МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (1)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta-2\beta)=$

$=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta-$

$-\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)(\cos 2\beta)=-\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{1}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin^2 2\beta+\cos^2 2\beta=1$

$\sin^2 2\beta=1-\cos^2 2\beta=1-\frac{1}{17}=\frac{16}{17}$

$\sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\frac{\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

11(2) $\boxed{tg\alpha = t}$

$\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha +$
$+ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$-3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 5\cos^2\alpha = 0$

Т.к. $tg\alpha$ - определён

$\cos\alpha \neq 0$

Значит выражение можно поделить на $\cos^2\alpha$

$-3tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0$

$-3t^2 + 2t + 5 = 0$

$-3t^2 + 5t - 3t + 5 = 0$

$(3t+5)(t+1) = 0$

$(3t-5)(t+1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{5}{3} \end{array}\right.$

Ответ: $-1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}$

$\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha +$
$+ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

$\cancel{5\sin^2\alpha + 5\sin\alpha\cos\alpha}$

Т.к. $tg\alpha$ - определён

$\cos\alpha \neq 0$

Значит выражение можно поделить на $\cos^2\alpha$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$5t^2 + 2t - 3 = 0$

$5t^2 + 5t - 3t - 3 = 0$

$5t(t+1) - 3(t+1) = 0$

$(5t-3)(t+1) = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = \frac{3}{5} \\ t = -1 \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (1)

$26x - x^2 = t$

$\cancel{t^{\log_5 12} + 26}$

ОДЗ: $26x - x^2 > 0$ $\Downarrow$ $t > 0$

$x(26-x) > 0$

$x \in (0; 26)$

$|t|^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$\cancel{t^{\log_5 12} + t \geq 5^{\log_5 t \cdot \log_5 13}}$

$\cancel{t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}}$

$\cancel{t \geq t^{\log_5 13} - t^{\log_5 12}}$

$\cancel{t \geq t^{\log_5 12}\left(t^{\log_5 \frac{13}{12}} - 1\right)}$

$\cancel{t^{1-\log_5 12} \geq t^{0}}$

$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \geq 13^{\log_5 t}$

$t^{\frac{\log_t 12}{\log_t 5}} + t^{\frac{\log_t 5}{\log_t 5}} \geq 13^{\log_5 t}$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$\left(\frac{12}{13}\right)^{\log_5 t} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\log_5 t} \geq 1$

$j = \log_5 t$

$\left(\frac{12}{13}\right)^{j} + \left(\frac{5}{13}\right)^{j} \geq 1$

$F(x) = \left(\frac{12}{13}\right)^{x} + \left(\frac{5}{13}\right)^{x}$ – убывающая функция

$\left(\frac{12}{13}\right)^{j} + \left(\frac{5}{13}\right)^{j} = 1$ при $j = 2$

$\Downarrow$

$j \leq 2$

№3(2)

$\log_5 t \leq 2$

$t \leq 5^2$

$t \leq 25$

$26x - x^2 \leq 25$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$x^2 - 25x - x + 25 \geq 0$

$(x-25)(x-1) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

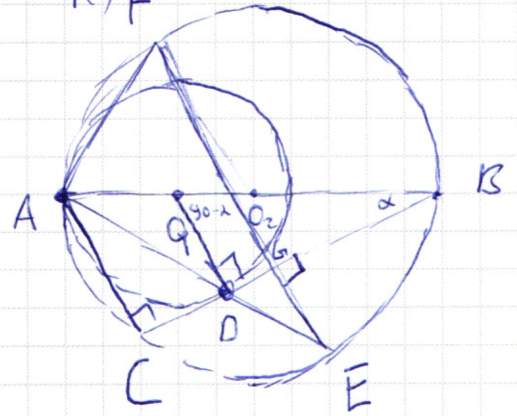
Но из-за ОДЗ:

$x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $(0;1] \cup [25;26)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4(1)



Дано: окружность Ω (радиуса R) с центром в точке O_2; окружность ω (радиуса r) с центром в точке O_1
A – точка их касания
AB – диаметр Ω
BC – хорда Ω
D – точка касания BC и ω
$D \in AE$; AE – хорда Ω
$EF \perp BC$; G – точка перес. EF и BC; $CD=12$; $BD=16$

Найти: R – радиус Ω; r – радиус ω; $\angle AFE$; S_{AEF}

Решение: $AO_1 = r$ т.к. A – точка касания A; O_1 и O_2 лежат на одной прямой AB – диаметр
$AB = 2R$ значит $O_2 \in AB$, а значит и $O_1 \in AB$
$O_1D = r$
$O_1B = AB - AO_1 = 2R - r$

Т.к. AB – диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90$
$\Downarrow$
$\triangle ACB \sim \triangle O_1DB$
$\Downarrow$
$\frac{AK}{CK} = \frac{O_1B}{BD}$

24(2)

$$\frac{AB}{CB} = \frac{O_1B}{BD}$$

$$\frac{2R}{12+13} = \frac{2R-r}{13}$$

$$26R = 50R - \overset{25}{\cancel{50}}r$$

$$25r = 24R$$

$$R = \frac{25}{24}r \qquad r = \frac{24}{25}R$$

По теореме Пифагора

$$O_1B^2 = O_1D^2 + BD^2$$

$$(2R-r)^2 = r^2 + 13^2$$

$$2R(2R-2r) = 13^2$$

$$4R(R-r) = 13^2$$

$$\frac{4R^2}{25} = 13^2$$

$$R^2 = \left(\frac{65}{2}\right)^2$$

$$R = \frac{65}{2}$$

$$r = \frac{24}{25}R = \frac{24 \cdot 65}{2 \cdot 25} = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$$

$\angle ABC = \alpha$

Тогда $\angle DO_1B = \angle CAB = 90 - \alpha$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4(3)

$\angle AO_1B = 180 - \angle DO_1B = 90+\alpha$

$\angle O_1A\cancel{B}D = \angle O_1DA = \frac{180 - \angle AO_1B}{2} = 45 - \frac{\alpha}{2}$

$\angle CAD = \angle CAB - \angle O_1AB = 90 - \alpha - \left(45 - \frac{\alpha}{2}\right) = 45 - \frac{\alpha}{2}$

$\angle ADC = 90 - \angle CAD$

$\angle GDE = \angle ADC$

$\angle AEF = 90 - \angle GDE = 90 - \angle ADC = 90 - (90 - \angle CAD) =$
$= \angle CAD = 45 - \frac{\alpha}{2} = \angle O_1AD = \angle EAB$

$\Downarrow$

дуга AF равна дуге EB

$\Downarrow$

дуга AB равна дуге EF

$\Downarrow$

EF - диаметр, а значит $O_2 \in EF$

$\angle AO_2E = 180 - \angle EO_2B$

$\Downarrow$

$\angle EO_2B = 90 - \cancel{\alpha}$

$\angle AO_2E = 180 - (90 - \alpha) = 90 + \alpha \Rightarrow \angle AFE = \frac{\angle AO_2E}{2} = 45 + \frac{\alpha}{2}$

№ 4(4)

$$\sin\alpha = \frac{O_1D}{O_1B} = \cancel{\frac{2R-r}{r} = \frac{\frac{50}{24}r-r}{r}} = \frac{26}{24}\cdot\frac{r}{2R-r} = \frac{r}{\frac{50}{24}r-r} =$$

$$= \frac{1}{\frac{26}{24}} = \frac{24}{26} = \frac{12}{13}$$

$$\alpha = \arcsin\frac{12}{13}$$

$$\angle AFE = 45^\circ + \frac{\arcsin\frac{12}{13}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{12}{13} = \frac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$12\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 26\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + 12 = 0$$

$$6\,\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2} - 13\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + 6 = 0$$

$$D = 13^2 - 4\cdot6\cdot6 = 169 - 144 = 25 = 5^2$$

$\left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{13\pm5}{12}$, т.к. $\alpha = \arcsin\frac{12}{13}$

$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$ $\qquad \alpha \le 90$

$\frac{\alpha}{2} \le 45$

$\angle AFE = 45^\circ + \mathrm{arctg}\frac{2}{3}$ $\qquad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \le 1$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\sin\angle AFE = \sin45\cdot\cos\frac{\alpha}{2} + \cos45\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (3)

Т.к. FE - диам. $\angle FAE = 90°$

$\Downarrow$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{FE}$ $\qquad \angle AFE = \arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)$

$AE = \sin\angle AFE \cdot FE = \frac{5}{\sqrt{26}} \cdot 2R = \frac{5\cdot 65}{\sqrt{26}} = \frac{\cancel{25\sqrt{26}}}{2}$ $25\sqrt{26}$

$AF = \cancel{\sqrt{FE^2}}$ $FE \cdot \cos\angle AFE = FE\sqrt{1-\sin^2\angle AFE} =$

$= 2R \cdot \sqrt{1 - \frac{25}{26}} = \frac{65}{\sqrt{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{2}$

$S_{AFE} = \frac{AE\cdot AF}{2} = \frac{\frac{25\sqrt{26}}{2}\cdot\frac{5\sqrt{26}}{2}}{2} = \frac{125\cdot 26}{8} = \frac{1625}{4} = 406,25$

Ответ: $\frac{65}{2}$; $\frac{156}{5}$; $\arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)$; $406,25$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5 (1)

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1)$

$f(1)=0$

$f(2)=[\frac{2}{4}]=0$

$f(3)=[\frac{3}{4}]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=[\frac{5}{4}]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=[\frac{7}{4}]=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=0$

$f(11)=[\frac{11}{4}]=2$

$f(12)=f(6)+f(2)=0$

$f(13)=[\frac{13}{4}]=3$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=f(8)+f(2)=0$

$f(17)=[\frac{17}{4}]=4$

$f(18)=f(2)+f(9)=0$

$f(19)=[\frac{19}{4}]=4$

$f(20)=f(2)+f(10)=1$

$f(21)=f(7)+f(3)=1$

$f(22)=f(11)+f(2)=2$

$f(23)=[\frac{23}{4}]=5$

$f(24)=f(12)+f(2)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(13)+f(2)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

$f(28)=f(7)+f(4)=1$

Значит для натуральных

a $a\in[4;28]$

0 встречается 10 раз

1 встречается 7 раз

2 встречается 3 раза

3 встречается 2 раза

4 встречается 2 раза

5 встречается 1 раз

$f(x)=f(\frac{x}{y})+f(y)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

$f(\frac{x}{y})<0$ при $f(y)>f(x)$

$f(x)=4$ $f(y)=5$ — $(2\cdot 1)$ 2 варианта

$f(x)=3$ $f(y)=4$ $(2\cdot 2)$ 4 вар. (6)

$f(y)=5$ $(2\cdot 1)$ 2 вар (8)

$f(x)=2$ $f(y)=3$ $(3\cdot 2)$ 6 вар (14)

$f(y)=4$ $(3\cdot 2)$ 6 вар (20)

$f(y)=5$ $(3\cdot 1)$ 3 вар (23)

Страница №10

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5(2)

$f(x)=1$ $f(y)=2$ $(7\cdot3)$ 21 вар (49)

$f(y)=3$ $(7\cdot2)$ 14 вар (58)

$f(y)=4$ $(7\cdot2)$ 14 вар (72)

$f(y)=5$ $(7\cdot1)$ 7 вар (79)

$f(x)=0$; $f(y)=1$ (10·7) 70 вар (149)

$f(y)=2$ $(10\cdot3)$ 30 вар (179)

$f(y)=3$ $(10\cdot2)$ 20 вар. (199)

$f(y)=4$ $(10\cdot2)$ 20 вар (219)

$f(y)=5$ $(10\cdot1)$ 10 вар (229)

~~f(y)=~~ Ответ: 229

№6(1)

$f(x)=ax+b$

$\frac{8-12}{6-2}$ $\cancel{\geq}$ $f(2) \geq 18\cdot 4-102+28$

$-1 \geq f(2) \geq -2$ $\qquad 0 \geq ax+b$

$g(x)=18x^2-51x+28$

$g'(x)=36x-51$

$g''(x)=36$, значит $g(x)$ выпукла вниз следовательно для того чтобы

$f(x) \geq g(x)$ на промежутке $\left[\frac{2}{3};2\right]$

нужно, чтобы

$f\left(\frac{2}{3}\right) \geq g\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{18\cdot 4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28 = 8-34+28 = 2$

$f(2) \geq g(2) = 18\cdot 4 - 51\cdot 2 + 28 = -2$

$f\left(\frac{2}{3}\right) \geq 2$

$f(2) \geq -2$

Если $f\left(\frac{2}{3}\right)=2$, а $f(2)=-2$, то.

$\begin{cases} \frac{2}{3}a+b=2 \\ 2a+b=-2 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{2}{3}a=4+2a \\ b=-2a-2 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{4}{3}a=-4 \\ b=-2a-2 \end{cases}$ $\begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases}$

$f_1(x)=-3x+4$

$h(x)=\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{4+4-6x}{3x-2}=\frac{4}{3x-2}-2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6(2)

Рассмотрим пресечения $f_1(x)$ и $h(x)$

$$\frac{4}{3x-2}-2=-3x+4$$

$$\frac{4}{3x-2}+3x-6=0$$

$$\frac{4+9x^2-6x-18x+12}{3x-2}=0$$

$$\frac{9x^2-24x+16}{3x-2}=0$$

$$\frac{(3x-4)^2}{3x-2}=0$$

$$x=\frac{4}{3}$$

~~Значит f(x) касается h(x)~~ ~~но если~~ в точке $\frac{4}{3}$, но ~~если~~ $f\left(\frac{2}{3}\right)$ будет больше 2 или если $f(2)$ будет ~~больше~~ -2, то ~~$f\left(\frac{4}{3}\right)$~~ будет больше чем $h\left(\frac{4}{3}\right)$, что противоречит ~~так.~~ условию. ~~Значит нужно (т.к. ах+в-прямая)~~

~~Зна~~ ~~Отв~~ Существует ~~только одна~~ прямая, для которой неравенство верно при $x \in \left[\frac{2}{3};2\right]$ $-3x+4$

Ответ: ~~а=-3; в=4~~ $(-3;4)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№6 (3)

Значит $f_1(x)$ касается $h(x)$ в точке $\left(\frac{4}{3};0\right)$

но если $f\left(\frac{2}{3}\right)$ будет больше 2

или $f(2)$ будет больше -2, то

$f\left(\frac{4}{3}\right)$ будет больше 0 и ~~в точке~~

x при $x=\frac{4}{3}$ неравенство выполнятся не будут. (т.к.

$f\left(\frac{2}{3}\right)+f(2)>2+(-2)$

$a\frac{2}{3}+b+2a+b>0$

$\frac{8}{3}a+2b>0$

$a\cdot\frac{4}{3}+b>0$

Значит неравенство выполняется

только при $a=-3$; $b=4$

Ответ: $-3x+4$

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36-45=45 \end{cases}$$

ОДЗ: $y \geq 6x$

$(x-1)(y-6)\geq 0$

$$\begin{cases} (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-6x)^2=\cancel{\sqrt{xy-6x-y+6}}\,(x-1)(y-6) \\ 9(x-1)^2-6(x-1)(y-6)+(y-6)^2+6(y-6x)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \\ (3(x-1)-(y-6))^2+6(y-6x)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x+3-y)^2+6(y-6x)^2=90 \\ -\sqrt{90}\leq 3x+3-y\leq\sqrt{90} \end{cases}$$

$-\sqrt{\frac{90}{2}}\leq y-6x\leq\sqrt{\frac{90}{6}}$

$3x+3-\sqrt{90}\leq y\leq 3x+3+\sqrt{90}$

$6x-\sqrt{15}\leq y\leq 6x+\sqrt{15}$

$6x+\sqrt{15}\leq 3x+3+\sqrt{90}$

$6x+\sqrt{15}\geq 3x+3-\sqrt{90}$

$3x\leq 3+\sqrt{90}+\sqrt{15}$

$3x\geq 3-\sqrt{90}-\sqrt{15}$

$x\leq\frac{3+\sqrt{90}+\sqrt{15}}{3}$

$x\geq\frac{3-\sqrt{90}-\sqrt{15}}{3}$

$6-\sqrt{15}-2\sqrt{90}\leq y\leq 6+\sqrt{15}+2\sqrt{90}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$6x-\sqrt{15} < 3x+3\sqrt{10}+3$

ОДЗ: $y \geq 6x$

$xy-6x-y+6 \geq 0$

$(x-1)(y-6) \geq 0$

$\frac{3\sqrt{10}+\sqrt{15}+3}{3} \geq x \leq \frac{3\sqrt{10}+\sqrt{15}+3}{3}$

$$\begin{cases} (y-6x)^2 = \cancel{(x-1)+(y-6)}\ (x-1)(y-6) \\ (3x-3)^2+(y-6)^2-9-36=45 \end{cases}$$

$y \leq 6x-\sqrt{90}$

$-\sqrt{15} \leq y-6x \leq \sqrt{15}$

$$\begin{cases} 6(y-6x)^2 = 6(x-1)(y-6) \\ 9(x-1)^2+6(x-1)(y-6)+(y-6)^2 = 90 - 6(y-6x)^2 \end{cases}$$

$6x-\sqrt{15} < y \leq 6x+\sqrt{15}$ $y \geq 6x+\sqrt{90}$

$3x \geq 3-\sqrt{90}$

$x \geq 1-\sqrt{10}$

$3x-3-y+6$

$\cancel{(3x-3+y-6)^2=90+6(y-6x)^2}$

$3+3-\sqrt{90} \leq 6x$

$(y-3x-3)^2\ 6(y-6x)^2$

$3x-3+6-y$

$3x-3+6-y >$

$\cancel{3x+y-9 \geq \sqrt{90}}$

$3x+3+\sqrt{90} \geq 6x+\sqrt{90}$

$y > 9+3\sqrt{10}-3x$

$x \leq 1$

$(y-3x-3)^2 < 90$

$3x-y+6 \leq \sqrt{90}$ $3x+3-y)$

$(y-3x-3)^2+(y-6x)^2=90$

$3x+3-3\sqrt{10} < y < 3x+3+3\sqrt{10}$

$\cancel{y+3x}$

$\cancel{10+}(y-6)^2 \geq 80$

$y-3x-3 \leq \sqrt{90}$

$$\left[\begin{array}{l} y \geq 4\sqrt{5}-6 \\ y \leq -4\sqrt{5}-6 \end{array}\right.$$

$y \leq 3x+6+\sqrt{90}$

$\sqrt{90} \geq y-3x-3 \geq -\sqrt{90}$

$6x+\sqrt{15} > 3x+3+3\sqrt{10}$

$6x \leq 3x+6+\sqrt{90}$

$3x \geq \frac{3+3\sqrt{10}-\sqrt{15}}{3}$

$y \geq 3x+3-\sqrt{90}$

$6x-\sqrt{15} < 3x+3+3\sqrt{10}$

$x \leq 2+\sqrt{10}$

$y \leq 3x+3+\sqrt{90}$

$3x < 3+3\sqrt{10}+\sqrt{15}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12x+36=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$y \geqslant 99-3x$

$y+3x>99$

$y<-\sqrt{90}-9-3x$

$\cancel{y=6}$ $y\geq 6x$

$y+3x-9>90$

$x \leq -1-\frac{\sqrt{10}}{3}$

$y+3x-9<\sqrt{90}$

$6x \leq 99-3x$

$x \leq 11$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y+3x-9>\sqrt{90}$

$(y-2t)^2=$

$(3x-3+y-6)^2=6(y-6x)^2+90$

$(y+3x-9)^2=6((y-6x)^2+15)$

$(30)^2$

$(3x-3)^2-(y-6)^2=90$

~3

$26x-x^2=6$

$a^{\log_b c}=(b^{\log_b a})^{\log_b c}=$

$b^{\log_b a\cdot\log_b c}=c^{\log_b a}$

$|t|^{\log_5 12}+t\geq t_{13}^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$

$t>0$

$(x'-3)^2+(y-6)^2=90$

$\cancel{t\geq t^{\log_5 \frac{13}{12}}}$

$t\geq t^{\log_5 13}(t^{\log_5 12}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta-2\beta)=-\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin 2\beta=-\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=$

$=\frac{\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $2\sin\alpha\cos\alpha-3\cos^2\alpha+5\sin^2\alpha=0$

$\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+5\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha=0$

$-3t^2+2t+5=0$

$-3t^2+5t-3t+5=0$

$(t+1)(-3t+5)=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

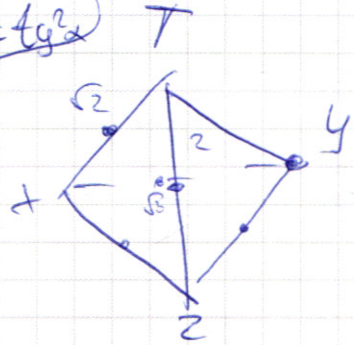
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 + \frac{1}{tg^2\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2tg}{\cos^2\alpha} = \boxed{\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}}$

$f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$



$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$k\ln x$

$\begin{array}{r} \times 125 \\ 26 \\ \hline 750 \\ 250 \\ \hline 3250 \end{array}$

$-3x+4 \leq -2 + \frac{4}{3x-2}$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(5)=1$

$f(6)$

$\frac{12}{13} = \frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}$

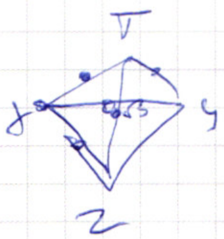
$0 \leq 3x-6 + \frac{4}{3x-2}$

$24 \cdot 6$

12 $\quad 0 \leq \frac{9x^2-24x+16}{3x-2}$

$9x - 18x - 6x + 12$

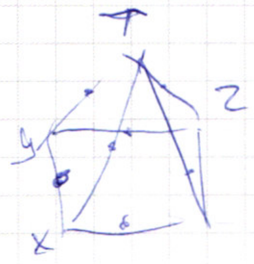
$12tg^2\alpha - 26tg\alpha + 12 = 0$



$6tg^2\alpha - 13tg\alpha + 6 = 0$

$D = 13^2 - 4\cdot6\cdot6 = 169 - 144 = 25 = 5^2$

$tg\alpha =$



$9x^2 - 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$2 = \frac{2}{3}a + b$ $\qquad 4 = -\frac{4}{3}a$ $\qquad b = 3$

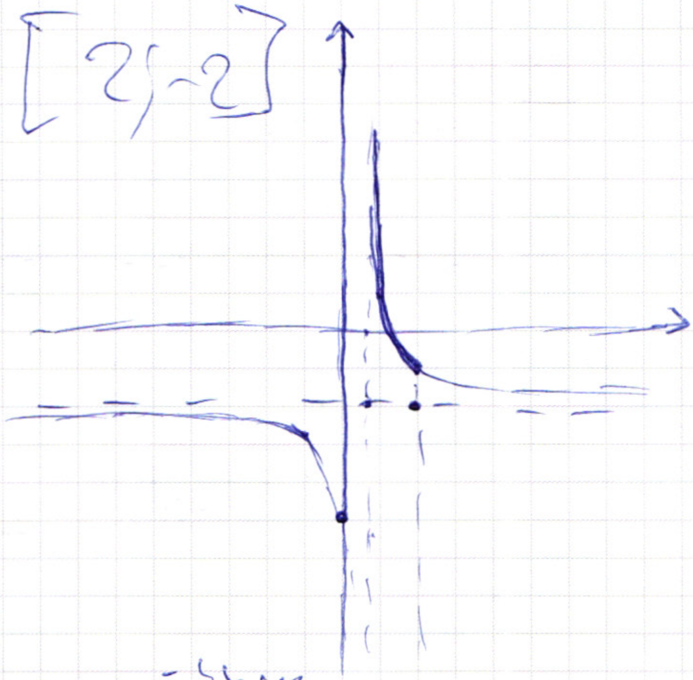
34 $\qquad -2 = 2a + b$ $\qquad a = -3$

$[\frac{2}{3}; 2]$ $\quad [2; -2]$

$18x^2 - 51x + 28 \le ax + b$

$18x^2 - (51 + a)x + 28 - b \le 0$

$D_1 = (51 + a)^2 -$



$\frac{4}{3x-2} - 2$

$36x - 51$ $\qquad -5x + 4$

$< 2a' + b$

$\underline{8 - 12}$

-1 $\qquad -2$ $\qquad 18 \cdot 4 - 102 + 28$

$18x^2 - 51x + 28$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$\frac{\cancel{18} \cdot 17 \cdot 17}{\cancel{12^2}\, 8} - \frac{\cancel{51}^{17} \cdot 17}{\cancel{12}\, 4} + 28$

$28 - \frac{17^2}{8} = 28 - 2 \cdot 17 - \frac{17}{8} = 28 - 36 - \frac{1}{8}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y \geq 6x$

$y-6 \geq 6x-6$

$(y-6)^2 \geq (6x-6)^2$

$(3x-3)^2+(y-6)^2 \geq (3x-3)^2+(6x-6)^2 = 45(x-1)^2$

$90 \geq$

$(x-1)^2 \leq 2$

$x \in [-1; 3]$

$\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$x \geq 1$
$y \geq 6$

$x \leq 1$
$y \leq 6$

$x \in [-1; 1]$

$x \in [1; 3]$

$y \geq -6$

$y \in [-6; 6]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(1)=0$

$r^2+r^2-2r^2\cos 90+\alpha$

$f(1)=f(1)+f(1)$

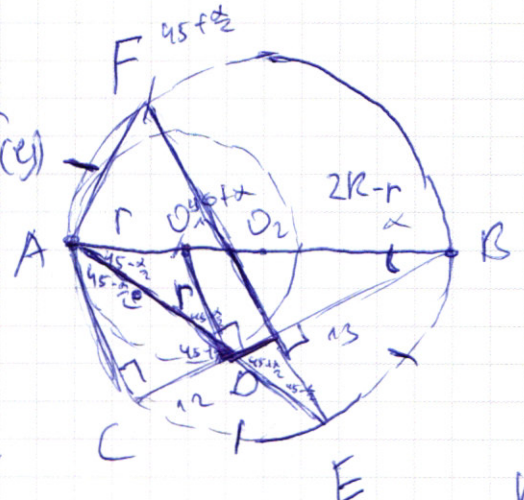
$\frac{r}{2R-r}=\frac{12}{13}$ $\qquad R=\frac{25}{24}r$ $\qquad f(3)$

$f(x)=f(y)+f(\frac{x}{y})$ $\qquad 25r=24R$

$13r=24R-12r$

$(2R-r)^2=r^2+169$

$f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$



$4R^2-4Rr=169$

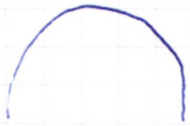
$\frac{4\cdot 25 r^2}{24^2}=169$

$\log_k$

$k\ln x$

$r^2=\frac{169\cdot 6\cdot 24}{25}$

$r=\frac{13\cdot 12}{5}=\frac{156}{5}$



$R=\frac{5\cdot 13}{2}=\frac{65}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 144} + t^{\log_5 25} \geq t^{\log_5 169}$

$t^{\log_5 2,4} + 1 \geq t^{\log_5 2,6}$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$\log_5 t = 1$

$1 \geq t^{\log_5 2,6} - t^{\log_5 2,4}$

$12^1 + 5^1 \geq 13^1$

$1 \geq t^{\log_5 2,4}(t^{\log_5 \frac{2,6}{2,4}}$

$t^{\frac{\ln 12}{\ln 5}} + t^{\frac{\ln 5}{\ln 5}} \geq t^{\frac{\ln 13}{\ln 5}}$

$\ln 12 \cdot 12^1 + \ln 5 \cdot 5^1 = \ln 13 \cdot 13^1$

$5^x + 12^x \geq 13^x$

$t^{\frac{\ln 12}{\ln 5}} + t^{\frac{\ln 5}{\ln 5}} \geq t^{\frac{\ln 13}{\ln 5}}$

$6 - 6\sqrt{90 \cdot t}$

$t^{\log_5 144} + t^{\log_5 25} \geq t^{\log_5 169}$

$144^{\log_5 t} + 25^{\log_5 t} \geq 169^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 \frac{144}{169}} + t^{\log_5 \frac{25}{169}} \geq 1$

$144^1 + 25^1 \geq 169^1$

$t^{\log_5 12} + t^{\cancel{\log}} - t^{\log_5 13}$

$6 + \sqrt{15} - 2\sqrt{0}$

$f(t) =$

$6 + \sqrt{15} - 2\sqrt{90}$

$13^{2\log_5 12}$

$6 + 2\sqrt{90} - \sqrt{15}$

$f'(t) = 1 + \frac{\log_5 \frac{12}{5}}{t^{\log_5 12}} - \log_5 13 \, t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$3\sqrt{90}\ \sqrt{15}\quad 6 - \sqrt{15} - 2\sqrt{90}$

$\frac{t + t^{\log_5 12} \log_5 12 - t^{\log_5 13} \log_5 13}{t} = 0$

$(3x + y - 9)^2 = 6(y - 6x)^2 - 90$

$3x + 4y - 9 \geq \sqrt{90}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^y + 12^y \geq 13^y$

$x \leq 1+\sqrt{10}$ $\quad y \leq 6+\sqrt{10}$

$t^{\frac{\ln 12}{\ln 5}}$ $\quad x \geq \sqrt{10}$ $\quad y \geq 6-\sqrt{10}$

$\sqrt{90}+\sqrt{50})$

4а.

$e^{\frac{\ln t \cdot \ln 12}{\ln 5}} + e^{\frac{\ln t \cdot \ln 5}{\ln 5}} \geq$

$5 \quad e^{\ln 5^y}$ $\quad (x-1)^2 \leq 90+15-2\sqrt{90 \cdot 15}$ $\quad 15-\sqrt{56} + (y-6)^2$

13^2

$1. \quad \frac{2+\frac{2}{3}}{2}$ $\quad 12^{\ln t} + 5^{\ln t} \geq 13^{\ln t}$

$\ln 5 \cdot 5^y + \ln 12 \cdot 12^y - \ln 13 \cdot 13^y \geq 0$

$\ln 5 \cdot 5^x + \ln 12 \cdot 12^x \geq \ln 13 \cdot 13^x$

$e^{\ln 5 \cdot 5^x + \ln 12 \cdot 12^x} \geq e^{\ln 13 \cdot 13^x}$ $\quad 90+15-2\sqrt{90 \cdot 15} + (y-6)^2$

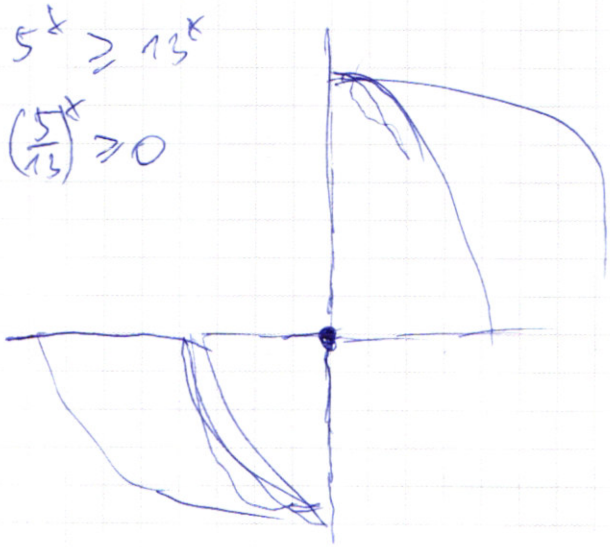
$5^{5^x} + 12^{12^x} \geq 13^{13^x}$

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ \end{cases}$

$5 \cdot 12^{\left(\frac{12}{5}\right)^x} = 13^{\left(\frac{13}{5}\right)^x}$

$12^x + 5^x \geq 13^x$

$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x \geq 0$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)