МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$

$-\frac{4}{5} : (-\frac{1}{\sqrt{5}}) = -\frac{4}{5}\cdot\sqrt{5} = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)\ (2\cos 2\beta}$

$2\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\sin =$ $\sqrt{(1-\frac{2}{\sqrt{5}})^2} = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad 2\beta = \pm\arccos(\frac{2}{\sqrt{5}}) + 2\pi k$

$\beta = \frac{\arccos(\frac{2}{\sqrt{5}}) + \pi k}{2}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}\ |\cdot\sqrt{5}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \quad (1) \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

Разделим второе уравнение на 1

$2\cos2\beta=\frac{4}{\sqrt5}$

$\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$; $\sin2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

~~$2\beta=\pm\arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)+2\pi k$~~

~~$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$~~

~~$2\alpha+2\beta=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi k$~~

~~$2\alpha+2\beta=$~~

1) $\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

1) Рассмотрим случай $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5} \mid\cdot\sqrt5$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha-\cancel{\sin^2\alpha}+\cancel{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha=0$

$\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=0$

$\cos\alpha(\cos\alpha+2\sin\alpha)=0$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha=0 \\ \cos\alpha+2\sin\alpha=0 \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sqrt{5}\ 90-\beta$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\ \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$90-\beta + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ$

$2\sin\alpha\cos\alpha + \ 4(\cos^2\alpha -$

№2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x(y-1)-2(y-1)$

$\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=1$

$(x-2)^2+(y$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=-4$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=1 \end{cases}$$

~~$4y-2\geq 2y$~~

$x-2=4(y-1)$

$x-2y = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2=4y-4$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \leq \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=1 \\ a \end{cases}$$

~~$\frac{x-2+y-1}{2}$~~

$x=4y-2$

$4y-2\geq 2y$

$2y-2\geq 0$

$x\geq 2y$

$y\geq 1$

xy

$$\left[\begin{array}{l} x\geq 2y \\ \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$4\cdot\frac{6}{5}-2=$

$=\frac{24}{5}-2=$

$=\frac{14}{5}$

2 1

$x^2-4xy+y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+2y+y^2+2=0$

$x($

$(x-2y)(x-2y)-(x-2)(y-1)^a=0$

Продолжение номера 1:

~~cos2α~~ $\cos\alpha=0$

$\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi k$; Если $\cos\alpha=0$, то $tg\alpha$ не существует, значит не удовлетворяет условию.

$\cos\alpha+2\sin\alpha=0 \quad |:\cos\alpha$

$2tg\alpha+1=0$

$tg\alpha=-\frac{1}{2}$

~~α= arctg~~

2) Рассмотрим случай: $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha-\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=0$

$2\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0 \quad (1)\\ \sin\alpha+2\cos\alpha=0 \quad (2)\end{array}\right.$

1) Если $\sin\alpha=0$, то $tg\alpha=0$

2) $\sin\alpha+2\cos\alpha=0 \quad |:\cos\alpha\neq0$

$tg\alpha+2=0$

$tg\alpha=-2$

Ответ: $tg\alpha=\{0; -\frac{1}{2}; -2\}$

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=1 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$x \geq 2y$~~ Запишем условие существования системы.

$$\begin{cases} x \geq 2y \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x \leq 2 \\ y \leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \end{cases}$$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$2(y-1)+x(y-1)+x^2+4y^2-6xy+2x=0$

$(x+2)(y-1)+(x-2y)^2+\cancel{2x(1}-2x(y-1)=0$

$(2-x)(y-1)+(x-2y)^2=0$

~~Это значит, что $(2-x)(y-1)\leq 0$, т.к. $(x-2y)^2\geq 0$~~

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2-x\geq 0 \\ y-1\leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2-x\leq 0 \\ y-1\geq 0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2 \\ y<1 \end{cases} \\ \begin{cases} x>2 \\ y>1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$x-2-2(y-1)=$

$=x-2+2y\cancel{2}=$

$=$

$$\begin{cases} (2-x)(y-1)+(x-2y)^2=0 \\ (2-x)^2+9(y-1)^2=0 \quad (1) \end{cases}$$

1) $\left[\begin{array}{l} 2-x=3(y-1) \quad (1) \\ 2-x=-3(y-1) \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$x^2-4+y+y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+2y+y^2+2=0$

$y+1 \geq 2y$

$y \leq 1$

$(x-2)^2+y(y-1)^2$

$f(5)=$

$=f(1)+f(5)$

$2(y-1)+x(y+1)+$

$+x^2-6xy+y^2$

$(x+2)(y+1)+(x-2y)^2+2xy$

$f(\frac{1}{8}) = 9+4-12-1=1$

$2(y-1)+x(y-1)+$

$x-2=y-1 \quad f(1)+1=f(5) \quad x^2+2x-6xy+y^2=$

$f(\frac{1}{2})$

$=2(y-1)+x(y-1)+$

$a^2+b^2>1 \quad x=y+1$

$f(\frac{1}{y}) = f(1)+f(\frac{1}{y})$

$\frac{19}{2}=21 \qquad (x-2y)^2+2x(y+1)$

$(2-x)(y-1)+(x-2y)^2=$

$=2y-xy+x-2 +x^2-4+y+4y^2=$

$10y^2-20y+10$

$=x^2-5xy+4y^2+x+2y-2$

$x-1=y+2$

$x=y+1$

$2-x=3|y-1|, \; y>1$

$2-x=3y-3$

$\frac{13}{4}=13$

$5-3y=x$

$x \geq 2x$

$\frac{14}{4}=4$

$\left[\begin{array}{l} 2-x=3(y-1) \\ x-2=3(y-1) \end{array}\right.$

$\frac{29}{5}-2=\frac{19}{5}$

$\begin{cases} 2-x=3y-3 \\ x-2=3y-3 \end{cases}$

$\begin{cases} 5-3y=x \\ x=3y-1 \end{cases}$

$2-3y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $2-x=3(y-1)$

$x=5-3y$

$(2-5+3y)(y-1)+(5-3y-2y)^2=0$

$3(y-1)^2+25(y-1)^2=0$

$28(y-1)^2=0$

$\left[\begin{array}{l} y=1, \quad \cancel{x=1} \\ \Downarrow \\ x=2 \end{array}\right.$ – не удовлет. условию $2y+x \geq 2y$

2) $2-x=-3(y-1)$

$x=3y-1$

$(2-3y+1)(y-1)+(\cancel{5}\,3y-1-2y)^2=0$

$(3-3y)(y-1)+(y-1)^2=0$

$-3(y-1)(y-1)+(y-1)^2=0$

$-3(y-1)^2+(y+1)^2=0$

$-2(y-1)^2=0$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=1 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2=a \\ y-1=b \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=1 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$x \geq 2(x+1)$

$\cancel{\begin{cases} (a-2b)^2 = ab \\ (a+3b)^2 - 6ab = 1 \end{cases}}$

$(a+3b)^2 - 6(a-2b)^2 = 1$

$\cancel{a^2 + 6ab + 9b^2 - 6a^2 + 24ab + 24b^2 = 1}$

$\cancel{36b^2}$

$\cancel{a^2 - 4ab + 4b^2 = ab}$ $\cancel{4x = 3b}$

$\cancel{a^2 - 5ab + 4b^2 = 0}$

$\cancel{(a-4b)(a-4b) = 0}$

$\begin{cases} a^2 - 4ab + 4b^2 - ab = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[(a-b)(a-4b) = 0 \right. \\ a^2 + 9b^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a = b \quad (1) \\ a = 4b \end{array} \right. \\ a^2 + 9b^2 = 1 \end{cases}$ $\cancel{a = b; \quad x - 2 = y - 1, \quad x = y + 1}$

1) $10b^2 = 1$; $x - 2 = y - 1$

$x = y + 1$ – ~~удовлет.~~

$10(y-1)^2 = 1$

$(y-1)^2 = \frac{1}{10}$

$y - 1 = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$

$\left[\begin{array}{l} y = \frac{\sqrt{10}}{10} + 1 \\ y = -\frac{\sqrt{10}}{10} + 1 \end{array} \right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\sqrt{10}}{10} + 2 \\ y = \frac{\sqrt{10}}{10} + 1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\sqrt{10}}{10} + 2 \\ y = -\frac{\sqrt{10}}{10} + 1 \end{array}\right. \end{cases}$$

~~$x \geq 2y$~~

~~$x \geq 2(x+1)$~~

~~$x + 2 \leq 0$~~

~~$x \leq -2$~~

$x \geq 2y$

$y+1 \geq 2y$; $y \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{\sqrt{10}}{10} + 1 \\ x = -\frac{\sqrt{10}}{10} + 2 \end{cases}$

~~не корни, написанные выше не удовлетворяют условию~~

2) $16b^2 + 9b^2 = 1$

$25b^2 = 1$

$b = \pm\frac{1}{25}$

$\left[\begin{array}{l} b = \frac{1}{5} \\ b = -\frac{1}{5} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{5} + 1 \\ y = -\frac{1}{5} + 1 \end{array}\right.$ – не удовлетворяет условию $y \geq 1$

~~$x - 2 \geq 8(y$~~

$a = 4b$

$x - 2 = 4(y-1)$

$x - 2 = 4y - 4$

$x = 4y - 2$

$4y - 2 \geq 2y$

$y \geq 1$

$\begin{cases} y = \frac{6}{5} \\ x = \frac{14}{5} \end{cases}$

~~Ответ: $\left(\frac{14}{5}; \frac{6}{5}\right)$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №5

(Нумеровать только чистовики)

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{10}}{10}+2; \frac{-\sqrt{10}}{10}+1\right)$

$\left(\frac{14}{5}; \frac{6}{5}\right)$

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$x^2+18x=t$

$t^{\log_{12}5}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

1) $t>0$. ~~...~~

$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}|t|}$.

Заметим, что числа 5, 12, 13 - пифагорова тройка, значит равенство достигается при $\log_{12}t=2$

$\log_{12} x^2+18x=2$

$x^2+18x=144$

$x^2+18x-144=0$

$x=\frac{-18\pm30}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x=-24 \\ x=6 \end{array}\right.$

Заметим, что по записи $5^{\log_{12}(x^2+18x)}$, x^2+18x является аргументом, значит, $x^2+18x>0$, значит t всегда >0

$x^2+18x>0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

При этом, если $\log_{12}t \geq 2$, то неравенство выполняться не будет, т.к. берем промежуток

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+18x+144=0$

$D = 324+576=900$

$144 \cdot 4 = 576$

$576+324$

$90-2\alpha+\beta=\beta-\alpha$

5^3

125

$90^\circ-2\alpha x=90^\circ-\beta$

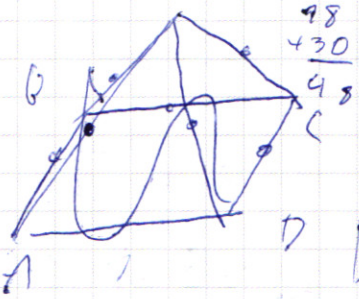
$x=\alpha-\beta$

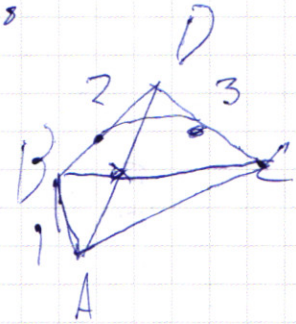
$x=\frac{-18\pm 30}{2}$

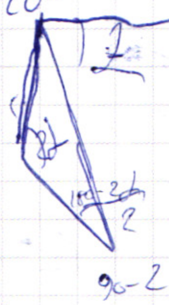
$48+30 = 48$

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\angle BAD - \alpha) = \alpha-\beta$

$x = \alpha+\beta+90^\circ-\alpha+90^\circ-2\alpha-\beta = 180-2\alpha+2\beta=0$





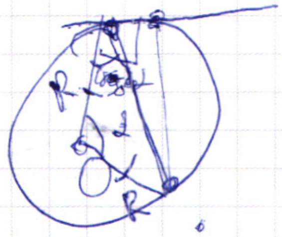


$\alpha+\beta+90^\circ-\alpha$

$90^\circ-\alpha$

$\alpha-\beta+90^\circ-\beta=$

$\angle 2\alpha$



$\beta=\alpha+90-\alpha=$

$=90-\beta$

$2\alpha>\beta$

$144+12=288$

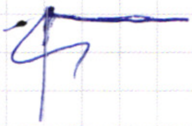
$144 \cdot 12 = 1428$

$1428+125 = 1853$

$13 \cdot 13 = 169$

$169+3 = 1804$

$90^\circ-\beta-\alpha+\beta=$



$90+\beta=90-\beta$

180

$\beta+\alpha+90-\alpha = 90^\circ-\beta \; 90^\circ$

~~$5+12=13$~~

$2+1,79=3,79$

$13 \cdot 13 = 169$

$169 \cdot 13$

484

169

147

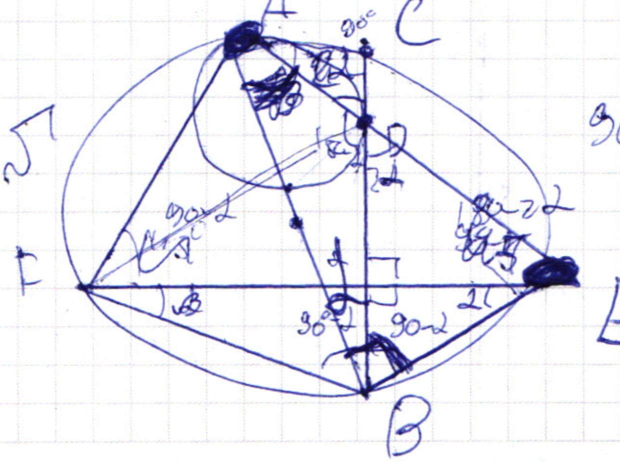
$90-\beta+\beta-\alpha=$

$=90-\alpha=$

$=180-2\alpha$

$90-180-2\alpha=$

$=2\alpha-90^\circ$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Продолжение номера 3₂

при $\log_{12} t \leq 2$

$$\Updownarrow$$

$$x^2+18x-144\leq 0$$

$$x\in[-24;6]$$

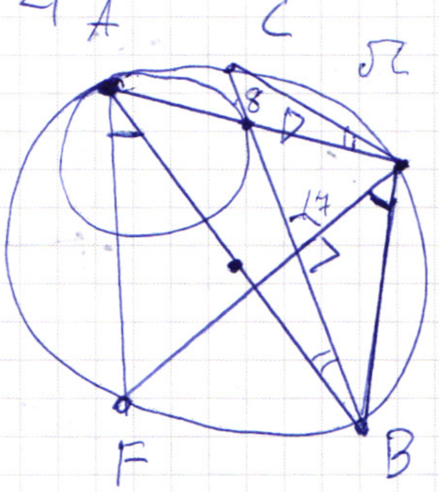
То в итоге имеем:

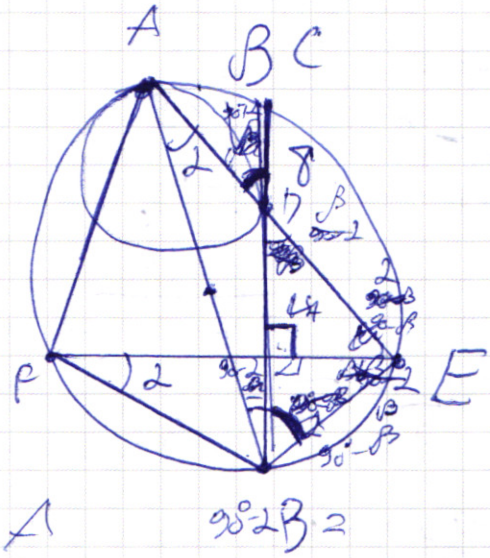
$$\begin{cases} x\in[-24;6] \\ x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty) \end{cases}$$

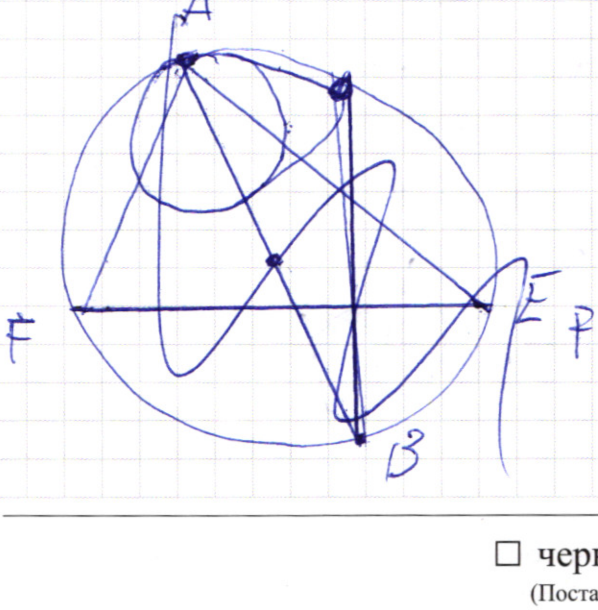
$$x\in[-24;-18)\cup(0;6]$$

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

№4





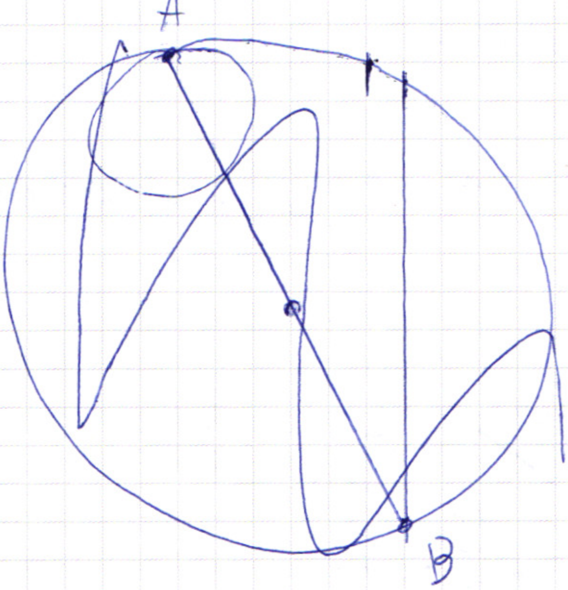


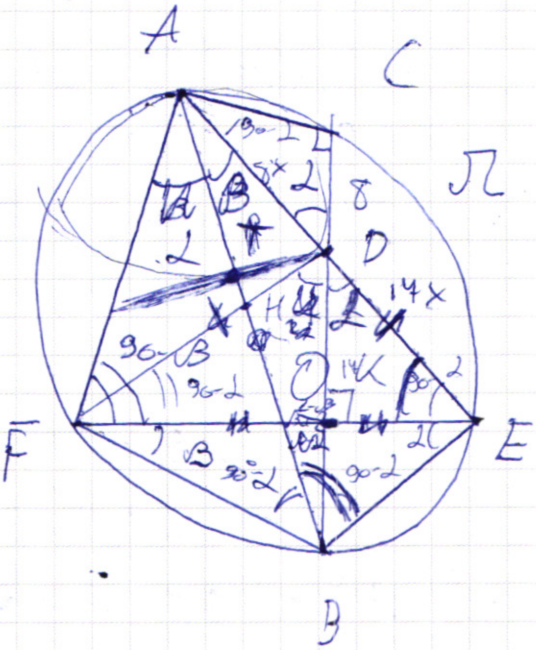
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 7 (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4





Пусть $\angle ADC = \alpha$, $\angle BFE = \beta$

$\angle BFE = \angle BAE$ (впис.)

~~$\angle ABC = \frac{1}{2}$ ... $\beta = \angle ABAE - \angle ADC$ (угол между касат. и хордой)~~ ~~$\angle ABC = \alpha - \beta$~~ $\angle ABC = \alpha - \beta$

$\angle ADC = \angle BDE$ (вертикальные)

$\angle KED = 90° - \alpha$ из $\triangle KDE$, где K т. пересечения CB и FE.

$\angle BED = 90° - \angle KED = \alpha$ в п/у $\triangle BED$

~~$\angle FBK = 90° - \beta$ из п/у $\triangle FBK$~~ $\angle FBK = 90 - \beta$

~~$\angle ABE = \beta - \alpha + 90 - \alpha = 90° - 2\alpha + \beta$~~

~~При этом $\angle ABE = 90° - \beta$~~

~~$90° - 2\alpha + \beta = 90° - \beta \Rightarrow \alpha = \beta$, тогда $\triangle FBE$ — р/б, т.к. у него равны углы при основании, также $\triangle AFE$ — р/б.~~

AFCB – вписан. четырехугольник => $\angle ACB = 90^\circ$

$\angle DAC = 90 - \alpha$

$\angle ABE = 90^\circ - \beta - \alpha + \beta = 90^\circ - \alpha = \angle CBE$

$\Downarrow$

$\angle BAF = 90^\circ - 90^\circ + \alpha = \alpha$

~~$\angle BAF = \angle FDB$ (вписанные)~~

$\Downarrow$

~~DH – биссектриса и высота в $\triangle FDE$ => $\triangle FDE$ – р/б,~~

~~$FD = DE$~~

$\Downarrow$

FE – диаметр окр. Ω

~~Тогда $\alpha + \beta = 90^\circ$~~

~~$\angle AFB = 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - \beta = 90^\circ$~~

~~$90^\circ + \alpha + 90^\circ - \alpha + 90^\circ - 90^\circ + \alpha = 90^\circ$~~

~~$\alpha = 90$~~

$AD \cdot DE = CD \cdot BD = 14 \cdot 8 = 136$

черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$

$1 \le x \le 24;\quad 1 \le y \le 24;\quad f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(xy) = f(x) + f(y)$

$f(x) = 1 + f(x)$

$\cancel{f(-y) =}$ $f(14) = f(7) + f(2) = f(1) + f(14)$

$f(24) = f(1) + f(24) = f(4) + f(6) = f(2) + f(12)$

$f(1) = \cancel{f(1)+f(1)}\ 0$

$\cancel{f(2) = }$ $f(2) = 0$

$\cancel{f(p) = t}$

$f(3) = 0$

$\cancel{f(4) = 1}$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(-1) = -1$

$f(-2) = -1$

$f(-3) = -1$

$f(-5) = -2$

$f(-7) = -3$

$f(-13) = -4$

$f(-19) = -5$

$f(-23) = -5$

$\cancel{f(5) = f(1) + f(5) = 1}$

$\cancel{f(5) = f(1) + f(5) = f(1) + 1}$

$\cancel{f(5) =}$

$\cancel{f(1)} = 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

Разобьём на пары

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

группы числа 0, 1, 2, 3, 4, 5.

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 14 16 15 ... 24
0 0 0 1 0 1 0 0 1 2 0 3 1 1 ... 1

Таким образом мы запишем сколько чисел, которое можно представить как бы произведение двух чисел, одно из которых больше. При ~~10~~ тогда получим; этом разделим по группам на те

2·3, 4·3·6 + числа, которые можно представить в виде произведения 0, 1, 2, 3, 4, 5 и другого числа.

~~Так что~~ Тогда суммарное число пар будет 210.

Ответ: 210

2·4·6