МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-4x=-64 \\ y+4x-2\sqrt[3]{y^2-16x^2}=24 \end{cases}$$

Пусть $y-4x=b$, $y+4x=a$, тогда

$$\begin{cases} b=-64 \\ a-2\sqrt[3]{ab}=24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-64 \\ a+8\sqrt[3]{a}=24 \end{cases}$$

Рассмотрим 2-е уравнение системы, считая $t=\sqrt[3]{a}$:

$t^3+8t-24=0$. Заметим, что $t=2$ - решение, тогда

$(t-2)(t^2+2t+12)=0$, но $t^2+2t+12>0$ при любом t т.к. $D=4-48<0$

Значит, $a=8$ - единственно возможное

$$\begin{cases} y-4x=-64 \\ y+4x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=-56 \\ y+4x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-28 \\ x=\frac{8+28}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-28 \\ x=9 \end{cases}$$

Ответ: $x=9$, $y=-28$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x} \frac{1}{x^2}$ ОДЗ: $3x>0$, $x \ne \frac{1}{3}$; $9x>0$, $x \ne \frac{1}{9}$; $\log_{3x} x^4 \ge 0$ $\Leftrightarrow$ ОДЗ: $x>0$, $x \ne \frac{1}{3}$, $x \ne \frac{1}{9}$, $x \in (1;+\infty) \cup (0;\frac{1}{3})$

$2\sqrt{\log_{3x} x} \le -2\log_{9x} x$

$\sqrt{\log_{3x} x} \le -\log_{9x} x$

~~Заметим, что левая часть неравенства не меньше 0, а правая - не больше 0 т.к. $x>0$ и ОДЗ $\Rightarrow 9x > x$ при x, отличных от~~ ~~$\Rightarrow \log_{9x} x > 1$~~

$\frac{1}{\sqrt{1+\log_x 3}} + \frac{1}{1+\log_x 9} \le 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+\log_x 3}} + \frac{1}{1+2\log_x 3} \le 0$. Пусть $\log_x 3 = t$, тогда

$\frac{1+2t+\sqrt{1+t}}{\sqrt{1+t}\,(1+2t)} \le 0$. Заметим, что $\sqrt{1+t} \ge 0$, значит исходное на ОДЗ равносильно: $\frac{1+2t+\sqrt{1+t}}{1+2t} \le 0$. Рассмотрим уравнение:

$1+2t+\sqrt{1+t} = 0 \Rightarrow 1+t = 1+4t^2+4t \Rightarrow 4t^2+3t=0 \Rightarrow t_1 = 0, t_2 = -\frac{4}{3}$

Рассмотрим уравнение $1+2t=0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}$, тогда, по методу интервалов:

$-\ \ -\frac{4}{3}\ \ +\ \ -1\ \ -\frac{1}{2}\ \ -\ \ 0\ \ +$ Но т.к. $1+t \ge 0$, то $t \in [-\frac{1}{2}; 0]$, тогда

$\begin{cases} \log_x 3 \ge -\frac{1}{2} \\ \log_x 3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(3-\frac{1}{x^2}) \ge 0 \\ (x-1)(3-1) \le 0 \end{cases}$ - по методу рационализации

Корни уравнения $(x-1)(3-\frac{1}{x^2}) = 0$: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$

$+\ \ -\frac{1}{\sqrt{3}}\ \ -\ \ \frac{1}{\sqrt{3}}\ \ +\ \ 1\ \ -$ $\Rightarrow \begin{cases} x \in [-\infty; -\frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [\frac{1}{\sqrt{3}}; 1] \\ x \in [-\infty; 0) \cup x = 1 \end{cases}$ с учетом ОДЗ $\Rightarrow$ $x = 1$

Проверка: $\sqrt{\log_3 1} \le \log_9 1$ - верно

Ответ: $x = 1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 2
(Нумеровать только чистовики)

№4

1) т.к. $tg\angle NCP = \frac{12}{5}$, то $\frac{NP}{CP} = \frac{12}{5}$, Из $\triangle NPC$: $NC = \sqrt{NP^2 + CP^2}$

$\Rightarrow \sqrt{\frac{25}{144} NP^2 + NP^2} = NC = 13 \Rightarrow NP = 12 \Rightarrow CP = 5$

2) $\angle BQP = \angle XBC$ как соответственные при $AD \parallel BC$

$\angle BQP = \angle BPQ$ т.к. $BC \parallel AD \Rightarrow QB = BP$ т.к. $\triangle QBP$ - равнобедренный

3) $\angle BPD = 180^\circ - \angle BPQ \Rightarrow \angle BPC = 90^\circ - \frac{\angle BPQ}{2}$ т.к. BP и PD - касательные к $\omega \Rightarrow PC$ - биссектриса $\angle BPD$

4) Но тогда из $\triangle BPC$: $\angle BCP = 180^\circ - \angle BPQ - (90^\circ - \frac{\angle BPQ}{2}) = 90^\circ - \frac{\angle BPQ}{2}$

$\Rightarrow \triangle BPC$ - равнобедренный с $BC = BP$

5) $\angle BPN = 90^\circ - (90^\circ - \frac{\angle BPQ}{2}) \Rightarrow$ из $\triangle NBP$: $\angle PNB = 180^\circ - (180^\circ - \angle BPQ) - \frac{\angle BPQ}{2}$

$= \frac{\angle BPQ}{2} \Rightarrow \triangle NBP$ - равнобедренный с $NB = BP$

6) Но тогда $NB = BP = BC = BQ \Rightarrow NQPC$ вписан с центром в B

$\Rightarrow \angle NQC = \angle NPC = 90^\circ$

7) $\angle CNP = \frac{1}{2}\angle CQP$ из вписанности и т.к. QC - биссектриса $\angle BQP$

$\frac{1}{2}\angle QPB = 90^\circ - \angle ABP = 90^\circ - \angle PDC$ (т.к. $BC = \frac{1}{2}NC = \frac{13}{2} = AP$ и $BC \parallel AP$, то $BAPC$ - параллелограмм, $BP = AP \Rightarrow \angle PAB = \angle ABP = \angle ADC$)

8) Но $\sin\angle CNP = \frac{5}{13}$ из $\triangle NCP \Rightarrow \angle ADC = \angle PDC = 90^\circ - \arcsin\frac{5}{13}$

9) Т.к. $CP \parallel AB$ из параллелограмма $ABCP$, $\angle QNC = 180^\circ - \angle QPC$ из вписанности ($QNCP$) $\Rightarrow \angle QNC = \angle CPD = \angle PDC$ (т.к. $CP = BA = CD$)

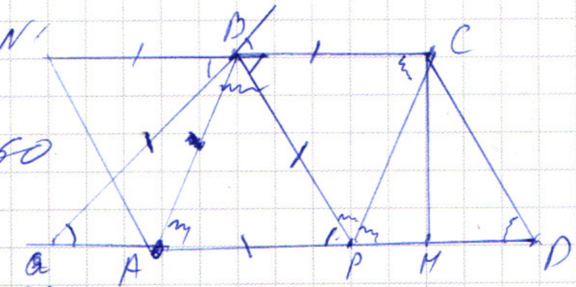
10) Но тогда $NQ \parallel CD$ и $NC \parallel QD \Rightarrow QNCD$ - параллелограмм $\Rightarrow NC = QD = 13$

11) $CH = PC \cdot \sin\angle CPH \Leftrightarrow CP \cdot \sin(90^\circ - \arcsin\frac{5}{13}) = CH$ (т.к. $CP \parallel BA \Rightarrow \angle BAD = \angle CPH$)

$CH = 5 \cdot \cos(\arcsin\frac{5}{13})$

$CH = 5\sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} \Rightarrow CH = 5 \cdot \frac{12}{13}$

12) $S_{NCDQ} = CH \cdot NC = \frac{12}{13} \cdot 5 \cdot 13 = 60$



Ответ: $\angle NQC = 90^\circ$, $S_{NCDQ} = 60$, $\angle ADC = 90^\circ - \arcsin\frac{5}{13}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

Пусть есть некоторое число $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, удовлетворяющее условию.

Заметим, что наименьшая из 3-ёх последовательных степеней 10 ~~равна~~ не меньше 3-ей.

Если она не превосходит 2-ой, то (т.к. остаток от k-ой степени 10 совпадает с k последними цифрами) $12345 > \overline{a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7}$, ведь данная сумма не превосходит $9999+999+99$. Если же наименьшая из степеней хотя бы 4, то 12345 меньше искомой суммы при $a_2 \neq 0$

(т.е. если наименьшая степень 5, то $a_2=0$ и $a_1=0$; невозможно ~~Наименьшая степень не 6, иначе $a_1=0$~~)

1. Если наименьшая степень 3, то

$$\overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_3a_4a_5a_6a_7} = 12345$$

$$300a_5 + 30a_6 + 3a_7 + 2000a_4 + 10000a_3 = 12345$$

Заметим, что правая часть $\vdots 5$, но $\not\vdots 10$, а в левой части все слагаемые, кроме $3a_7$, делятся на 10 $\Rightarrow a_7 = 5$, тогда

$30a_5 + 3a_6 + 200a_4 + 1000a_3 = 1233$. Заметим, что остаток левой части сравним с $3a_6$ по модулю 10 $\Rightarrow 3a_6 \equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow a_6 \equiv 1 \pmod{10}$ $\Rightarrow a_6 = 1$, тогда

$3a_5 + 20a_4 + 100a_3 = 123$, Аналогично предыдущему шагу, $a_5 = 3 \Rightarrow$

$2a_4 + 10a_3 = 12 \Rightarrow a_4 = 1 \Rightarrow 10a_3 = 10 \Rightarrow a_3 = 1$

Значит, в данном случае число имеет вид

$\overline{a_1a_2 1 1 1 1 5}$. Т.к. $a_1 \neq 0$, то чисел такого вида $9 \cdot 10 = 90$

Второй случай рассматривается на стр 5

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. Если наименьшая степень 4, то

$\overline{a_4a_5a_6a_7}+\overline{a_3a_4a_5a_6a_7}+\overline{a_2a_3a_4a_5a_6a_7}=12345$

$1000a_4+100a_5+10a_6+a_7+10000a_3+1000a_4+100a_5+10a_6+a_7+100000a_3+1000a_4+100a_5+10a_6+a_7=$

$=3000a_4+300a_5+30a_6+3a_7+20000a_3=12345$

~~Левая~~ $3a_7\equiv 5 \pmod{10} \Leftrightarrow a_7=5$ (т.к. a_7 – цифра), значит

$300a_4+30a_5+3a_6+2000a_3=1233$

$3a_6\equiv 3 \pmod{10} \Leftrightarrow a_6\equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow a_6=1$, тогда

$30a_4+3a_5+200a_3=123$. Т.к. $a_3\geq 0$, то $a_3=0$, значит (иначе $200>123$)

$30a_4+3a_5=123 \Rightarrow 3a_5\equiv 3 \pmod{10} \Rightarrow a_5=1$, тогда

$30a_4=120 \Rightarrow a_4=4$. В этом случае числа имеют вид:

$\overline{a_1004115} \Rightarrow$ чисел такого вида 9 т.к. $a_1\neq 0$

Ответ: 9

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

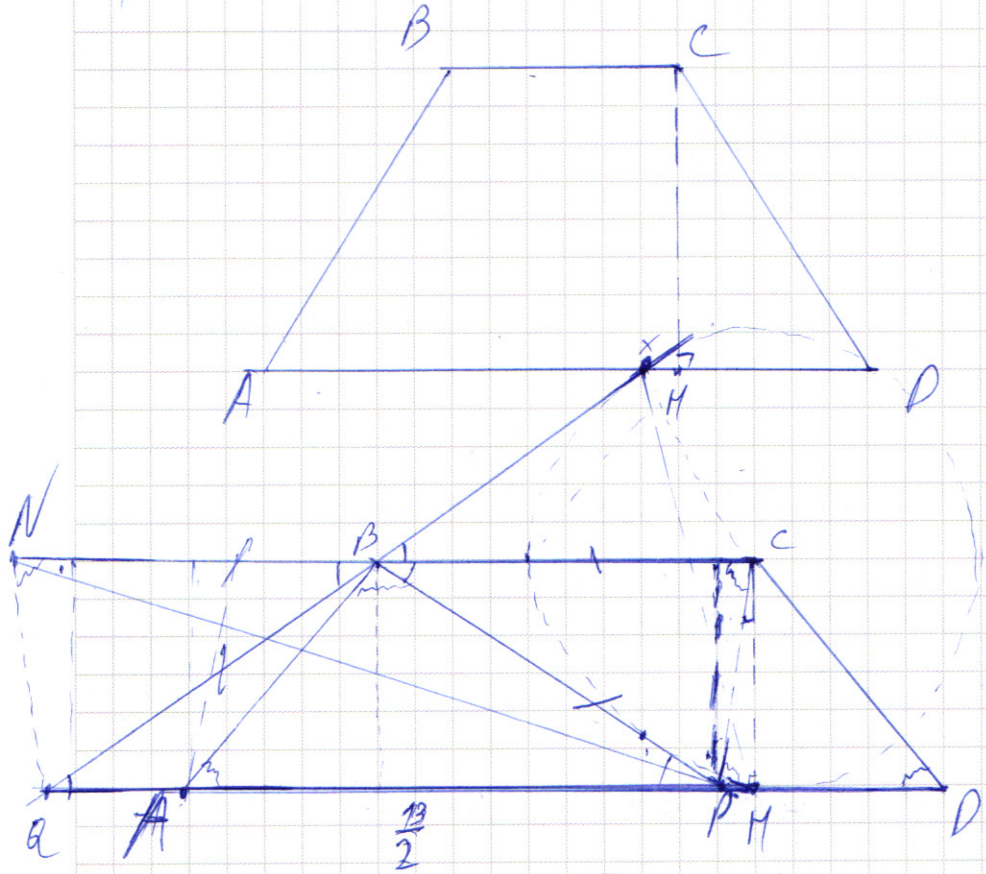
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: ABCD – равнобокая трапеция, CN – радиус окружн., $\angle CPN = 90°$

$\angle ADC$, $\angle NAC$ – ?

S_{NCDQ} – ?

$\operatorname{arctg}\frac{12}{5} = \angle NCP$

$AP = \frac{13}{2}$ $NC = 13$

т.к. $tg\angle NCP = \frac{12}{5}$

$\frac{12}{5} = \frac{NP}{CP}$

Но $NC = \sqrt{NP^2 + CP^2}$

~~т.к.~~ т.к. $CP = \frac{5}{12} NP$;

$13 = NC = \sqrt{\frac{25}{144}NP^2 + NP^2} \Rightarrow NP = 12$ $CP = 5$

$(13 = \frac{13}{12} NP \Rightarrow NP = 12)$

~~$CP = \frac{13}{5}$~~   ~~$CP = \frac{13}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{65}{122}$~~

$\angle BQP = \angle XBC$ как соответственные при $QD \parallel BC$

$\angle XBC = \angle CBP$ т.к. BC – биссектриса $\angle XBP$

$\angle CBP = \angle BPQ$ как накрест лежащие при $AD \parallel BC$

~~$\Rightarrow BP = BQ = BX \Rightarrow \angle QPX = 90$~~

$\frac{3}{4}$ 1 1 5

12 3 4 5

$\angle BPD = 180° - \angle PBC \Rightarrow \angle BPC = 90° - \frac{\angle CBP}{2}$

$\angle BCP = 180° - 90° + \frac{\angle CBP}{2} - \angle CBP = 90° - \frac{\angle CBP}{2} \Rightarrow BC = BP$

$\angle BCA = \angle BAC$; $\angle NAC = \angle NAB + \angle BCA$

Тогда $NB = BC$ Можно отметить $\angle ABP = \angle AQP \Rightarrow NQPC$ вписан $\Rightarrow \angle NQC = 90° = \angle NAC$

$\Rightarrow NBPC$ – вписанная трапеция $\Rightarrow \angle ABP = \angle BAP$ $(BP = BC = \frac{13}{2})$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

N 5

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos(\frac{\pi}{3}-x) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin(x+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$tg(x) - tg(y) - ?$

$\frac{1}{2}\cos(x+2y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+2y) = \cos 60^\circ \cos(x+2y) - \sin 60^\circ \sin(x+2y) =$

$= \cos(\frac{\pi}{3}+x+2y)$

$$\begin{cases} 2\cos(\frac{\pi}{3}+x+2y) = -16\sin(x+\frac{\pi}{6}) \\ \sin(x+y) = 9\cos(\frac{\pi}{3}-x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos(\frac{\pi}{3}+x+2y) = -8\sin(x+\frac{\pi}{6}) \\ \sin(x+y) = 9\cos(\frac{\pi}{3}-x) \end{cases}$$

$9\cos(\frac{\pi}{3}-x) = 9\cdot\frac{1}{2}\cos x + 9\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x$

$\sin(x+\frac{\pi}{6}) = \sin x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cos x$

$$\begin{cases} 2\cos(\frac{\pi}{3}+x+2y) = -2\sqrt{3}\sin x - 2\cos x & \mid \cdot\frac{9}{4} \\ \frac{9}{2}\cos x + \frac{9}{2}\sqrt{3}\sin x = \sin x\cos x + \sin y\cos x \end{cases}$$

$\cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = \frac{9}{4}\cos(x+2y+\frac{\pi}{3}) = -\sin(x+y)$

$\cos(x+2y) = \cos x\cos 2y - \sin x\sin 2y =$

$= \cos x(-1+2\cos^2 y) - 2\sin x\cos y\sin y$

$\cancel{= \cos x(2\cos^2 y - 2\sin^2 x - 1)} =$

$= 2\cos^2 y\cos x - \cos x - 2\sin x\cos y\sin y =$

$= \cos y(\cos x\cos y - \sin x\sin y) - \sin x(\sin x\cos x + \sin y\cos y) =$

$= \cos y\cos(x+y) + \sin x(\sin(x+y))$

$\sin(x+2y) = \sin x\cos 2y + \sin 2y\cos x = \sin x(\cos^2 y - \sin^2 y) + 2\sin x\cos y\cos x =$

$= \cos y(\sin x\cos y + \sin x\cos x) + \sin y(-\sin x\sin y + \sin x\cos y) =$

$= \cos y\cdot$

$$\begin{array}{r|l} 275 & 25 \\ -25 & 11 \\ 25 & \end{array}$$

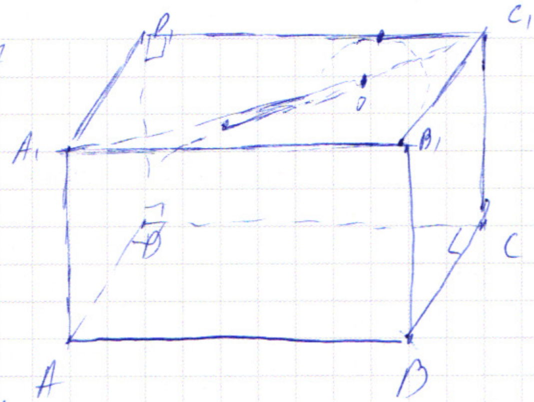
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№ 7



№ 4

$\angle CNP = \frac{1}{2} \angle \;\; P = \frac{1}{2} \angle APB = 90° - \angle ABP = 90° - \angle PDC$

Но $\sin \angle CNP = \frac{5}{12} \Rightarrow \angle ADC = 90° - \arcsin \frac{5}{13}$

$\angle CPM = 180° - \angle BPA - \angle BPC = 180° - \angle BPA - (180° - \angle BPA) =$

$= 90° - \frac{\angle BPA}{2} = \angle ADC$

$(90° - \angle \frac{BPA}{2} = \angle ADC)$

$CP \cdot \sin \angle ADC = CM$

$CP \cdot \sin(90° - \arcsin \frac{5}{13}) = CM$

$5 \cdot \cos(\arcsin \frac{5}{13}) = CM$

$5 \cdot \sqrt{1 - (\frac{5}{13})^2} = CM$

Т.к. $AP = BC$ и $AP \parallel BC$, то $BAPC$ - параллелограмм

$5 \cdot \frac{12}{13} = CM$

$\Rightarrow NAPC$ - параллелограмм

$\frac{5 \cdot 12}{13} \cdot 13 = 5 \cdot 12 = 60$ - ответ

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№9

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos(\frac{\pi}{3}-x) = \frac{9}{2}\cos x + \frac{9\sqrt{3}}{2}\sin x \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -8\sqrt{3}\sin x - 8\cos x \end{cases}$$

$$\sin(x+y) = \frac{9}{16}(\sqrt{3}\sin(x+2y) - \cos(x+2y))$$

$$\sin x\cos y + \sin y\cos x = \frac{9}{16}(\sqrt{3}\ \sin x\cos^2 y - \sin^2 y\sin x + 2\sin x\cos y\cos x)$$

$: \cos x\cos y$

$$-\frac{9}{16}(\cos^2 y\cos x - \cos x\sin^2 y - 2\sin x\cos y\sin y)$$

$$tgx + tgy = \frac{9}{16}(\sqrt{3}\ tgx\cos y - tgy\ tgx\sin y + \cancel{\ }\ )$$

$$-\frac{9}{16}(\cos y - \sin y\, tgy - 2tgx\sin y)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

$$9\cos(\frac{\pi}{3}-x) = 9\sin(\frac{\pi}{6}+x)$$

$$= 9\cos(\frac{\pi}{2} - (\frac{\pi}{6}+x))$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\sin(\frac{\pi}{6}+x) \\ \cos(x+y+y) - \sqrt{3}\sin(x+y+y) = -16\sin(x+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{9}{16}(\cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y)) \\ \sin(x+y) = 9\sin(x+\frac{\pi}{6}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{9}{16}\cos(\frac{\pi}{3}+x+2y) \\ \sin(x+y) = 9\sin(x+\frac{\pi}{6}) \end{cases} \Rightarrow \sin(x+\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{16}\cos(\frac{\pi}{3}+x+2y)$$

$$tgx - tgy = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cos y - \sin y\cos x}{\cos x\cos y} =$$

$$= \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2

$\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x} \frac{1}{x^2}$

ОДЗ: $3x>0,\ x \ne \frac{1}{3}$

$9x>0,\ x\ne \frac{1}{9}$

$x>0,\ x\ne\frac{1}{9},\ x\ne\frac{1}{3}$

$\log_{3x} x^4 \ge 0$

по методу рац.

$(3x-1)(x^4-1)\ge 0$

$\sqrt{4\log_{3x} x} \le -2\log_{9x} x$

$\sqrt{\log_{3x} x} \le -\log_{9x} x$

Заметим, что левая часть ≥ 0, а правая ≤ 0 (т.к. $x>0 \Rightarrow -2\log_{9x} x \le 0$)

$9x > x$

Возможно лишь когда обе части 0

$\frac{1}{\sqrt{\log_x 3x}} + \frac{1}{\log_x 9x} \le 0$

$\frac{1}{\sqrt{1+\log_x 3}} + \frac{1}{1+\log_x 9} \le 0$

$-\log_9 1$

$-\log_{18} 2$

$\frac{1}{\sqrt{1+\log_x 3}} + \frac{1}{1+2\log_x 3} \le 0$. Пусть $\log_x 3 = t$, тогда

$(3x-1)(x^2-1)(x+1)$

$\frac{~~1+2t+1~~\ 1+2t+\sqrt{1+t}}{(\sqrt{1+t})(1+2t)} \le 0$

$0 \le \log_{9x} x + 0$

$0 \le (9x-1)(x-1)$

Рассмотрим $1+2t+\sqrt{1+t} \le 0$; $t \in [-1; +\infty)$

$1+t = 1+4t^2+4t$

$4t^2+3t=0$

$t(4t+3)=0 \Rightarrow t=0$ или $t=-\frac{4}{3}$

$\frac{1}{9}\ \ 1$

$\log_6 \frac{2}{6}\ \frac{1}{6} =$

$-\frac{4}{3}\ \ -1\ \ -\frac{1}{2}\ \ 0$

~~Но $t = \log_x 3 \Rightarrow 3 \quad \log_x 3\ t$~~

Но $1+2t=0 \Leftrightarrow t=-\frac{1}{2} \Rightarrow \log_x 3 \in [-\frac{1}{2}; 0]$

~~$-\frac{1}{2} \le \log_x 3 \le 0$~~
$\begin{cases} \log_x 3 \ge -\frac{1}{2} \\ \log_x 3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-1)(3-\frac{1}{x}) \ge 0 \\ (x-1)(3-1) \le 0 \end{cases} \Rightarrow x=1$

???

~~$x=1$ — единственное решение~~

$\log_{9x} x = 0 \Leftrightarrow$ ~~$x=0$ или $x=1$~~ $x=1$

$\log_{9x} x = \log_{9x} 1$

$\log_x 3 + \log_x \frac{1}{x^2}$

Проверка. Подходит

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} y - 4x = -64 \\ y - \sqrt[3]{(y-4x)(y+4x)} = -20 \end{cases}$ $\begin{cases} y-4x=-64 \\ 4x+y - 2\sqrt[3]{y^2-16x^2} = 24 \end{cases}$

Пусть $4x+y=a$, $y-4x=b$, тогда

$\begin{cases} b=-64 \\ a - 2\sqrt[3]{ab} = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-64 \\ a+8\sqrt[3]{a}=24 \end{cases}$

Рассмотрим 2-ое уравнение системы:

$\times\begin{array}{r}64 \\ 8 \\ \hline 512\end{array}$

~~$(24-a)^3 = 8^3 a$~~

~~$24^3 - 3\cdot 24^2 a + 3\cdot 24 a^2 - a^3 = 8^3\cdot a$~~

~~$8^3\cdot 27 - 3\cdot 8^2\cdot 9a - 8^3 a + 3\cdot 24a^2 - a^3 = 0$~~

~~$8^3\cdot 27 - 8^2(27a+8a) + 3\cdot 24a^2 - a^3 = 0$~~

Пусть $\sqrt[3]{a}=t$ тогда $t^3+8t-24=0$, заметим, что $t=2$ – решение, тогда

$$\begin{array}{r|l} t^3+0t^2+8t-24 & t-2 \\ \underline{t^3-2t^2} & \overline{t^2+2t+12} \\ 2t^2+8t & \\ \underline{2t^2-4t} & \\ 12t-24 & \end{array}$$

Но $t^2+2t+12=0$ не имеет решений$^{\text{действ.}}$ т.к. $D=4-4\cdot 12<0$

Значит $\sqrt[3]{a}=2 \Rightarrow a=8$, тогда

$\begin{cases} y-4x=-64 \\ y+4x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y=-56 \\ y+4x=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-28 \\ x=\frac{8+28}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-28 \\ x=9 \end{cases}$

Проверил

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$. Остаток от деления на 10^k равен ~~послед~~ним k цифрам числа $\Rightarrow$ Заметим, что $12345 > 10^4$ $\Rightarrow$ т.к. 3 последовательные степени, то наименьшая степень $k \geq 2$ (иначе не превосходит $9+99+999$; иначе $99+999+9999$)

Но наименьшая степень $k \leq 3$, иначе $100+1000+10000 > 12345$

Значит $12345 = \overline{a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7}$

$= 10a_6 + a_7 + 100a_5 + 10a_6 + a_7 + 1000a_4 + 100a_5 + 10a_6 + a_7 =$

$= 30a_6 + 3a_7 + 200a_5 + 1000a_4$

~~Заметим, что $a_4=0$ или $a_4=1$, иначе первая цифра суммы больше 1~~

~~1. $a_4=0$, тогда $a_5 \geq 5$ (т.к. $200\cdot9+31\cdot9+30\cdot9 < 10^5$) 2. $a_4=1$, тогда $a_5 \leq 4$~~

Заметим, что $12345 \vdots 5 \Rightarrow 30a_6 + 200a_5 + 1000a_4 + 3a_7 \vdots 5$, но тогда $a_7 \vdots 5$ (ведь $30 \vdots 5$, $200 \vdots 5$ и $1000 \vdots 5$) ~~$\Rightarrow a_7 = 0$~~ ~~или~~ $a_7 = 5$ (иначе $a_7 = 0$, но тогда левая часть $\not\vdots 10$, а правая — делится) $\Rightarrow$ $12345 = 30a_6 + 200a_5 + 1000a_4 + 15$

$12330 = 30a_6 + 200a_5 + 1000a_4$

$1233 = 3a_6 + 20a_5 + 100a_4$

Заметим, что $a_6 \not\vdots 2$, иначе левая часть $\not\vdots 2$, а правая $\vdots 2$

$\Rightarrow a_6 = 1, a_6 = 3, a_6 = 5, a_6 = 7$ или $a_6 = 9$

1. $a_4 = 0 \Rightarrow$ $1233 = 3a_6 + 20a_5$ (лев.) - Невозможно т.к. $a_5 \leq 9$ и $a_6 \leq 9$

~~2. Тогда $a_4 = 1 \Rightarrow 133$~~

3. Заметим, что $20a_5 + 3a_6 \leq 27 + 180 = 207$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

$\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$, заметим, что наименьшая из последовательных степеней не меньше 10^4, иначе

$99+999+9999 < 11100 < 12345$

~~Но~~ Но $10^6 > 12345$ => последовательные степени — это 3, 4, 5

если начали с 4

$\overline{a_5a_6a_7}+\overline{a_4a_5a_6a_7}+\overline{a_3a_4a_5a_6a_7}=12345$

$100a_5+10a_6+a_7+1000a_4+100a_5+10a_6+a_7+10000a_3+1000a_4+100a_5+10a_6+a_7$
$=12345$

$300a_5+30a_6+3a_7+2000a_4+10000a_3=12345$

Заметим, что это значит, что $a_7 \vdots 5$, но $a_7 \not\vdots 10$

$\Rightarrow a_7=5 \Rightarrow 10000a_3+2000a_4+30a_6+300a_5=12330$

$1000a_3+200a_4+3a_6+30a_5=1233$

~~Заметим, что $a_3=0$ или $a_3=1$~~

~~1. $a_3=0 \Rightarrow 200a_4+3a_6+30a_5=1233 \Rightarrow a_4 \vdots 3$~~

~~2. $a_3=1 \Rightarrow 200a_4+3a_6+30a_5=233 \Rightarrow a_4$~~

~~т.к. 180~~ $a_4=a_6=a_5=1$ — решение

Заметим, что правая часть сравнима с 3 mod 10, а левая — с $3a_6$, тогда $a_6 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow a_6=1$

$\Rightarrow 10000a_3+2000a_4+300a_5=1230$

$1000a_3+200a_4+30a_5=123$

Аналогично пред., $a_5=1$

$10a_3+2a_4=12$

$a_4=1$ и $a_3=1$

Тогда число имеет вид: $\overline{a_1a_211115}$

$$\begin{array}{r} 11115 \\ +\ 1115 \\ \hline 12230 \end{array}$$

Ответ: $9\cdot10=90$ (т.к. первая цифра — не 0)

$$\begin{array}{r} 12230 \\ +\ 115 \\ \hline 12345 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)