МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

√ 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

√ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45. \end{cases}$$

√ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

√ 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $4 \le x \le 28$, $4 \le y \le 28$ и $f(\frac{x}{y}) < 0$

~~$f(\frac{x}{y})$~~ $\forall$ а и в $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$, p – простое $[x]$ – целая часть

Найти количество пар (x, y), таких что

$4 \le x \le 28$, $4 \le y \le 28$ и $f(\frac{x}{y}) < 0$

1) $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$

$\Rightarrow f(1) = 0$

2) $f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x}) \Rightarrow f(\frac{1}{x}) = -f(x)$

т.е. $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(y) > f(x)$

теперь посчитаем число пар натуральных чисел для $n \in \mathbb{N}$. В разложении на простые только 2 и 3. $f(n) = 0 \rightarrow$ если

5, 7 по одному разу: $f(n) = 1$

11, 25 : $f(n) = 2$

13: $f(n) = 3$

17, 19 : $f(n) = 4$

23 : $f(n) = 5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

0: $n = 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27$ – 9 вариантов

1: $n = 5, 10, 15, 20, 7, 14, 21, 28$ – 8 вариантов

2: $n = 25, 11, 22$ – 3 варианта

Ищем пары (x, y) $f(x) < f(y)$

3: $n = 13, 26$ – 2 варианта

4: $n = 17, 19$ – 2 варианта

5: $n = 23$ – 1 вариант

Если $f(x) = 0$, то берем $y: f(y) > 0$
$(9 \cdot 16 = 144)$

Если $f(x) = 1$, то берем $y: f(y) > 1$ $(8 \cdot 8 = 64)$

Если $f(x) = 2$, то берем $y: f(y) > 2$ $(3 \cdot 5 = 15)$

Если $f(x) = 3$, то берем $y: f(y) > 3$ $(2 \cdot 3 = 6)$

Если $f(x) = 4$, то берем $y: f(y) > 5$ $(2 \cdot 1 = 2)$

Суммируя получили ответ: $144 + 64 + 15 + 6 + 2 = 231$

Ответ: 231

1) $9u^2 + 16u^2 = 90, \quad u \le 0$

$25u^2 = 90$

$u = -\sqrt{\frac{90}{25}} = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$-\frac{3\sqrt{10}}{5} = x - 1$

2) $9u^2 + 81u^2 = 90, \quad u \geq 0$

$u = 1$

$\frac{5 - 3\sqrt{10}}{5} = x$

$-\frac{12\sqrt{10}}{5} + 6 = y$

Таким образом,

получаем

$u = x - 1 \quad y = \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}$

$v = y - 6$

$(u, v) = (1; 9)$

$(u, v) = \left(-\frac{3\sqrt{10}}{5}; -\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

То есть: ~~ха~~ $(x, y) = (2, 15)$

$(x, y) = \left(\frac{5 - 3\sqrt{10}}{5}, \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}\right)$

Ответ: $\left\{(2, 15); \left(\frac{5 - 3\sqrt{10}}{5}, \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9\cdot(x-1)^2+(y-6)^2-9-36=45 \end{cases}$

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9\cdot(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$

замена:

$u=x-1$, $v=y-6$ $\Rightarrow$ $x=u+1$, $y=v+6$

$\begin{cases} v-6u=\sqrt{uv} \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases}$

$\begin{cases} v^2-12vu+36u^2=uv \\ 9u^2+v^2=90 \end{cases}$

$v-6u>0$

Заметим:

1) $v^2-13vu+36u^2=0$ имеем $v=4u$

$t=\frac{v}{u}$ или $v=9u$

$t^2-13t+36=0$

$(t-9)(t-4)=0$

$t=\left[\begin{array}{l}4\\9\end{array}\right.$

1) $4u-6u\geqslant 0 \Rightarrow u\leq 0$

2) $9u-6u\geqslant 0 \Rightarrow u\geqslant 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|26x-x^2|^{\log_5 12}+(26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|26x-x^2|^{\log_5 12}+(26x-x^2) \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}$

Пусть $26x-x^2=t$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

Пусть $\log_5 t = y$

$12^y+5^y \geq 13^y$

$12^y+5^y-13^y \geq 0$

$\left(\frac{12}{13}\right)^y+\left(\frac{5}{13}\right)^y-1 \geq 0$

$y=2$ - достиг. равенство $\Rightarrow y\in(-\infty, 2]$

$\log_5 t \leq 2 \iff t\in(0;25]$

Осталось 2 неравенства:

1) $26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

$x\in(0, 26)$

2) $26x-x^2 \leq 25$

$x^2-26x+25 \geq 0$

$(x-25)(x-1)\geq 0$

$x\in(-\infty, 1] \cup [25, +\infty)$

Объединяем получим: $x\in(0, 1] \cup [25, 26)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$= -\frac{2}{17}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = 2\cdot tg\alpha\cdot\cos^2\alpha = \frac{2\cdot tg\alpha}{tg^2\alpha+1}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+tg^2\alpha}$ из основного тригонометрического тождества

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}$ Получаем 2 случая:

1 случай

$\sin(2\alpha)+4\cdot\cos(2\alpha) = -1$

$\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1} + \frac{4-4\cdot tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$

$2\cdot tg\alpha + 4 - 4tg^2\alpha + tg^2\alpha + 1 = 0$

$-3\cdot tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0$

$\Updownarrow$

$tg\alpha = \left[\begin{array}{l} -1 \\ \frac{5}{3} \end{array}\right.$

2 случай

$\sin(2\alpha) - 4\cos 2\alpha = -1$

$\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1} - \frac{4-4tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$

$2tg\alpha + 4tg^2\alpha - 4 + tg^2\alpha + 1 = 0$

$5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$

$\Updownarrow$

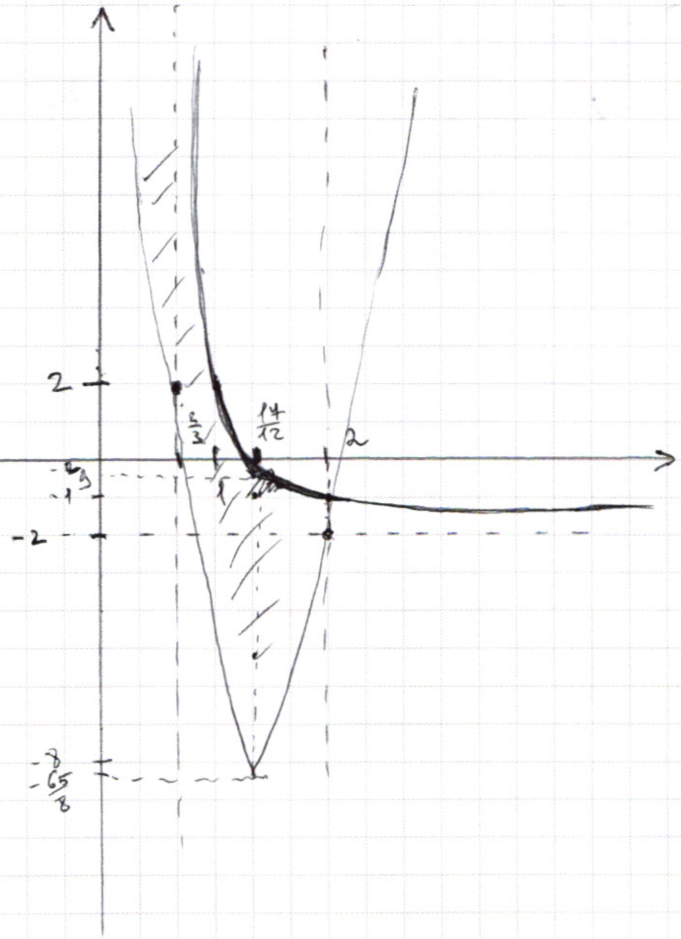
$tg\alpha = \left[\begin{array}{l} -1 \\ \frac{3}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{3}{5}, \frac{5}{3}, -1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.



$h(x) = ax + b$

$h(2) \geqslant -2$

$b \geqslant 2$

$-1 = 2a + b \geqslant -2$

построим график $f(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$: $x = \frac{2}{3}$ - верт. асимпт.

$y = -2$ - горизонт. асимпт.

$f(1) = \frac{2}{1} = 2 \quad f(2) = \frac{-4}{4} = -1$

$f\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{-2}{9}$

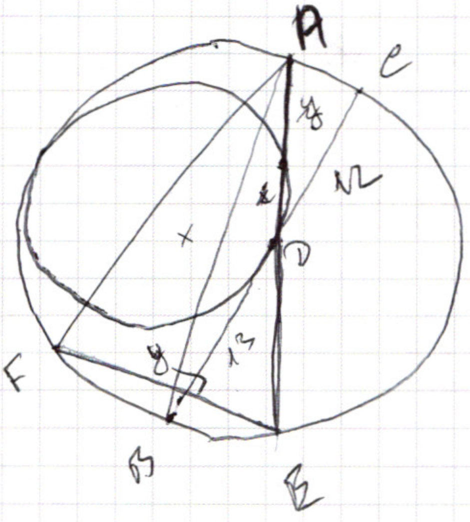
построим график $g(x) = 18x^2 - 51x + 28$, $x_b = \frac{17}{12}$

$g(x_b) = -\frac{65}{8}$

$g\left(\frac{2}{3}\right) = 18\,\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$

$g(2) = 4\cdot 18 + 28 - 102 = -2$

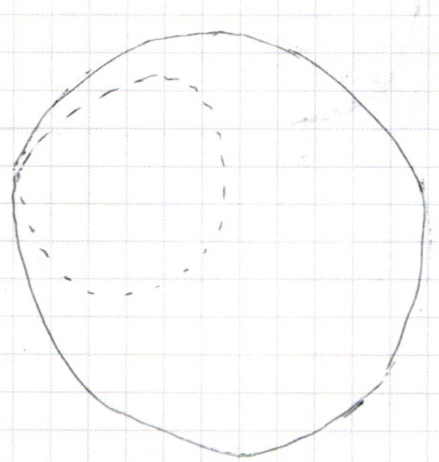
4.



$yx =$

$(13+12)^2 = xy$

$25^2 = xy$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

6.

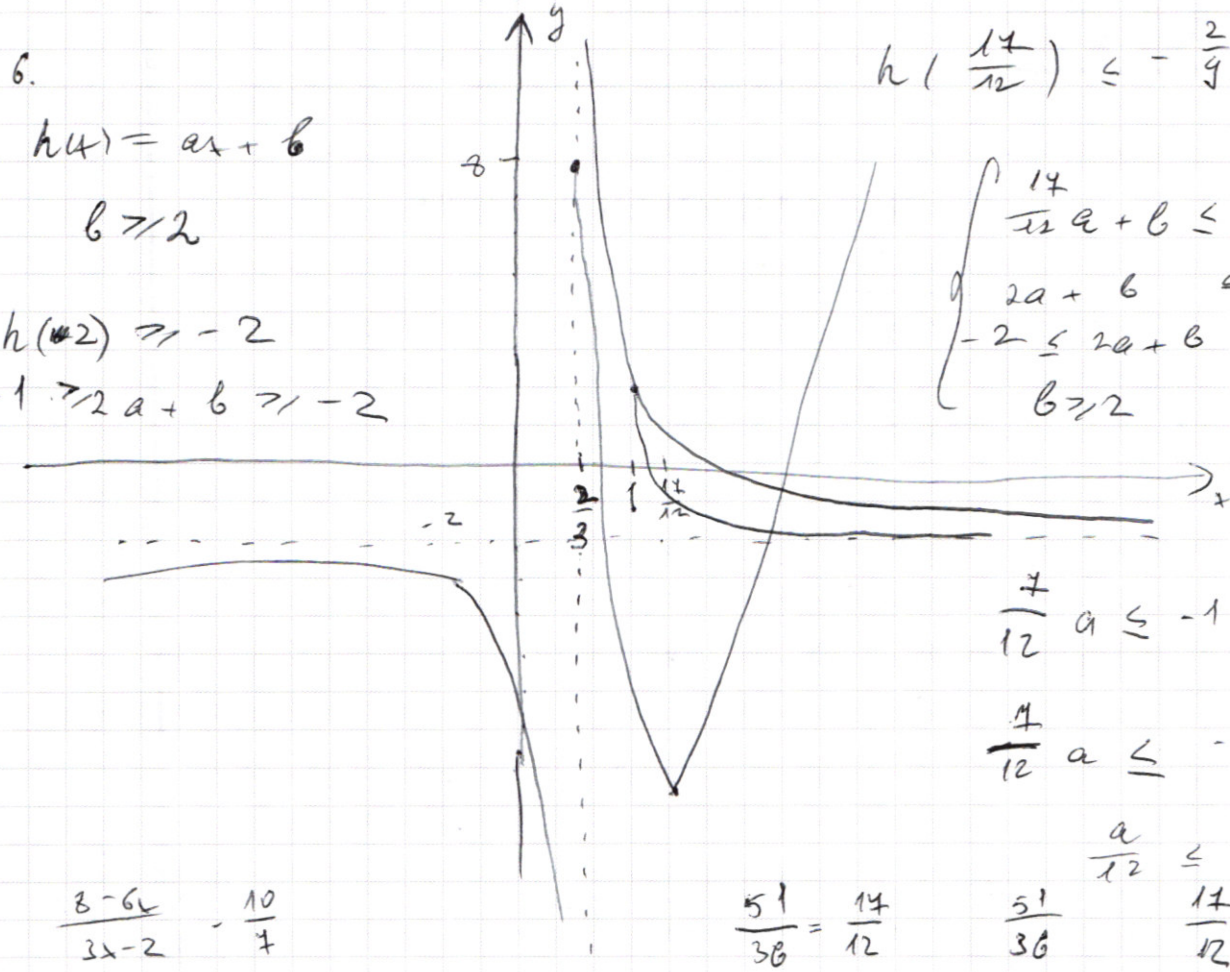
$h(x) = ax + b$

$b \geq 2$

$h(2) \geq -2$

$-1 \geq 2a + b \geq -2$

$h\left(\frac{17}{12}\right) \leq -\frac{2}{9}$



$$\begin{cases} \frac{17}{12}a + b \leq -\frac{2}{9} \\ 2a + b \leq -1 \\ -2 \leq 2a + b \\ b \geq 2 \end{cases}$$

$\frac{7}{12} a \leq -1 + \frac{2}{9}$

$\frac{7}{12} a \leq -\frac{7}{9}$

$\frac{a}{12} \leq -\frac{1}{9}$

$\frac{a}{4} \leq -\frac{1}{3}$

$a \leq -\frac{4}{3}$

$\frac{8-6x}{3x-2} \quad \frac{10}{7}$

$\frac{51}{36} = \frac{17}{12} \qquad \frac{51}{36} \qquad \frac{17}{12}$

$\frac{14}{5} \qquad \frac{8-6}{3-2} = \frac{2}{1}$

$y = \frac{8-6x}{3x-2} = 3x-2$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{\frac{8}{x} - 6}{3 - \frac{2}{x}} = -2 \qquad \frac{289}{}$

$\frac{\cancel{105}}{\cancel{35}} \cdot \frac{10}{\cancel{10}} b$

$b \leq \frac{10}{6}$

$17a + 12b \leq -\frac{12 \cdot 2}{9} \qquad \frac{35}{10} \qquad 18\frac{4}{9} = 8$

$17a + 8,5 b \leq -8,5 \qquad \frac{8 - \frac{17}{2}}{} \qquad \frac{17}{2}$

$3,5 b \leq -\frac{24}{9} + \frac{35}{10} \quad \frac{17}{4} - 2$

$\frac{289}{12 \cdot 12} \cdot 18 - \frac{51 \cdot 17}{12} + 28$

$\frac{289}{8} - \frac{289}{4} + 28$

$\frac{32 - 54}{17 - 8} = -\frac{2}{9}$

$-\frac{24}{9} + \frac{17}{2}$

$-\frac{289}{8} + 28$

$-\frac{48 + 9 \cdot 17}{18} = \frac{153 - 48}{} \frac{105}{18} \qquad 160 + 64 \qquad 224 - 289 = -65$

$\frac{35}{10} b \leq \frac{105}{18} \qquad -\frac{65}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$(3x-3)$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$(y-6x)^2=xy-6x-y+6$

$y(x-1)-6(x-1)$

$=(x-1)(y-6)$

$=(y-6x)^2$

$(y-6x)^2+6x+y-6-xy=0$

$$\begin{cases} (y-6x)^2+2(3x-3)+(y-6)-xy=-6 \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$y^2-12xy+36x^2$

$$\begin{cases} (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$15(y-6x)^2+30(3x-3)+15(y-6)-15xy+(3x-3)^2$

$+(y-6)^2=0$

$c^2=ab$

$9a^2+b^2=90$

$(3x+3-y)^2+6(y-6x)^2=90$

$9a^2+6ab+b^2=90+6c^2$

y^2+36x^2-12xy

$(3a+b)^2=90+6c^2$

$3x-3-y+6$

$3x+3-y$

$(3x-3+y-6)^2=90+6(y-6x)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)