$

$\cancel{t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}-t}$

~~$t>1$ - решения~~

$\cancel{t \geq t^{\log_3 4}\left(t^{\log_3 \frac{5}{4}}-1\right)}$

$4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t} - 3^{\log_3 t}$ $\quad$ $\cancel{4^{\log_8 2}} = \sqrt[3]{4}$

$\cancel{2^{\log_8 4}}$

$\cancel{\log_8 2^2 = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}}$

$\cancel{\sqrt[3]{2^2}}$

$4^a \geq 5^a - 3^a$

$3^a+4^a \geq 5^a$

~~227+64~~

$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12} \qquad \frac{1}{5}$

$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{12}} \qquad \frac{1}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)