МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, тогда $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, ~~если $\cos\alpha \neq 0$, то $tg\alpha$~~

$\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{-4\sin 2\alpha} = -\frac{1}{4}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

если $\sin\alpha = 0$, то $\cos\alpha = \pm 1$, $\sin 2\alpha = 0$, $\cos 2\alpha = 1$

тогда $0 - 1 = -1 \Rightarrow tg\alpha = 0$

если $\sin\alpha \neq 0$, тогда $tg\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -\frac{4\sin 2\alpha}{\sin 2\alpha} = -4$

Ответ: при $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $tg\alpha = -\frac{1}{4}$

при $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $tg\alpha = 0$ если $\sin\alpha = 0$, $tg\alpha = -4$ если $\sin\alpha \neq 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

② $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$

(1) $(3y-2)+2(1-x)=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

Сделаем замену, пусть $3y-2=a$, $x-1=b$, тогда

$a-2b=\sqrt{ab}$

$\begin{cases} a^2+4b^2-4ab=ab \\ ab\geq 0 \end{cases}$; $a^2-5ab+4b^2=0$

1) если $b=0$, то $a=0$

2) если $b\neq 0$, тогда в уравнение поделим на b^2

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$

$\left(\frac{a}{b}-1\right)\left(\frac{a}{b}-4\right)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=b \\ a=4b \end{array}\right.$; $\begin{array}{l} 3y-2=x-1 \\ 3y-2=4x-4 \end{array}$; $\begin{array}{l} x=3y-1 \\ x=\frac{3y+2}{4} \end{array}$

3) подставим $b=0$ и $a=0$ во (2) уравн.

$a=0 \Rightarrow y=\frac{2}{3}$; $b=0 \Rightarrow x=1$

$3+3\cdot\frac{4}{9}-6-4\cdot\frac{2}{3}=4$

$\frac{4}{3}-\frac{8}{3}=7$; $-\frac{4}{3}=7$ $\varnothing$

$y=\frac{2}{3}$; $x=1$ – не решения

4) подставим $x = 3y - 1$ во (2) уравн. $(a = b)$

$3(3y-1)^2 + 3y^2 - 6(3y-1) - 4y = 4$

$27y^2 - 18y + 3 + 3y^2 - 18y + 6 - 4y = 4$

$30y^2 - 40y + 5 = 0$; $6y^2 - 8y + 1 = 0$

$D/4 = 16 - 6 = 10$

$y = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{6}$, $x = \frac{4 \pm \sqrt{10}}{2} - 1$

при $y = \frac{4+\sqrt{10}}{6}$; $x = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$

при $y = \frac{4-\sqrt{10}}{6}$; $x = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$

если $a = b$, то $ab \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 0$ - всегда выполн.

5) подставим $x = \frac{3y+2}{4}$ $(a = 4b)$

$3 \cdot \frac{(3y+2)^2}{16} + 3y^2 - 6 \cdot \frac{3y+2}{4} - 4y = 4$

$\frac{3}{16}(9y^2 + 12y + 4) + 3y^2 - \frac{3}{2}(3y+2) - 4y = 4$

$3(9y^2 + 12y + 4) + 48y^2 - 24(3y+2) - 64y = 64$

$75y^2 - 100y - 100 = 0$

$3y^2 - 4y - 4 = 0$; $D/4 = 4 + 3 \cdot 4 = 16$

$y = \frac{2 \pm 4}{3} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -2/3 \end{array}\right.$

при $y = 2$; $x = 2$

при $y = -\frac{2}{3}$; $x = 0$

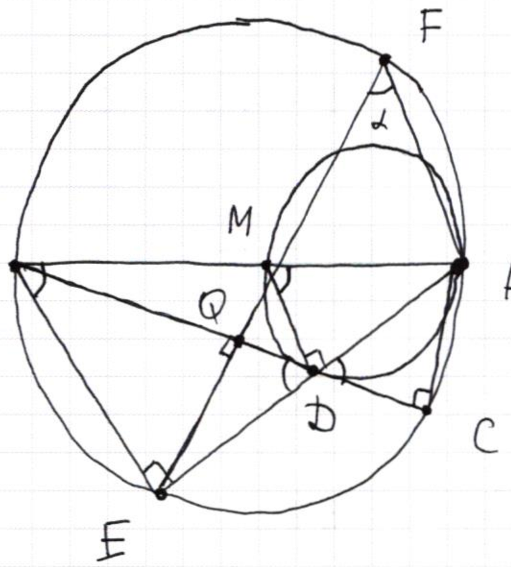
если $a = 4b$, то $ab \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 0$ - всегда выполн.

Ответ: $\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2}; \frac{4+\sqrt{10}}{6}\right)$; $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$; $(2;2)$; $\left(0; -\frac{2}{3}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

MA - диам. меньш. окр. (т.к. центры окр. лежат на одной прямой)



r_1 - радиус большой
r_2 - радиус маленькой
$\angle AFE = \alpha$ - ?
S_{AEF} - ?

$BD = \frac{13}{2}$; $CD = \frac{5}{2}$

$\angle EBA = \alpha$ (т.к. опираются на одну дугу)

$\angle MDA = \frac{\pi}{2}$ (т.к. опирается на диам. меньш. окр.)

$\angle BEA = \angle BCA = \frac{\pi}{2}$ (т.к. опираются на диам. больш. окр.)

Рассмотрим $\triangle BEA$ и $\triangle MDA$

$\angle A$ - общий => подобны по двум углам и $\angle DMA = \alpha$

BC - касательная к окр. с меньш. радиусом => $\angle DMA = \angle ADC = \alpha$ как углы между хордой (AD) и касательной и углом опирающ. на дугу, которую стягивает хорда AD.

$\angle BDE = \angle ADC$ (как вертикальные), тогда

$\angle EBD = \frac{\pi}{2} - \alpha$, а $\angle DBA = 2\alpha - \frac{\pi}{2}$

$2r_1 \cos(2\alpha - \frac{\pi}{2}) = 9$; $2r_1 \sin 2\alpha = 9$ (из $\triangle BCA$)

$$\begin{cases} DC = AD\cos\alpha \text{ (из } \triangle ADC) \\ 2r_2 \sin\alpha = AD \text{ (из } \triangle MDA) \end{cases} \Rightarrow DC = 2r_2 \sin\alpha\cos\alpha = r_2 \sin 2\alpha$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \dfrac{DC}{r_2} \\ \sin 2\alpha = \dfrac{9}{2r_1} \end{cases} \Rightarrow \frac{DC}{r_2} = \frac{9}{2r_1}; \quad 5r_1 = 9r_2$$

По теореме касательной и секущей:

$BD^2 = BM \cdot BA$

$$\begin{cases} \dfrac{169}{4} = (2r_1 - 2r_2)\cdot 2r_1; \quad 169 = r_1^2 - r_1 r_2 \\ r_2 = \dfrac{5r_1}{9} \end{cases}$$

$169 = r_1^2 - r_1 \cdot \dfrac{5r_1}{9} = r_1^2 - \dfrac{5}{9}r_1^2$

$169 = \dfrac{4}{9}r_1^2; \quad r_1^2 = \dfrac{169 \cdot 9}{4}; \quad r_1 = \dfrac{13\cdot 3}{2}$

тогда $r_2 = \dfrac{13 \cdot \cancel{3}}{2} \cdot \dfrac{5}{\cancel{9}_3} = \dfrac{13 \cdot 5}{6}$

$$\begin{cases} BD \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right) = BE \quad (\text{из } \triangle BED) \\ AB \cos \alpha = BE \quad (\text{из } \triangle ABE) \end{cases}$$

$\dfrac{BD}{2r_1} \cdot tg\alpha = 1 \Rightarrow tg\alpha = \cancel{2} \cdot \dfrac{13\cdot 3}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{2}{13} = 6$

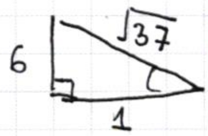
$\alpha = arctg\, 6$

Рассмотрим $\triangle QDE$ – прямоуг.

$\angle E = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, тогда в $\triangle FAE$ $\angle FAE = \dfrac{\pi}{2}$

т.к. т. E и F лежат на большой окр, ~~то~~ а $\angle FAE = \dfrac{\pi}{2}$ опирающ. на EF, то EF – диаметр больш. окр.

$tg\alpha = 6$



(по т. Пифагора)

$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{37}}; \quad \sin\alpha = \dfrac{6}{\sqrt{37}}$

тогда $FA = 2r_1 \cdot \cos\alpha = 13\cdot 3 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{37}}$

$EA = 2r_1 \cdot \sin\alpha = 13 \cdot 3 \cdot \dfrac{6}{\sqrt{37}}$

$S_{AEF} = \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot 13\cdot 3 \cdot 13 \cdot 3 \cdot \dfrac{\cancel{6}^{3}}{37} = \dfrac{4563}{37}$

Ответ: $r_1 = \dfrac{39}{2}; \; r_2 = \dfrac{65}{6}; \; \alpha = arctg 6, \; S_{AEF} = \dfrac{4563}{37}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

из $\log_4(x^2+6x)$ следует, что $x^2+6x>0 \Rightarrow$ модуль можно снять

сделаем замену $x^2+6x = t > 0$

$3^{\log_4 t} + t \geq 5^{\log_4 t}$; $t = 4^{\log_4 t}$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

сделаем замену $\log_4 t = b$

$3^b + 4^b \geq 5^b$

т.к. $5^b > 0$, то при делении на 5^b неравенство не поменяет знак

$\left(\frac{3}{5}\right)^b + \left(\frac{4}{5}\right)^b \geq 1$

Рассмотрим функцию $f(b) = \left(\frac{3}{5}\right)^b + \left(\frac{4}{5}\right)^b$

$\frac{3}{5} < 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^b$ убывающая функц. (на обл. опред.)

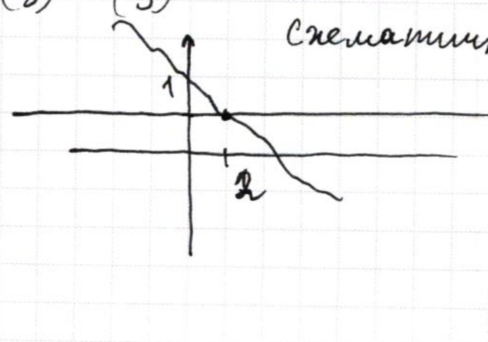
аналогично $\left(\frac{4}{5}\right)^b$ убывающая функц.

сумма убывающих функций — убывающ. функция

$f(b)$ убывает на области определения)

1 - константа

Заметим, что при $b=2$ $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$



$f(b)$ убывающая функц., то

при $b > 2$ $f(b) < 1$

при $b \leq 2$ $f(b) \geq 1$

тогда $b \leq \cancel{1}2$

$\log_4 t \leq 2$; $\log_4 t - \log_4 16 \leq 0$

$$\begin{cases} t - 16 \leq 0 \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 6x - 16 \leq 0 \\ x^2 + 6x > 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} (x+8)(x-2) \leq 0 \\ x(x+6) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in [-8; 2] \\ x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow \quad x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

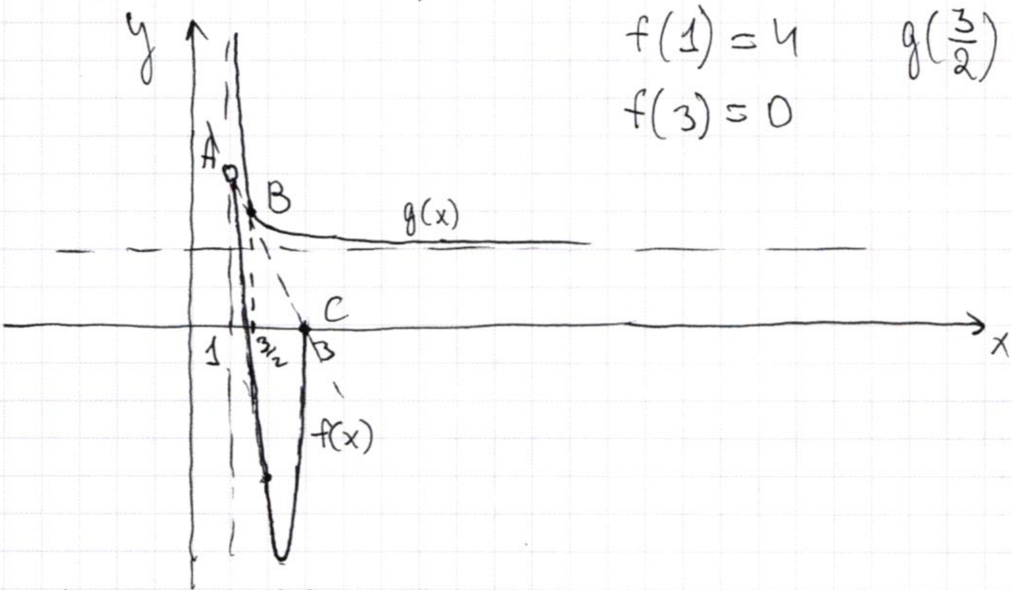
(6) $\underbrace{\frac{4x-3}{2x-2}}_{g(x)} \geq ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30 = f(x)$

$x \in (1;3]$

Изобразим на координатной плоскости

$A(1;4)$
$B(\frac{3}{2};3)$
$C(3;0)$

$f(1)=4$ $g(\frac{3}{2})=3$
$f(3)=0$



рассмотрим прямую проходящую через координаты $(1;4)$; $(3;0)$

$$\begin{cases} 4 = a+b \\ 0 = 3a+b \end{cases} \Rightarrow 2a=-4;\ a=-2,\ b=6$$

$y = -2x+6$

$$g'(x) = \left(2 + \frac{1}{2x-2}\right)' = -\frac{2}{(2x-2)^2}$$

$$\begin{cases} g'(\frac{3}{2}) = -\frac{2}{1} = -2 \\ y(\frac{3}{2}) = 3 \end{cases} \Rightarrow (y=-2x+6) \text{ – касательная } g(x) \text{ в т. } (\tfrac{3}{2};3)$$

тогда т. A, B, C лежат на одной прямой
$\Rightarrow$ нет больше прямых удовл. условию задачи

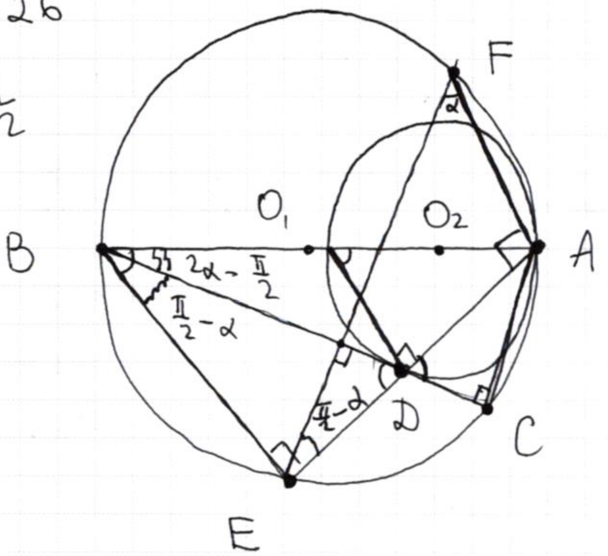
Ответ: $(-2;6)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$104 \,|\, 4$, 26; -8, 24

$\frac{\pi}{2}-\alpha$

$\alpha-\frac{\pi}{2}+\alpha=2\alpha-\frac{\pi}{2}$



α – ? ; S_{AEF} – ?

$r_1; r_2$ – ?

$BD=\frac{13}{2}$; $CD=\frac{5}{2}$

$\frac{2r_2}{2r_1}=\frac{AD}{AE}$

$\frac{r_2}{r_1}=\frac{AD}{AE}$

$\frac{AE}{\sin 2}$

$\frac{9}{2r_1}=\frac{5}{2r_2}$

$9r_2=5r_1$

$r_2=\frac{5r_1}{9}$

$(2r_1-r_2)\cdot 2r_1=\frac{169}{4}$

$8r_1(2r_1-r_2)=169$

$2r_1\sin 2\alpha=9$

$16r_1^2-8r_1\cdot\frac{5r_1}{9}-169=0$ $\quad 16r_1^2-8r_1r_2-169=0$

$16r_1^2-\frac{40}{9}r_1^2-169=0$ $\quad \frac{D}{4}=16r_2+16\cdot169=16(r_2+169)$

$\begin{cases}\sin 2\alpha=\frac{9}{2r_1}\\ \sin 2\alpha=\frac{5}{2r_2}\end{cases}$

$9\cdot16r_1^2-40r_1^2=169\cdot9$

$104r_1^2=169\cdot9$

$\begin{cases}4r_1^2=81+AC^2\\ AC^2=AD^2-\frac{25}{4}\\ AD=2r_2\sin\alpha;\ AD^2=4r_2^2\sin^2\alpha\end{cases}$

$\cancel{BD\cdot\cos\alpha=BE}$

$\cancel{BE=2r_1\cos\alpha}$

$r_1=\frac{13\cdot3}{\sqrt{104}}$

$AC^2=4r_2^2\sin^2\alpha-\frac{25}{4}$

$BD\sin\alpha=BA\cos\alpha$

$r_1=\frac{39}{2\sqrt{26}}$

$4r_1^2=81+4r_2^2\sin^2\alpha-\frac{25}{4}$

$\frac{13}{2}\operatorname{tg}\alpha=2r_1$

$r_1=\frac{3\sqrt{13}}{2\sqrt2}$

$\begin{cases}DC=AD\cos\alpha\\ 2r_2\sin\alpha=AD\end{cases}$

$5=4r_2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$5=2r_2\sin2\alpha$

$\frac{DC}{2r_2\sin\alpha}=\cos\alpha$ $\quad \frac{5}{4r_2\sin\alpha}=\cos\alpha$

$r_2=\frac{5}{\cancel{9}_3}\cdot\frac{\cancel{3}\sqrt{13}}{2\sqrt2}=\frac{5\sqrt{13}}{6\sqrt2}$

$r_2 = \frac{5\sqrt{13}}{6\sqrt{2}}$; $r_1 = \frac{3\sqrt{13}}{2\sqrt{2}}$

$tg\alpha = \cancel{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{\cancel{2}\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{13} = \frac{6\cancel{\sqrt{13}}}{\cancel{13}\sqrt{2}} = \frac{6}{\sqrt{26}}$

$\underline{\alpha = arctg \frac{6}{\sqrt{26}}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta) = -\frac{8}{17}$

$2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 4\beta = \frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

если $\sin\alpha = 0$

$\cos\alpha = \pm 1$

если $\cos 2\alpha = 1$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$

если $\cancel{\cos 2\beta}$ $\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{17-16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$1 + \cos 2\alpha = -4\sin 2\alpha$

$tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{-4\sin 2\alpha} = \underline{-\frac{1}{4}}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$

$\sin 2\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$1 - \cos 2\alpha = -4\sin 2\alpha$

$\underline{tg\alpha = -4}$

$tg\alpha = 0$

если $\cos\alpha = 0$, $\cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = 0$ $\varnothing$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

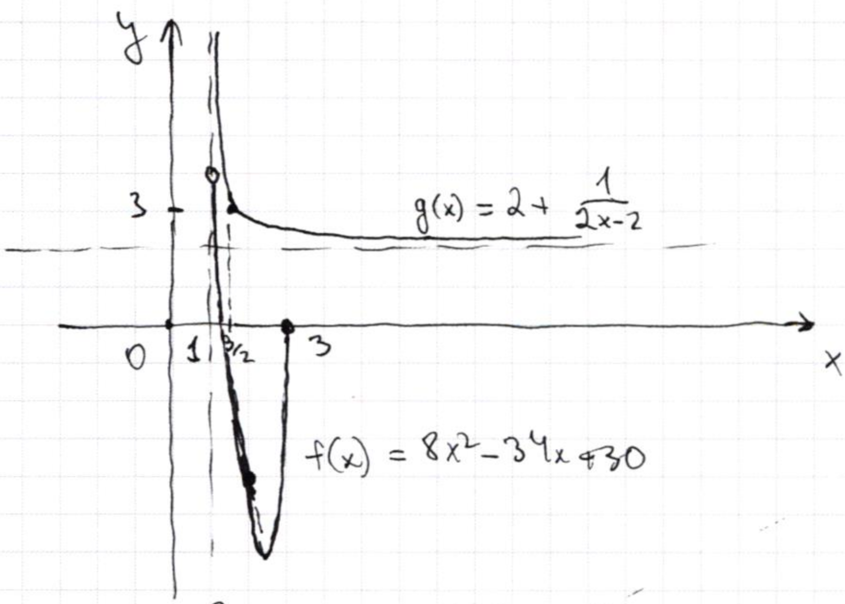
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 $\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$ $x \in (1;3]$



$g'(x) = -\frac{2}{(2x-2)^2}$; $g'\left(\frac{3}{2}\right) = -2$

при $a=-2$; $y_k = -2x+b$

$y_k\left(\frac{3}{2}\right) = 3 = -3+b \Rightarrow b=6$

$y_k = -2x+6$; $-2x+6 = 8x^2-34x+30$

~~$8x^2-32x+36=0$~~

~~$2x^2-8x+9=0$; $\frac{D}{4} = 16-2\cdot 9$~~

$8x^2+32x-24=0$

$x^2+4x-3=0$; $\frac{D}{4} = 4+3=7$

$x = -2 \pm \sqrt{7} = \left[\begin{array}{l} -2+\sqrt{7} \\ -2-\sqrt{7} < 0 \end{array}\right.$ $\sqrt{7}-2 \overset{<}{\vee} 3$; $\sqrt{7} \overset{<}{\vee} 5$

эта прямая не подходит

$\begin{cases} y(3) = 0 = 3a+b \\ y(1) = 4 = a+b \end{cases}$ $2a=-4$; $a=-2$

$b=6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} & (1) \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 & (2) \end{cases}$

(1) $3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$

$3y - 2x = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)}$

$3y - 2x = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$(3y-2) + 2 - 2x = \sqrt{\ldots}$

$(3y-2) - 2(x-1) = \sqrt{\ldots}$

1) $y = \frac{2}{3}$; $x = 1$

$3 + 3\cdot\frac{4}{9} - 6 - 4\cdot\frac{2}{3} = 4$

$-3 + \frac{4}{3} - \frac{8}{3} = 4$

$-\frac{4}{3} = 7$ $\varnothing$

2) $3y - 2 = x - 1$; $x = 3y - 1$

~~(2) $3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$~~

$3y - 2 = a$; $x - 1) = b$

$a - 2b = \sqrt{ab}$

$\begin{cases} a^2 + 4b^2 - 4ab = ab \\ ab \geq 0 \end{cases}$

$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$

если $b = 0, a = 0$

если $b \neq 0$

$t = \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 5\left(\frac{a}{b}\right) + 4 = 0$

$t^2 - 5t + 4 = 0$

$(t-1)(t-4) = 0$

$\frac{a}{b} = 1$; $\frac{a}{b} = 4$

$(x-1)(3y-2) \geq 0$

$a = b$

$b^2 \geq 0$

$36 - 64 - 72 =$

$= -36 - 64 = -100$

$12 - 48 - 64 = -100$

$75 / 5 = 15$; 5, 25

$75 / 25 = 3$; 75, 0

169×27: 1183, 338, 4563

① $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

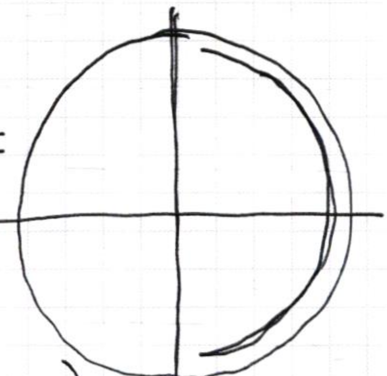
$tg\,\alpha$ - ? $\sin\varphi+\sin\psi=2\sin\frac{\varphi+\psi}{2}\cdot\cos\frac{\varphi-\psi}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=\frac{8}{17}$; $\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2\beta\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)}$



$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~2β~~ если $2\beta\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ 2\pi n\right)$, то

$\sin 2\beta=-\sqrt{1-\frac{16}{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ 4

$4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=-1$

$\cancel{4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha=1-\cos^2 2\alpha+\sin^2\alpha}$

$\cos 2\alpha-4\sin 2\alpha=1$; $\cos^2 2\alpha+16\sin^2 2\alpha-8\cos 2\alpha\sin 2\alpha=1$

$15\sin^2 2\alpha-8\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha=0$

$15\,tg^2 2\alpha-8\,tg\,2\alpha=0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,2\alpha=0 \\ tg\,2\alpha=\frac{8}{15}\end{array}\right.$

$tg\,2\alpha=0$, $tg\,\alpha=0$

$tg\,2\alpha=\frac{8}{15}$; $8-8tg^2\alpha=10\,tg\,\alpha$

$8tg^2\alpha+10\,tg\,\alpha-8=0$

$4tg^2\alpha+5tg\,\alpha-4=0$

$D=25+4\cdot4\cdot4=$

$=25+64=89$

$tg\,2\alpha=\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$

$=\frac{2\,tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$tg\,\alpha=\frac{-5\pm\sqrt{89}}{16}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

③ $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$3^{\cancel{\log_4(x^2+6x)}} \cancel{+6x+x^2 \geq}$

$6x+x^2 = t > 0$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t = b} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$3^b + 4^b \geq 5^b$ $\qquad \left(\frac{3}{5}\right)^b \downarrow$

$\left(\frac{3}{5}\right)^b + \left(\frac{4}{5}\right)^b \geq 1$ $\qquad \left(\frac{4}{5}\right)^b \downarrow$

$f(b) = \left(\frac{3}{5}\right)^b + \left(\frac{4}{5}\right)^b \geq 1$

при $b = 2$ равенство

при $b > 2$ $f(b) < 1$

при $b \leq 2$ $f(b) \geq 1$

$\log_4 t \leq 2$

$\log_4 t - \log_4 16 \leq 0$

$\begin{cases} (4-1)(t-16) \leq 0 \\ t > 0 \end{cases}$ $\qquad 0 < t \leq 16$

$D_{/4} = 9+16 = 25$

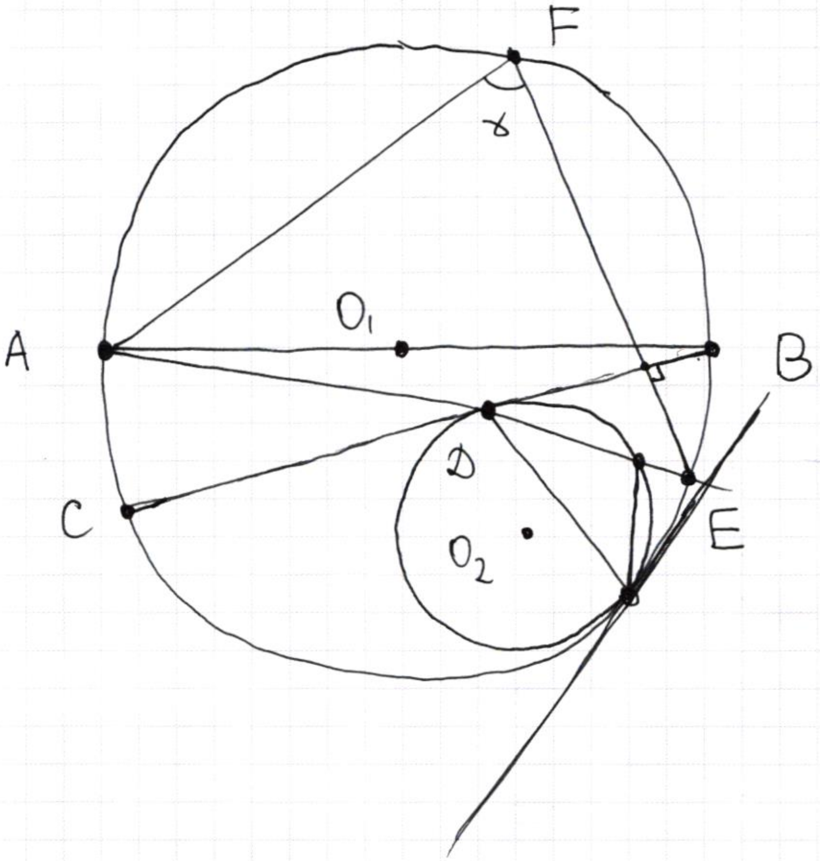
$x = -3 \pm 5 = \left[\begin{matrix} -8 \\ 2 \end{matrix}\right.$

$(x+8)(x-2) \leq 0$

$\begin{cases} x^2+6x-16 \leq 0 \\ x^2+6x > 0; \ x(x+6) > 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \in [-8; 2] \\ x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

4



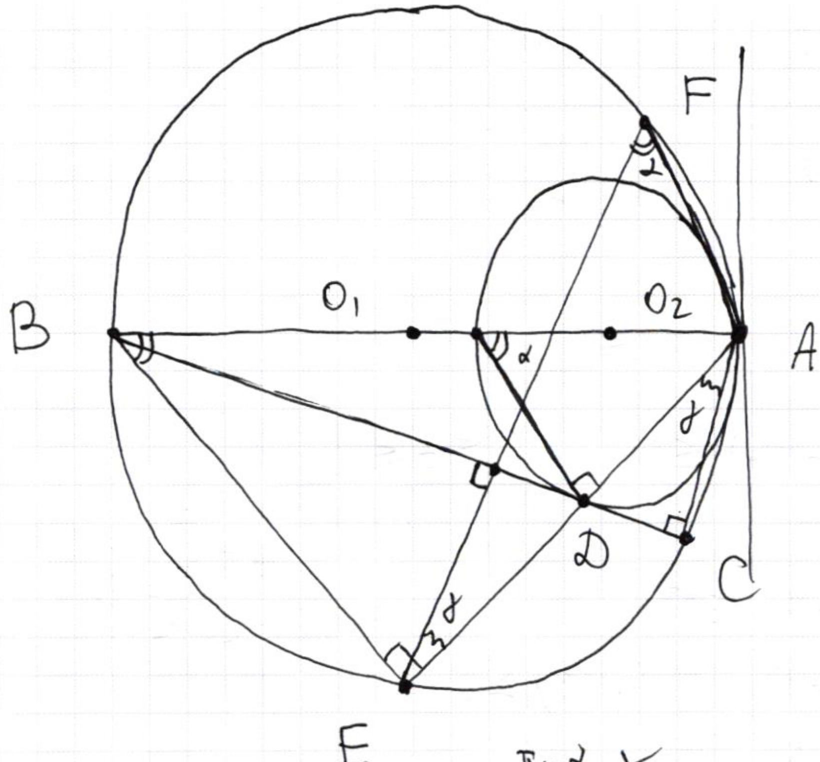
R_1; R_2

$\angle AFE = \alpha$ – ?

S_{AEF} – ?

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$



$\pi - \alpha - \gamma$

r_1; r_2;

α – ?

S_{AEF} – ?

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6) $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\frac{2(2x-2)+1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$2+\frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$16x-34=0$

$f(x) = 8x^2-34x+30$

$x=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$

$f'(x) = 16x-34$

$g(x) = 2+\frac{1}{2x-2}$

$2x-2=1$

$2x=3 \quad x=\frac{3}{2}$

$g'(x) = -\frac{2}{(2x-2)^2}$

$2+1 \geq \frac{3}{2}a+b \geq 8\cdot\frac{9}{4} - 34\cdot\frac{3}{2}+30$

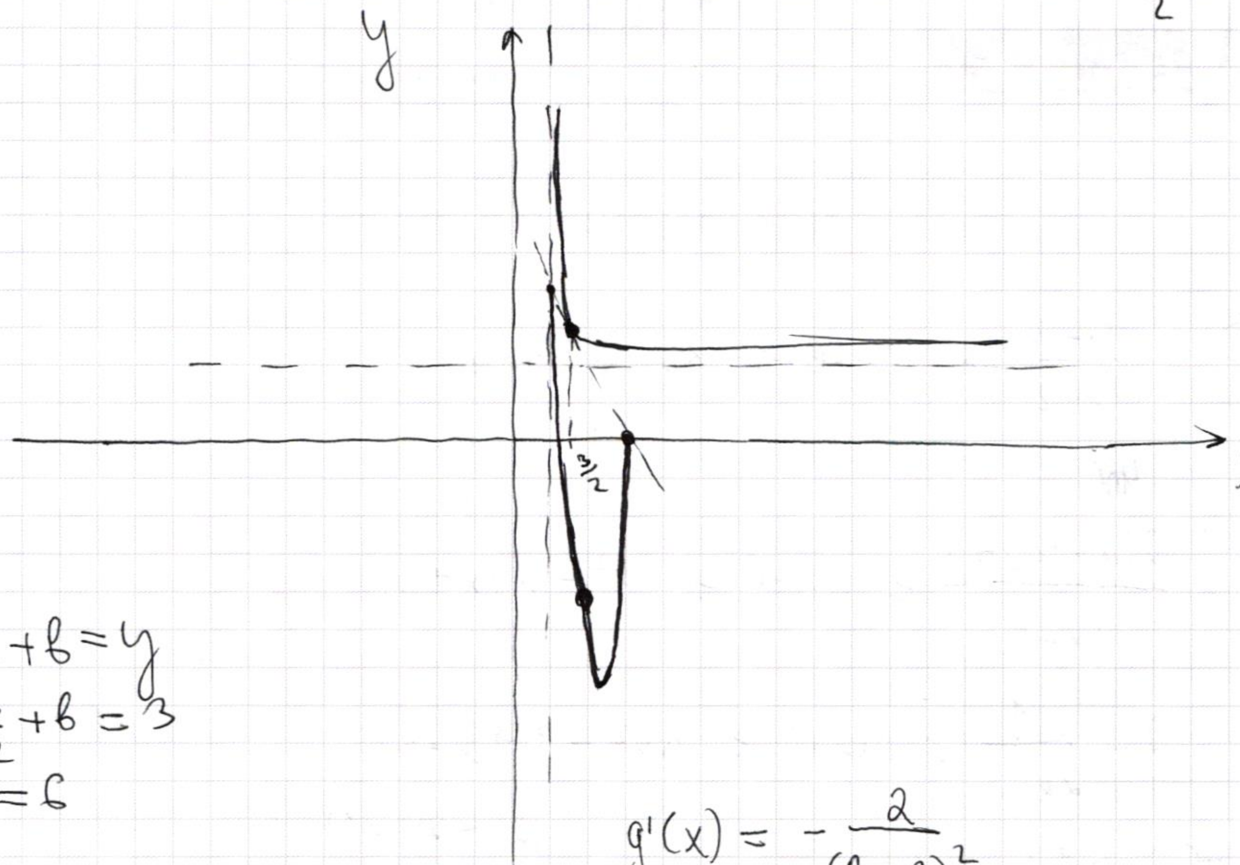
$3 \geq \frac{3}{2}a+b \geq 18-17\cdot 3+30 = 18+30-51$

$3 \geq \frac{3}{2}a+b \geq -3$

$$\begin{cases} \frac{3}{2}a+b \geq -3 \\ \frac{3}{2}a+b \leq 3 \end{cases}$$

$2+\frac{1}{2x-2}$

$2x-2=-1$
$x=\frac{1}{2}$



$\cancel{-2x}+b=y$

$-2\cdot\frac{3}{2}+b=3$

$b=6$

$g'(x)=-\frac{2}{(2x-2)^2}$

$8-34+30=4$

$g'(\frac{3}{2})=-\frac{2}{(3-2)^2}=-2$

$32-68+30=-4$

$\cancel{27\cdot 8}\quad 9\cdot 8-102+30=$

$\cancel{8}\cdot\frac{17^2}{8^{\cancel{2}}}-\frac{34\cdot 17}{8}+30=$

$-2x+6$

$=\frac{17^2}{8}-\frac{17^2\cdot 2}{8}+30=$

$=-\frac{17^2}{8}+30=-\frac{289}{8}+\frac{240}{8}=$

$-2x+6=8x^2-34x+30$

$=-\frac{49}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)