МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N5. 1) $f(1\cdot 1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 0$

2) $f(1) = f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right) \overset{\text{т.к. (1)}}{\Leftrightarrow} 0 = f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right)$

$f\left(\frac{1}{k}\right) = -1 \cdot f(k)$

3) Когда $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$?

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$ согласно (2)

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$ тогда и только тогда, когда $f(x) < f(y)$

4) Теперь ясно, что ответ на задачу — это кол-во таких (x, y): $f(x) < f(y)$ При: $4 \le x, y \le 28$

5) $f(1) = 0$ $f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$ (2 - простое). $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$ $f(4) = f(2) + f(2) = 0$ $f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$ $f(6) = f(2) + f(3) = 0$ $f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$ $f(8) = f(2) + f(4) = 0$ $f(9) = f(3) + f(3) = 0$ $f(10) = f(2) + f(5) = 1$ $f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$ $f(12) = f(3) + f(4) = 0$ $f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$ $f(14) = f(2) + f(7) = 1$ $f(15) = f(3) + f(5) = 1$ $f(16) = f(2) + f(8) = 0$ $f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$ $f(18) = f(2) + f(9) = 0$ $f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$ $f(20) = f(4) + f(5) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$ $f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$ $f(24) = f(4) + f(5) = 0$ $f(25) = f(5) + f(5) =$

$= 2$ $f(26) = f(2) + f(13) = 3$ $f(27) = f(3) + f(9) = 0$

$f(28) = f(2) + f(14) = 1$

При всех ~~x от~~ t от 4 до 28 $f(t) \leq 5$ и $f(t) \geq 0$ и $f(t)$ - натур.

Пусть C_i, где i от 0 до 5 это количество таких α от 4 до 28, что $f(\alpha) = i$

Тогда: $C_0 = 9$

$C_1 = 8$

$C_2 = 3$

$C_3 = 2$

$C_4 = 12$

$C_5 = 1$

~~Пусть~~ Нам надо найти кол-во таких x, y, (от 4 до 28), что $f(y) > f(x)$

Если $y=0$ то ясно, что не найти такое x.

Если $y=1$, то кол-во способов выбрать y это C_1 а выбрать x это C_0 т.к. иначе будет x не меньше y а нам надо меньше т.е. итог: $C_0 \cdot C_1$

Если $y = j$ то выбрать y можно C_j способами а x - $(C_0 + C_1 + \ldots C_{j-1})$ (чтобы $f(x)$ был меньше)

всего: $C_j (C_0 + C_1 + C_2 \ldots C_{j-1})$ способов в этом случае

Тогда ясно, что суммируя все случаи

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

получим $C_1 \cdot C_0 + C_2(C_1+C_0) + C_3(C_0+C_1+C_2) + C_4(C_0+C_1+C_2+C_3) + C_5(C_0+C_1+C_2+C_3+C_4)$ – итоговый ответ на задачу.

Вычислим его:

$8 \cdot 9 + 3 \cdot (8+9) + 2 \cdot (3+8+9) + 2 \cdot (2+3+8+9) + 1 \cdot (2+2+3+8+9) =$

$= 8 \cdot 9 + 3 \cdot 17 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 22 + 1 \cdot 24 =$

$= 72 + 51 + 40 + 44 + 24 = 231$

Ответ: 231

№2. $\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

Ограничения: $\begin{cases} xy-6x-y+6 \geq 0 \\ \Updownarrow \\ \alpha \cdot B \geq 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} (y-6x) = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$

Пусть $x-1=\alpha$ $\quad y-6=B$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$(2\cancel{6}x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)\geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

x^2 $2x$ $\mathcal{D}$

$$f(t)=t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}$$

$$f'(t)=\cancel{0}\ \log_5 12\, t^{\log_5\frac{12}{5}}+1-\log_5 13\, t^{\log_5\frac{13}{5}}=0$$

$x^2-26x=\cancel{5}23$

$x^2-26x-5>0$

$26^2-4\cdot 5\cdot 4$

$x^2-26x=C$

$x^2-26x-C=0$

$\mathcal{D}=26^2+4\cdot C$

26
26

$\cancel{ax+b}$

$90+27\alpha^2=$

$$18x^2-x(51+a)+(28-b)\leq 0 \quad \text{для } x\in\left[\frac{2}{3};2\right]$$

$=13\alpha\cdot\sqrt{90-9\alpha^2}$

$\cancel{0}$ $\cancel{x_B}=$ $18x$

$$(y-6x)=\sqrt{(x-1)(y-6)}$$

$$\cancel{9(x-1)^2+(y-6)^2=90}$$

$810+280\cdot 27\cdot\alpha^2+$

$+27\cancel{7}\alpha^4=$

$=13\alpha^2\cdot(90-\alpha^2)$

$$\begin{cases}9(x-1)^2+(y-6)^2=90\\(y-6x)=\sqrt{(x-1)(y-6)}\end{cases}$$

$\alpha=x-1$

$\beta=y-6$

$$\begin{cases}9\alpha^2+\beta^2=90\\(\beta-6\alpha)=\sqrt{\alpha\cdot\beta}\end{cases}$$

$$\begin{cases}9\alpha^2+\beta^2=90\\\beta^2+36\alpha^2=13\alpha\beta\end{cases}$$

$$\sqrt{90-9\alpha^2}+36\alpha^2=13\alpha\cdot\sqrt{90-9\alpha^2}$$

$3\cancel{\sqrt{10-3\alpha^2}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда:

$$\begin{cases} (\beta-6\alpha) = \sqrt{\alpha\cdot\beta} \\ 9\alpha^2+\beta^2=90 \end{cases} \overset{\text{на ограничениях}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} (\beta-6\alpha)^2 = \alpha\beta \\ 9\alpha^2+\beta^2=90 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta^2+36\alpha^2=13\alpha\beta \quad (1) \\ 9\alpha^2+\beta^2=90 \quad (2) \end{cases}$$

~~$\beta^2 = 13\alpha\beta$. Откуда $\beta^2=90-9\alpha^2$ из (2)~~

~~Подставим в (1):~~

~~$(90-9\alpha^2)+36\alpha^2=13\alpha\sqrt{90-9\alpha^2}$~~ Прим: $90-9\alpha^2\geq 0$ т.к. $=\beta^2$.

$(90-9\alpha^2)+36\alpha^2=13\alpha\cdot\sqrt{90-9\alpha^2}$ – Если β – неотриц или же:

$(90-9\alpha^2)+36\alpha^2=13\alpha\cdot(-1)\cdot\sqrt{90-9\alpha^2}$ – если β – отриц. ~~(т.к. $\sqrt{\beta^2}$~~

1) ~~...~~ 1 случай:

$90+27\alpha^2=13\cdot\alpha\sqrt{(90-9\alpha^2)}$

$8100+2\cdot90\cdot27\cdot\alpha^2+27\cdot27\alpha^4=13^2\alpha^2\cdot90-13^2\alpha^2\cdot9\alpha^2$

Пусть $\alpha^2=t$

~~$8100+2\cdot90\cdot27t+27\cdot27t^2=13^2\cdot90t-13^2\cdot9t^2$~~

$\beta^2+36\alpha^2=13\alpha\beta$.

Если $\beta=0$ то $36\alpha^2=0$ $\alpha=0$, но это не удовлетворяет: $9\alpha^2+\beta^2=90 \Rightarrow \beta\neq0 \Rightarrow \beta^2>0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\beta^2 + 36\alpha^2 = 13\alpha\beta \quad | : \beta^2 > 0$

$1 + 36\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 = 13\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$

Пусть $\frac{\alpha}{\beta} = t$

$1 + 36t^2 = 13t$

$36t^2 - 13t + 1 = 0$

$D = 169 - 4 \cdot 36 = 25$

$t_1 = \frac{13+5}{72} = \frac{1}{4} \qquad t_2 = \frac{13-5}{72} = \frac{1}{9}$

Т.е. $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{4}$ или $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{9}$

$\beta = 4\alpha$ или $\beta = 9\alpha$

$9\alpha^2 + \beta^2 = 90 \qquad 9\alpha^2 + \beta^2 = 90$

$13\alpha^2 = 90 \qquad 18\alpha^2 = 90$

$\alpha^2 = \frac{90}{13} \qquad \alpha^2 = 5$

$\alpha = \pm\sqrt{\frac{90}{13}} = \pm 3\sqrt{\frac{10}{13}} \qquad \alpha = \pm\sqrt{5}$

~~Мы пришли к тому, что~~

$\beta = 4\alpha = \pm 12 \cdot \sqrt{\frac{10}{13}} \qquad \beta = 9\alpha = 9 \cdot \pm\sqrt{5} = \pm 9\sqrt{5}$.

Таким образом мы пришли к тому, что есть не более 4 решений относительно $(\alpha; \beta)$:

1) $\alpha = +3\sqrt{\frac{10}{13}}$ $\beta = \pm 12\sqrt{\frac{10}{13}}$

2) $\alpha = -3\sqrt{\frac{10}{13}}$ $\beta = -12 \cdot \sqrt{\frac{10}{13}}$

3) $\alpha = \sqrt{5}$ $\beta = 9\sqrt{5}$

4) $\alpha = -\sqrt{5}$ $\beta = -9\sqrt{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Проверим действительно ли они - решения. (не посторонние ли они) Также ясно что если какая-то пара α, β - решение (относительно α, β), то x y находятся линейно однозначно и будут решениями $\{x = \alpha + 1$ $y = \beta + 6\}$.

И таким образом найдем все решения.

Как нетрудно проверить: все решения подходят

Ответ: 1) $x = 3\sqrt{\frac{10}{13}} + 1$ $y = 12\sqrt{\frac{10}{13}} + 6$

2) $x = -3\sqrt{\frac{10}{13}} + 1$ $y = -12 \cdot \sqrt{\frac{10}{13}} + 6$

3) $x = \sqrt{5} + 1$ $y = 8\sqrt{5} + 6$

4) $x = -\sqrt{5} + 1$ $y = -8\sqrt{5} + 6$.

№3. $|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26 - x^2)}$.

ОДЗ: $26 - x^2 > 0$

На ОДЗ: $|x^2 - 26x| = 26 - x^2$

$$|26 - x^2|^{\log_5 12} + (26 - x^2) \geq 13^{\log_5 |26 - x^2|}$$

Пусть $26 - x^2 = t$

$$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$$ ~~переход~~

$$12^{\log_5 t} + t \geq 13^{\log_5 t}$$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$ $\quad t = 26x - x^2 \geq 0$

$\cancel{t^{\log_5 12}} = \quad t \geq 13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12} + t = t^{\log_{13} 5}$ $\quad t = 2$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12 - 1} + 1 + t^{\log_5 13 - 1} \geq 0$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} + t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$\Rightarrow$

$t = 125$

$12^{\log_5 t} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$\boxed{\begin{matrix}13 \\ 13\end{matrix}}$

$12^3 + \cancel{125}\, 5^3 < 13^3$

$t = 5^\alpha$

$12^\alpha + 5^\alpha \geq 13^\alpha$

$12^\alpha + 5^\alpha - 13^\alpha \geq 0$

$\ln 12 \cdot 12^\alpha + \ln 5 \cdot 5^\alpha - \ln 13 \cdot 13^\alpha$

$\left(\frac{12}{5}\right)^\alpha + 1 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^\alpha$ $\qquad 1 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^\alpha - \left(\frac{12}{5}\right)^\alpha$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $t = 5^{\alpha}$ (также α – существует т.к. $t > 0$).

$$12^{\log_5 5^{\alpha}} + 5^{\alpha} \geq 13^{\log_5 5^{\alpha}}$$

$$12^{\alpha} + 5^{\alpha} \geq 13^{\alpha} \quad | : 13^{\alpha}$$

$$\left(\frac{12}{13}\right)^{\alpha} + \left(\frac{5}{13}\right)^{\alpha} \geq 1$$

л.ч. убывающая функция как сумма двух убывающих. Также при $\alpha = 2$ достигается равенство $\Rightarrow$ при $\alpha \leq 2$ выполняется нер-во отн. t

$$t \leq 5^{2} \text{ – подходят (при них верно исходное нер-во с учетом ОДЗ).}$$

$$t \leq 25.$$

~~Поймем при каких x: $26 - x^2 \leq 25$ (и при этом > 0 – ограничение).~~

$$\cancel{1 \leq x^2}$$

$$\cancel{|x| > 1}$$

~~Когда $26 - x^2$~~

$$\cancel{26:} \quad \cancel{0 < 26x - x^2 \leq 25}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Необходимо и достаточно:

$$\overset{(1)}{0 <} x^2 - 26x \overset{(2)}{\leq} 25$$

$x^2 - 26x > 0$

т.е. при $x \leq 0$ или $x > 26$.

$x^2 - 26x \leq 25$

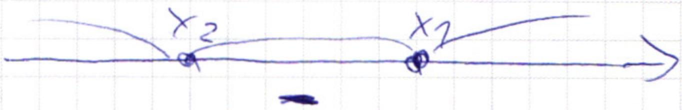
$x^2 - 26x - 25 \leq 0$

~~$(x+1)(x-25)$~~

$x^2 - 26x - 25 = 0$

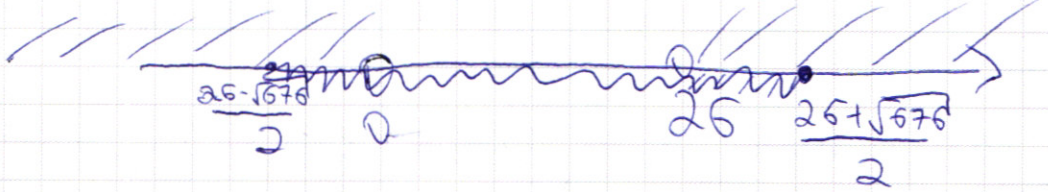
$D = 26^2 + 100 = 676$

$x_1 = \frac{26 + \sqrt{676}}{2}$ $\quad x_2 = \frac{26 - \sqrt{676}}{2}$



При $x \in [x_2; x_1]$: $x^2 - 26x \leq 25$

Объединим (1) и (2):



Итоговый ответ:

$$\left[\frac{26-\sqrt{676}}{2}; 0\right) \cup \left(26; \frac{26+\sqrt{676}}{2}\right)$$

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) \Rightarrow$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = \frac{-2}{17}$

$2\cdot\frac{-1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = \frac{-2}{17}$

Откуда $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

Тогда ~~sin~~ $\sin 2\beta = \frac{16}{\sqrt{17}}$ или $\sin 2\beta = -\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{17}}$

~~sin~~ 1) $\sin 2\beta = \frac{16}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{16}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 16\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha + 16\cdot(1-2\sin^2(\alpha\cdot 2)) = -1$

$t + 16(1-2t^2) = -1$, где $t = \sin 2\alpha$

$-32t^2 + t + 17 = 0$

~~$D = 1-4\cdot 16\cdot$~~ $D = 33^2$ $t_1 = \frac{-1+33}{-32} = -1$ $t_2 = \frac{-34}{-32}$ т.к.

$D = 1+4\cdot 32\cdot 17 =$

$\sin 2\alpha = -1$

$2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, n-целое

$\alpha = \frac{-\pi}{4} + \pi n$, n-целое

~~tg α не опр.~~

$\underline{tg\,\alpha = -1}$

2) $\sin 2\beta = \frac{-16}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{\cos 2\alpha \cdot 16}{\sqrt{17}} = \frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 16\cos 2\alpha = -1$

$\gamma - 16(1 - 2\gamma^2) = -1$, где $\gamma = \sin 2\alpha$

$32\gamma^2 + \gamma - 15 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 32(-15) = 32 \cdot 60 + 1 = 1921$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ ..... $f(1)=f(k)+f(\frac{1}{k})$ ~~f(k)=-f~~ $f(\frac{1}{k})=-f(k)$

$\boxed{}$ $f(1)=0$ $f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(4)=0$ $f(5)=1$

$f(6)=0$ $f(7)=1$ $f(8)=0$ $f(9)=0$ $f(10)=1$

$f(11)=2$ $f(12)=0$ $f(13)=3$ $f(14)=1$ $f(15)=1$

$f(16)=0$ $f(17)=4$ $f(18)=0$ $f(19)=4$ $f(20)=1$ $f(21)=1$

$f(22)=2$ $f(23)=5$ $f(24)=0$ $f(25)=2$ $f(26)=3$

$f(27)=0$ $f(28)=1$

Cnt0 Cnt1 + Cnt2 Cnt3 Cnt4 C_5

~~Ct0~~ Cnt1 · cnt0 $C_2\cdot(C_1+C_0)$. $C_3(C_0+C_1+C_2)$

$C_4(C_0+C_1+C_2+C_3)$. $+C_5(C_0+\dots C_4)$.

$$\begin{array}{r} 72 \\ +51 \\ \hline 123 \\ +40 \\ \hline 163 \\ +44 \\ \hline 207 \\ +24 \\ \hline 231 \end{array}$$

$144\cdot\frac{10}{13}$:

$(153)\cdot 10$

$$\begin{array}{r} 72 \\ +51 \\ \hline 123 \\ +40 \\ \hline 163 \\ +44 \\ \hline 207 \\ +24 \\ \hline 231 \end{array}$$

$13\lambda\beta - 3\lambda^2 = 90 - 9\lambda^2$

$2\lambda^2 - 13\lambda\beta + 90 = 0$

$\cos^2 2\beta = \frac{1}{17}$ $\sin^2 2\beta = \frac{16}{17}$ $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(7)=1$ $f(11)=2$ $f(13)=3$

$f(17)=4$ $f(19)=4$ $f(23)=5$

$f(2k)=f(k)+f(2)$. $f(k)=f(2k)$ $f(35)=2$

$f\left(\frac{1}{2}\right)=0$ $f(2^n)=0$ $f\left(\frac{k}{2}\right)=f(k)$

$f\left(\frac{1}{2^n}\right)=0$

$f(3)=0$ $f(3k)=f(k)+f(3)$ $f(3^l)=0$ $f(2^p)=0$

$f(11l)=f(11)+f(l)$

$f(11l)-f(l)=2$

$f\left(\frac{1}{11}\right)=\frac{1}{2}$

$f(13l)=f(l)+3$ $f(1)=f\left(\frac{1}{13}\right)+3$

$f\left(\frac{1}{13}\right)=-3$

$f(1)=f\left(\frac{1}{k}\right)+f(k)$ $f\left(\frac{1}{k}\right)=-f(k)$

$x - y$ $f(x)<f(y)$

$f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ $f(x)-f(y)<0$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt{17}}$ $2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=\frac{-2}{17}$

$\sin(2\alpha+3\beta)\cdot\cos\beta\beta=\frac{-1}{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{17}$ $-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta=\frac{-1}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=\boxed{\frac{p}{4}}$ p-простое $(x-1)(y-6)$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\beta=$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y-45=0 \end{cases}$$

$9-9$

$9x^2-18x\cancel{+36}\cancel{-36}+y^2-12y+36-36-45=0$

$(3x-3)^2-9+(y-6)^2-36$

$f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(7)=2$ $f(11)=2$

$f(13)=3$ $f(17)=4$ $f(19)=4$ $f(23)=5$

~~$f(2\cdot1)=0+f(1)$~~ $f(1)=0$ ~~$f(0)=f(7)+f(0)$~~

$(3x-3)^2-9+(y-6)^2-36=45$

$y^2-12yx+36x^2$

$\frac{8}{\sqrt{3}}$ $10+1440$ -80

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

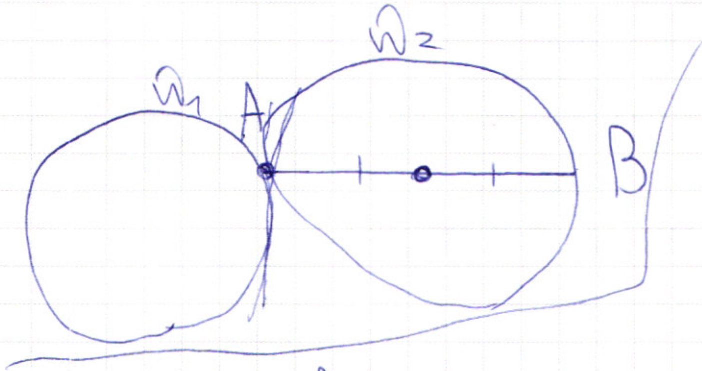
$\sin(2\alpha+2\beta)=$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cdot\cos\beta$

$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin2\alpha\cdot\cos\cancel{2\alpha}\,2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=\frac{-1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{-1}{\sqrt{17}}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=\frac{-2}{17}$

$2\cdot\frac{-1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{-2}{17}=\frac{2\cdot-2}{\sqrt{17}}\qquad\cos2\beta=\frac{-2}{\sqrt{17}}$

$\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$(y-6x)^2=(x-1)(y-6)$

$\alpha\ \beta$

$\alpha\cdot\beta$

$(\beta-6\alpha)^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\cancel{t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}}$

$\cancel{t(1+t^{1-\log_5 12}-\log_5 13)}$

$9\alpha^2+5\beta^2=90$

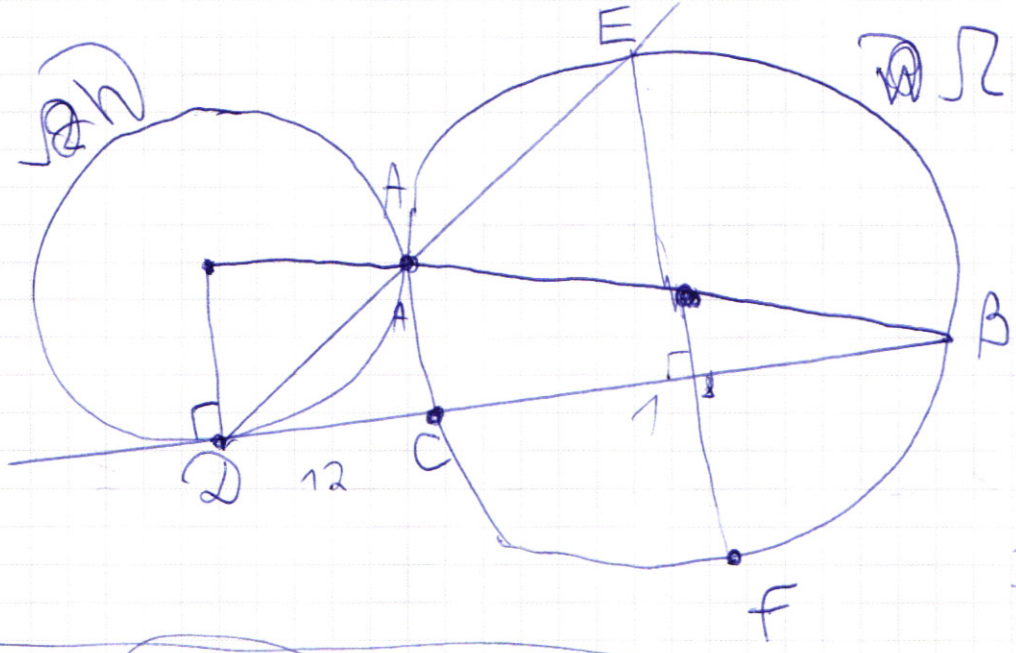
$(26-x^2)^{\log_5 12}+(26-x^2)\geq 13^{\log_5(26-x^2)}$

$t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$

$\cancel{t^1\geq t}\qquad 1+t^{1-\log_5 12}\geq t^{\log_5\frac{13}{12}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$r_1^2 + r_2^2 = 90$

$9^2 + 3^2$

1 6

10 9

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$\begin{array}{r} 180 \\ +144 \\ \hline 324 \end{array}$

$y^2 - 12y - 45 + (9x^2 - 18x)$

$D = 144 + \boxed{4 \cdot 45}$

180

$x = 2$

$y = \frac{12 \pm 18}{2} = 15$

$y = \frac{12 - 18}{2} = -3$

2 -3 $f(ab) = f(a) + f(b)$

$t = 13^{\log_5 t} - 12^{\log_5 t}$

$\boxed{f(2)}$

$f(4) = f(2) + f(2) =$

$\boxed{\frac{1}{25} = \frac{1}{13} - \frac{1}{12}}$

$t \geq 1$

$t^{\log_5 12^2} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} (y-6x) = \sqrt{(x-7)(y-6)} \\ 9(x^2-2x+1)-9+(y^2-12y+36)-36=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-6x)^2 = (x-1)(y-6) \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$(\beta-6\alpha)^2 = \alpha\beta$

$9\alpha^2+\beta^2=90$

$\beta^2+36\alpha^2-12\beta\alpha=\alpha\beta$

$9\alpha^2+\beta^2=90$

$\beta^2=90-9\alpha^2$

$90+27\alpha^2-13\alpha\beta=0$

$27\alpha^2-13\alpha\beta+90=0$

$x-1=\alpha$

$y-6=\beta$

$$\begin{cases} \beta-6\alpha=\sqrt{\alpha\beta} \\ 9\alpha^2-9+\beta^2-36=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\beta-6\alpha)^2=\alpha\cdot\beta \\ 9\alpha^2+\beta^2=90 \end{cases}$$

$\beta^2+36\alpha^2=13\alpha\beta$

$\beta^2+9\alpha^2=90$

$f(5)=1$

$f(10)=1$

$f(\frac{7}{2})$

$f(3)$

$\boxed{f(\frac{1}{k})=f(1)+f(\frac{1}{k})}$

$f(2)=0$

$f(2k)=f(k)+f(2)$

$f(4)=0$

$f(8)=0$

$f(16)=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$3\sqrt{10}$

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geq ax+b\geq 18x^2-51x+28$$

$\left(\frac{2}{3};2\right)$

$(y-6x)=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$(3x-3)^2-9+(y-6)^2-36=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90=3\sqrt{10}$

33

989

16 · 17 = 112 + 16 = 272

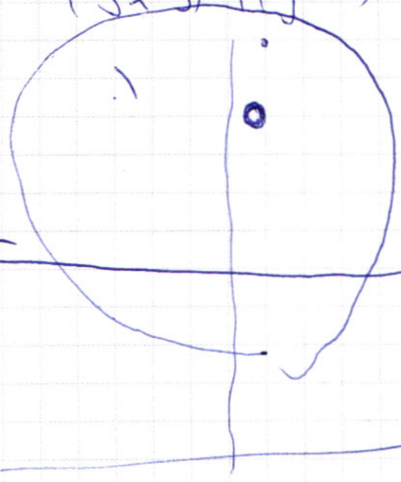
1088

33 · 33 = 99 + 99 = 1089

1 6

~~7~~ 14

9 12



$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

y^2-12y

6

18 · 18 = 144 + 18 = 324

$9x^2-18x+(y^2-12y-45)=0$

$D=324-36y^2+36\cdot 12y+36\cdot 45$

$9-y^2+12y+45$

~~4-9+12~~+5

$3-12\cdot 4+12\cdot 4+15$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y-6x=\sqrt{xy-6x+y+6}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$9x^2-18x+(y^2-12y+45)$

$x_1+x_2=18$

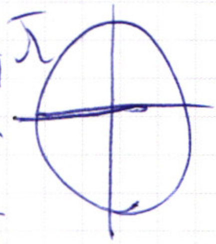
$x_1\cdot x_2=y^2-12y+45$

$12^3+\cancel{125}\ 5^3=13^3$

y

0

$\frac{3}{4}\pi$



$\alpha=$

$2\alpha=\frac{3}{4}\pi$

$2\alpha=-\frac{\pi}{2}$

$f(t)$

$t^{\log_5 12}+t\geq 13^{\log_5 t}$

$t>1$

$2\alpha=1{,}5\pi$

$f(t)\ t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}\geq 0$

$f'(t)=\log_5 12\cdot t^{\log_5 12-1}+1-\log_5 13\cdot t^{\log_5 13-1}\geq 0$

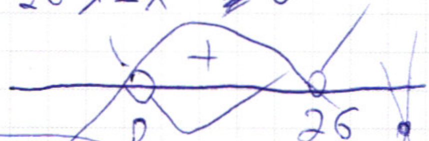
$1=\log_5 13\, t^{\log_5 13-1}-\log_5 12\, t^{\log_5 12-1}$

$\log_5 13\, t^{\log_5 13-1}-\log_5 12\, t^{\log_5 12-1}$

$\alpha t^{\alpha-1}\qquad \beta t^{\beta-1}$

$26x-x^2\geq 0$

$+$ от 0 до 26



$12^{\log_5 t}+t\geq 13^{\log_5 t}$

~~144+25 ≥ 160~~

$\frac{-13}{2\cdot -1}=6{,}5$

$12^{\log_5 t}+t=13^{\log_5 t}$

$t=13^{\log_5 t}-12^{\log_5 t}$

$\frac{t}{\exp}=\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_5 t}-1$

$13^\alpha-12^\alpha$