МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

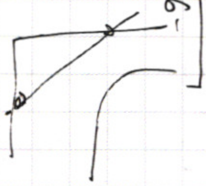
$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos\beta > 0$

$4x^2 - 4x + 9 \geq 0$

$x = 4 \pm \sqrt{16}$



$(1;4)$

$(3;0)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

① $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin 2\beta =$

$\sin 2\alpha\cdot \cancel{\cos 2\beta}\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot 4 + \cos 2\alpha = -1$

② $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \rightarrow 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

17^2: $17\cdot 17$; 119, 17; $289 - 64 = 225$

$a+b=4$

$3a+b=0$

$a=-2$

$b=6$

$-2x+6=0$

$4x-3 \geq (2x-2)(-2x+6)$

$4x-3 \geq -4x^2+12x-4x-12$

$0 \geq -4x^2+4x-9$

2. $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \rightarrow \end{cases}$ $\qquad 3y^2+4x^2 = 6xy$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$

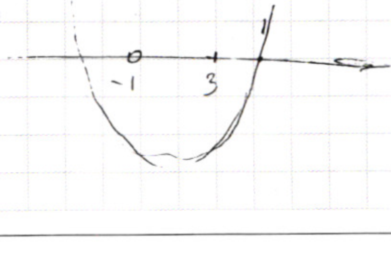
$9x^2-6x+1+4y^2-4y+1-6x^2-y^2-2=4$

$0 \geq \frac{2ax^2+2xb-2ax-2b+4x-3}{2x-2}$

$(3x-1)^2+(2y-1)^2 = 6+6x^2+y^2$

① $9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$

$3y(3y+1) - 15xy + 2x(2x+1) = 2$



2. $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3x^2+3y^2=6x+4y+4$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3x+2y=3x^2+3y^2-4$

$3x(x-2)+y(3y-4)=4$

$3x^2+3y^2-3-6x-3y+3xy-y=1$

$3(x+y-1)^2-3xy-y=1$

$3(x+y-1)^2=1+y+3xy$

$\cancel{3x^2+3y^2+3-6x-6y}$

$3xy-2x-3y+2=3x^2+3y^2-8x-7y-2+3xy$

$3y-2x=\sqrt{x(3y-2)-(3y-2)}=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3x^2-6x+3+3y^2-4y=7$

$3(x-1)^2+$

$(9\sqrt{3}(x-1)+3\sqrt{3}(3y-2))^2=\frac{25}{3}+(4(3y-2)$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3x(x-1)-3x+y(3y-2)-2y=4$

$-3x-2y=4-3x(x-1)-y(3y-2)$

$3xy+6-3x(x-1)-y(3y-2)$

$-3x^2-3y^2-3x-2y+3xy+6$

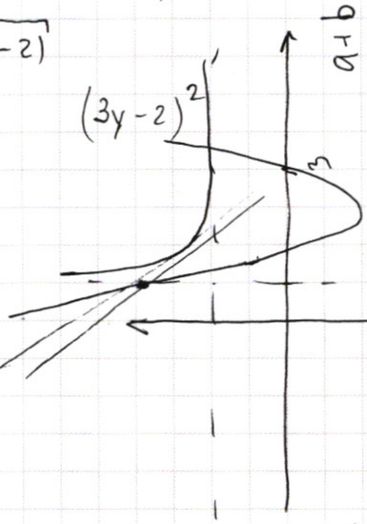
$1(3x^2+3y^2$

$(3y-2)-2(x-1)$

$(3y-2)^2-(3y-2)(x-1)$

$b\geq a$

$(3y-2)^2$



$2.25-3a/4 \geq a$

$1.75\geq a$

3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0$ $\quad x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2\geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}\geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+x^2+6x\geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$(x^2+6x)\left((x^2+6x)^{\log_4\frac{3}{4}}+1-(x^2+6x)^{\log_4\frac{5}{4}}\right)\geq 0$

$3^2+4^2=5^2$

$3^3+4^3=$

$n^\alpha-n^\beta\geq -1$

$3^{2}3a+b^2\geq 0$

$3^{-3a}\geq b-3a$

□ черновик □ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=7$

$\cancel{3y-2x} = 3x^2+3y^2$

$3(x-1)^2+3y^2-4y=7$

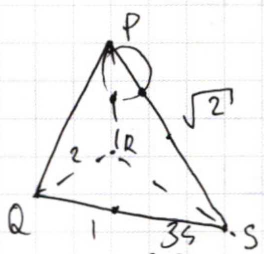
$3(x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)^2 = 7+\frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

$(3y-2)^2 = 9y^2-12y+4$

$\frac{1}{3}(3y^2-4y+\frac{4}{3})$

$2(3y-2x)^2$

$\left(\sqrt{3}(x-1)+\frac{1}{\sqrt{3}}(3y-2)\right)^2 = \frac{25}{3}+2(3y-2x)^2$



$3\left(x-1+y-\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}+2(3y-2x)^2$

$3(x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)^2 = \frac{25}{3}$

$(3y-2)-2(x-1) = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3\left((x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)\right)^2 = \frac{25}{3}+2\left((3y-2)-2(x-1)\right)^2$

$34 \cdot 3 = 102$

$2+\frac{1}{4} \geq 3a+b \geq 72-102+30$

5. $f(ab)=f(a)+f(b)$

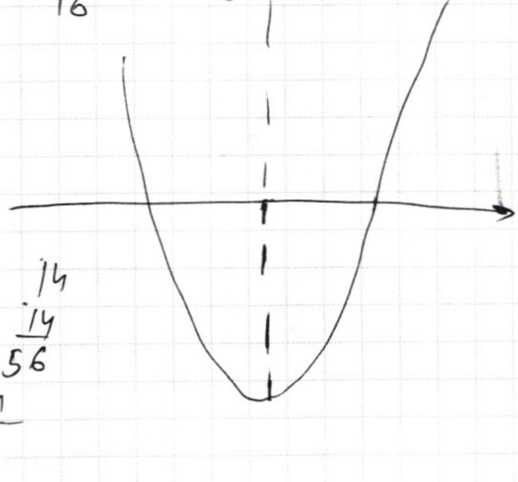
$2+\frac{1}{2} \geq 2a+b \geq 0$

$x\in[3;27]$

$\frac{34}{16} \approx 2+\Delta$

$y\in[3;27]$

f



$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$34 \cdot 34$: $136 + 102 = 1156$

$30 \cdot 32 = 960$

$1156 - 960 = 196$

$14 \cdot 14$: 56, 14

$$\begin{cases} 3y-2-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ (3y-2)(3y+2)+3x(x-1)-3x-4y=0 \end{cases}$$

$(3y-2)^2 - 2\sqrt{2}$

6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$

$x_0 = \frac{34 \pm \sqrt{34^2-32\cdot 30}}{16}$

$2-\frac{1}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$

$3y-2=A \qquad x-1=B$

$A-2B=\sqrt{AB} \qquad 6(A-2B)^2=6AB$

$\frac{1}{3}A^2+3B^2=\frac{25}{3}$

$A^2+9B^2=\frac{25}{3}$

$(A+3B)^2=25+6(A-2B)^2$

$\cancel{(3B(A+B)=}$

$A-2B=\sqrt{AB}$

$A-\sqrt{AB}+0{,}25B=2{,}25B$

$\left(\sqrt{A}-\frac{1}{2}\sqrt{B}\right)^2=1{,}5\sqrt{B}$

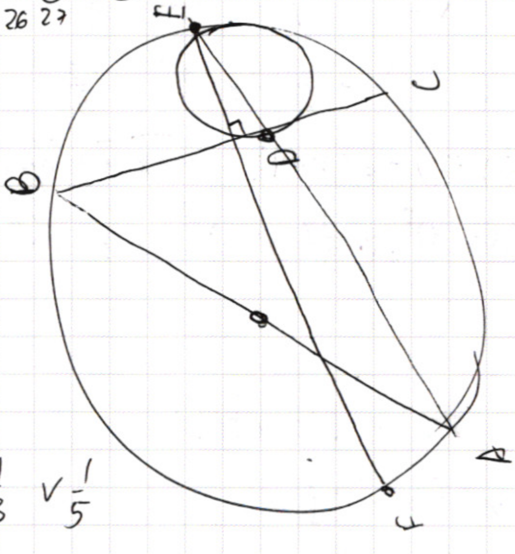
$A^{\log_4 \frac{3}{5}}+A^{\log_4\frac{4}{5}} \geqslant 1$

$\left(\frac{4}{5}\right)^\alpha+\left(\frac{3}{5}\right)^\alpha \geqslant 1$

$4^\alpha+3^\alpha \geqslant 5^\alpha$

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27

2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	
23	



$\frac{1}{4}+\frac{1}{3} \vee \frac{1}{5}$

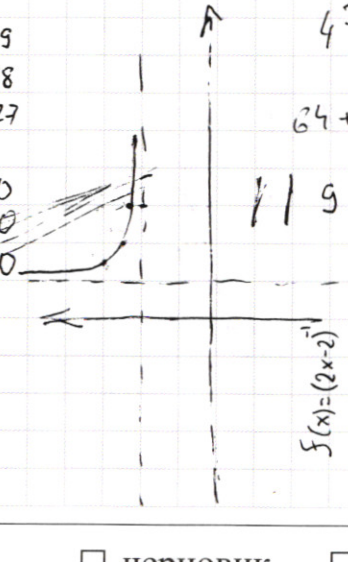
$\frac{7}{12}$

$4^3+3^3 \vee 5^3$

$64+9 \qquad 125$

1 2 3 4 5 6 7 8 9
10 11 12 13 14 15 16 17 18
19 20 21 22 23 24 25 26 27

X 0 0 0 1 0 1 0 0
1 2 0 3 1 1 0 4 0
4 1 1 2 5 0 2 3 0



$a+x\cdot b=0$

$(2-\frac{ax}{2})^2 \cdot \frac{ax}{2}$

$a+b \geqslant 4$

$a+b \geqslant 8-34+30=4$

$a+b \geqslant$

$3 \geqslant 3a+b \geqslant 0$

$f(x)=(2x-2)^{-1}$

$f'(x)=-2\cdot(-1)\cdot\frac{1}{(2x-2)^2}$

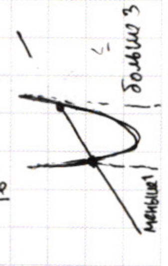
$2\cdot\frac{1}{(2x-2)^2}$

$\frac{2}{16}$

$8x^2-(34+a)x+30-b \leqslant 0$

$x_1; x_2 - \{1; 3\} \qquad D>0$

$\frac{34+a \pm \sqrt{(34+a)^2-32(30-b)}}{16}$



☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

Тогда: $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

а) $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда $\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{17}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \cancel{-\frac{1}{17}} -1$

~~1. $\cos 2\alpha \geq 0$~~

~~$4\sin 2\alpha + \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1$~~

~~$1-\sin^2 2\alpha = 1 + 8\sin^2 2\alpha + 16\sin^2 2\alpha$~~

~~$17\sin^2 2\alpha + 8\sin 2\alpha = 0$~~

~~① $\sin 2\alpha = 0 \rightarrow \cancel{\cos 2\alpha}$ $\alpha = \pi n,\ n\in Z$ $tg\alpha = 0$~~

~~② $\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \rightarrow \cos 2\alpha = +\frac{15}{17}$~~

~~$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} = \frac{1}{17}$~~

~~$\cos^2\alpha = \frac{1+\cancel{\sin}\cos 2\alpha}{2} = \frac{16}{17}$~~

~~$tg^2\alpha = \frac{1}{16}$~~

~~2. $\cos 2\alpha < 0$~~

~~$4\sin 2\alpha - \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -1$~~

~~$16\sin^2 2\alpha + 8\sin 2\alpha + 1 = 1 - \sin^2 2\alpha$~~

~~$17\sin^2 2\alpha + 8\sin 2\alpha = 0$~~

~~① $\sin 2\alpha = 0$ $\alpha = \pi n,\ n\in Z$ $tg\alpha = 0$~~

~~② $\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{15}{17}$~~

~~$\sin^2\alpha = \frac{16}{17}$~~

~~$\cos^2\alpha = \frac{1}{17}$~~

~~$tg^2\alpha = 16$~~

б) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha = \cos 2\alpha - 1$

$4\sin 2\alpha = -2\sin^2\alpha$

$2\sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0 \rightarrow tg\alpha = 0$ $\quad 4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$tg\alpha = \cancel{-\frac{1}{4}} -4$

а) $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha = -\cos 2\alpha - 1$

$4\sin 2\alpha = -2\cos^2\alpha$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0 \rightarrow tg \in \varnothing$

$4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{4}$

Отв: $tg\alpha = \{0; -\frac{1}{4}; -4\}$

2. $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$ $\quad 3y-2x>0$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$3(x^2-2x+1)+\frac{1}{3}(9y^2-12y+4) = 4+3+\frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

$3(x-1)^2 + \frac{1}{3}(3y-2)^2 = \frac{25}{3}$

$(3y-2)-2(x-1) = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$(3y-2)-\sqrt{(3y-2)(x-1)}+0{,}25(x-1) = 2{,}25(x-1)$

$\left(\sqrt{|3y-2|}-\frac{1}{2}\sqrt{|x-1|}\right)^2 = 2{,}25(x-1)$

$\left(\sqrt{|3y-2|}-2\sqrt{|x-1|}\right)\left(\sqrt{3y-2}+\sqrt{|x-1|}\right)=0$

$\sqrt{|3y-2|} = 2\sqrt{|x-1|} \longrightarrow 16(x-1)^2 = (3y-2)^2$

$3(x-1)^2 + \frac{1}{3}(3y-2)^2 = \frac{25}{3}$

$3(x-1)^2 + \frac{16}{3}(x-1)^2 = \frac{25}{3} \rightarrow (x-1)^2 = 1 \rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ x=2 \end{matrix}$

$(3y-2)^2 = 16(x-1)^2 = 16 \longrightarrow \begin{matrix} y=2 \\ y=-\frac{2}{3} \end{matrix}$

Потенциальные решения

$(x;y)$	$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$	$3x^2+3y^2-6x-4y=4$
$(0;2)$	$6=\sqrt{-6+2}$ – неудв.	
$(0;-\frac{2}{3})$	$-2=\sqrt{4}$ – неудв.	
$(2;2)$	$2=\sqrt{12-4-6+2}=2$	$12+12-12-8=4$ – удв.
$(2;-\frac{2}{3})$	$-6=\sqrt{-4-4+2+2}$ – неудв.	

Отв: $(x;y)=(2;2)$

3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0 \quad x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x) \geqslant (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+(x^2+6x)^{\log_4 4} \geqslant (x^2+6x)^{\log_4 5} \quad \Big| :(x^2+6x)^{\log_4 5} \neq 0$ (по ОДЗ)

$(x^2+6x)^{\log_4 \frac{3}{5}}+(x^2+6x)^{\log_4 \frac{4}{5}} \geqslant 1 \implies 3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)} \geqslant 5^{\log_4(x^2+6x)}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Несложно понять, что равенство совершается при $\log_4(x^2+6x)=2$.

$\underbrace{3^\alpha+4^\alpha}_{f(\alpha)} < \underbrace{5^\alpha}_{g(\alpha)}$, при $\alpha>2$, т.к. $f'(\alpha) < g'(\alpha)$, при $\alpha' \in (2;+\infty)$

При $\alpha<2$ – есть решение

$\log_4(x^2+6x)<2$

$x^2+6x<16$

$x^2+6x-16<0$ $\quad x_0=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\dfrac{-6\pm10}{2}=\left[\begin{array}{l}-8\\2\end{array}\right.$

$x\in(-8;2) \overset{ОДЗ}{\Rightarrow} x\in(-8;-6)\cup(0;2)$

Отв: ~~$x\in(-8;2)$~~ $x\in(-8;-6)\cup(0;2)$

5. $f(ab)=f(a)+f(b) \rightarrow f(ab)-f(a)=f(b) \xrightarrow{\text{переназовём}} f(a)-f(b)=f\left(\frac{a}{b}\right)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$x;y\in[3;27]$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$, при $f(x)<f(y)$, причем, если $x=\alpha_1^a\cdot b_1^b\cdot\ldots$

то $f(x)=a\cdot\left[\frac{\alpha_1}{4}\right]+b\left[\frac{b_1}{4}\right]+\ldots$

Рассмотрим все простые $x\in[2;27]$ и $f(x)$

x	f(x)
2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5

Тогда мы можем получить 2 табличке

x:

~~ж~~	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25	26	27

f(x):

x	0	0	0	1	0	1	0	0
1	2	0	3	1	1	0	4	0
4	1	1	2	5	0	2	3	0

$f(x)=5$ – 1шт

$f(x)=4$ – 2шт

$f(x)=3$ – 2шт

$f(x)=2$ – 3шт

$f(x)=1$ – 7шт

$f(x)=0$ – 10шт

} 25

Кол-во пар: $1\cdot24+2\cdot22+2\cdot20+3\cdot17+7\cdot10=$

$=24+44+40+51+70=68+110+51=229$

Отв: 229 пар.

6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$

$x \in (1;3]$

$2+\frac{1}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$

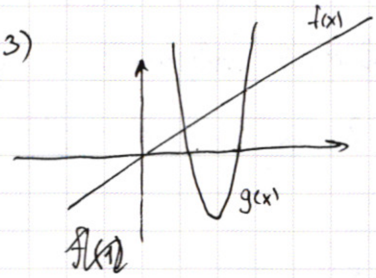
$x_0 = \frac{34 \pm \sqrt{34^2-32\cdot 30}}{16} = \frac{34 \pm 14}{16} = \left[\begin{array}{l}\frac{48}{16}=3\\ \frac{20}{16}=\frac{5}{4}\end{array}\right.$

$2+\frac{1}{2x-2} \geqslant (ax+b) \geqslant (8x-10)(x-3)$

$\cancel{2 \geqslant ax+b}$

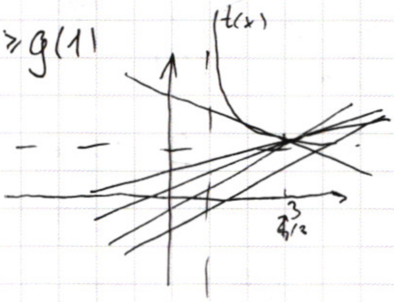
$2{,}25 \geqslant 3a+b \geqslant 0$

$\cancel{f(3)}: \cancel{3 \geqslant 3a+b} \geqslant 0$



$f(3) \geqslant g(3)$

$f(1) \geqslant g(1)$



$f(x) \geqslant g(x)$ $a+b \geqslant 4$

$3-3a \geqslant b \geqslant -3a$

$b \geqslant 4-a$

$\begin{cases}3-3a \geqslant -3a\\ 3-3a \geqslant 4-a\end{cases}$ $\begin{cases}3 \geqslant 0\\ -1 \geqslant 2a\end{cases}$ $-\frac{1}{2} \geqslant a$

$f(2) \leq t(2)$;

$2+\frac{1}{2} \geqslant 2a+b \Rightarrow 2{,}5-2a \geqslant b$

$2{,}5-2a \geqslant b \geqslant -3a \Rightarrow a \geqslant -2{,}5 \Rightarrow a \in [-2{,}5; -1{,}5]$

$2{,}5-2a \geqslant 4-a$

$-1{,}5 \geqslant a$

$f(2) \geqslant g(2)$

$2a+b \geqslant 32-68+30=-6$

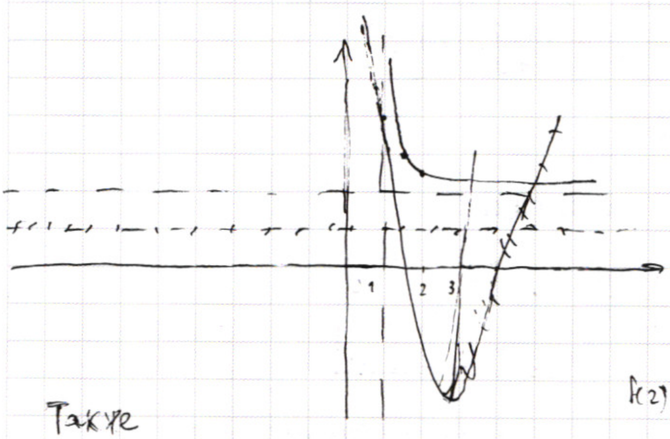
$2a+b \geqslant -6 \Rightarrow b \geqslant -6-2a$

$2{,}5-2a \geqslant b$

$3-3a \geqslant b$

$3-3a \geqslant -6-2a$

$9 \geqslant a$



$a+b \geqslant 4$ $b \geqslant 4-a$

$2{,}25-3a \geqslant b \geqslant -3a$

$2{,}25 \geqslant 3a+b \geqslant 0$

$a+b \geqslant 3a+b \Rightarrow 0 \geqslant 2a$

$2{,}25-3a \geqslant 4-a$ $-1{,}75 \geqslant 2a$

$-\frac{7}{8} \geqslant a$

Также

$f(2)$: $2+\frac{1}{2} \geqslant 2a+b \Rightarrow b \leq 2{,}5-2a$

$\begin{cases}2{,}5-2a \geqslant -3a\\ 2{,}5-2a \geqslant 4-a\end{cases}$ $a \geqslant -2{,}5$ $-1{,}5 \geqslant a$ $a \in [-2{,}5; -1{,}5]$

$\cancel{2{,}25+4{,}5 \geqslant 3a+b \geqslant +7{,}5}$

$\cancel{b \in [-2{,}25}$

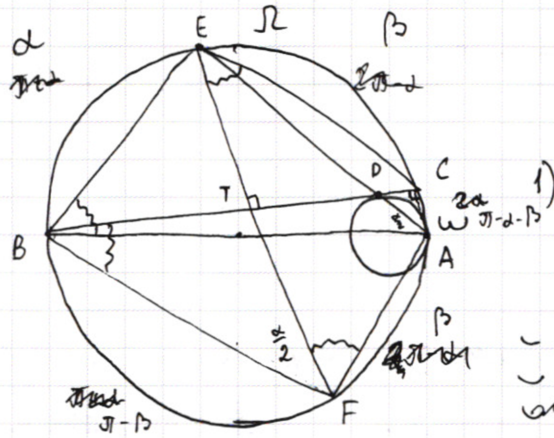
$\cancel{a \in [-2{,}5; -2{,}25]}$

из $a+b \geqslant 4$ $b \in [6{,}25; +\infty)$

Продолжение стр. 8.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

1) $(2R-2r)\cdot 2R = BD^2$ (сек. BA и кас BD к ω)

$BD \cdot DC = ED \cdot DA$

$\smile BE = \alpha \Rightarrow \smile CF = \pi - \alpha$

$\smile BF = 2\pi - \smile CE =$

~~$\smile EC = 4\pi - \smile BE - \smile CF - \smile BF = 2\pi - \alpha$~~

$\triangle BCA$ - прямоугольный т.к. $\angle BCA = 90^0$ т.к. опирается на диаметр.

$EF \parallel CA$, т.к. $EF \perp BC$; $CA \perp BC \Rightarrow \triangle ETD \sim DCA \Rightarrow \smile FA = \smile CE = 2\pi - \alpha$

~~$\angle DCA$~~ $\angle ADC = \frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$

$\angle DCA =$

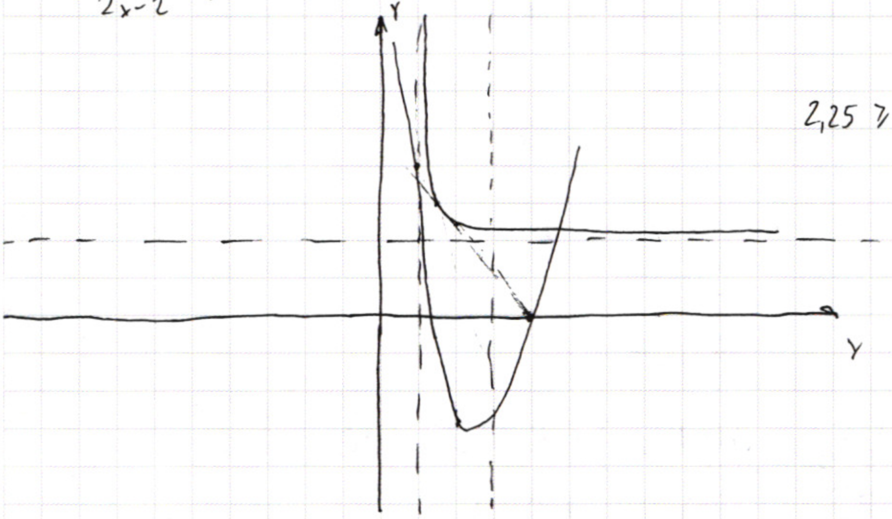
$\smile BE = \alpha$

$\smile EA = 2\pi - \alpha$

$\smile CF = \pi - \alpha$

$\smile CE = \smile AF = \beta$

6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$



$a+b \geq 4$

$2{,}25 \geq 3a+b \geq 0$

Очевидно, что $a \leq 0$, а $b \geq 0$

при $a \neq 0$ — решений нет

$f(x)=ax+b$

$g(x)=\frac{4x-3}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}$ $\quad g'(x)=-\frac{2}{(2x-2)^2}$ — касательная с таким a.

$f_{кас}=g'(x_0)\cdot(x-x_0)+g(x_0)=-\frac{2}{(2x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{1}{2x_0-2}=-\frac{2}{(2x_0-2)^2}x+\frac{4x_0-2}{(2x_0-2)^2}$

$f_{кас}(1)\geq 4$ $\quad \frac{4x_0-4}{(2x_0-2)^2}\geq 4$ $\quad \frac{1}{2x_0-2}\geq 2 \Rightarrow$ $\cancel{x_0\in[1;1{,}25}$; $x_0\in(1;1{,}25]$

$f_{кас}(3)\in[0;2{,}25]$ $\quad 0\leq\frac{4x_0-8}{(2x_0-2)^2}\leq 2{,}25$ $\quad x_0\geq 2$, но тогда никакая

касательная не подойдет, следовательно $\frac{4x-3}{2x-2}>ax+b$ $\quad 4x-3-(ax+b)(2x-2)\neq 0$

$\cancel{2ax^2}$

$\cancel{2ax^2+2ax+2bx-2b-4x+3=0}$

$\cancel{2ax^2+(2a+2b-4)x+3-2b=0}$

$\cancel{(2a+2b-4)^2-8a(3-2b)<0}$

$\cancel{(a+b-2)^2-2a(3-2b)<0}$ $\quad \cancel{a^2+b^2+4-4a-4b+2ab-6a+4ab<0}$

$\cancel{a^2+b^2+4-10a-4b+6ab<0}$

Рассмотрим прямую ч/з т. $(1;4)$ и т. $(3;0)$ $\quad a=-2$ $\quad b=6$

$\frac{4x-3}{2x-2}\geq -2x+6 \Rightarrow \frac{4x^2-4x+9}{2x-2}\geq 0$, $D<0$

Также $0=ax+b$ при $x\geq 3$ $\quad -\frac{b}{a}\geq 3 \Rightarrow b\geq -3a$

Найдем 2 касательные к $2+\frac{1}{2x-2}$ ч/з точки $(3;0)$ и $(1;4)$

1) $f_{кас}=\frac{-2x+4x_0-2}{(2x_0-2)^2}$ $\quad -6+4x_0-2=0$ $\quad x_0=2$ $\quad f(1)\geq 4$ $\quad \frac{-2+8-2}{4}\geq 4$ — неудв.

2) $\cancel{-2x_0+4x_0-2=4(2x_0-2)^2}$

$f=\frac{-2+4x_0-2}{(2x_0-2)^2}=\frac{2}{(2x_0-2)}=\frac{1}{x_0-1}=4$ $\quad x_0=1{,}25$ $\quad f(3)\geq 0$ $\quad \frac{-6+5-2}{(\frac{1}{2})^2}\geq 0$ — неудв.

Касательные — не подходят

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$

$\frac{4x-3-(ax+b)(2x-2)}{2x-2} \geq 0$

$\cancel{\frac{-2ax^2+(2a+2b-4)x+3+2b}{2x-2} \geq 0}$

при $x \in (1;3]$

т.к. $a<0$, то

$f(1) \geq 0 \quad f(3) \geq 0$

~~$-2a+(2a+2b-4)+3-2b \geq 0$~~

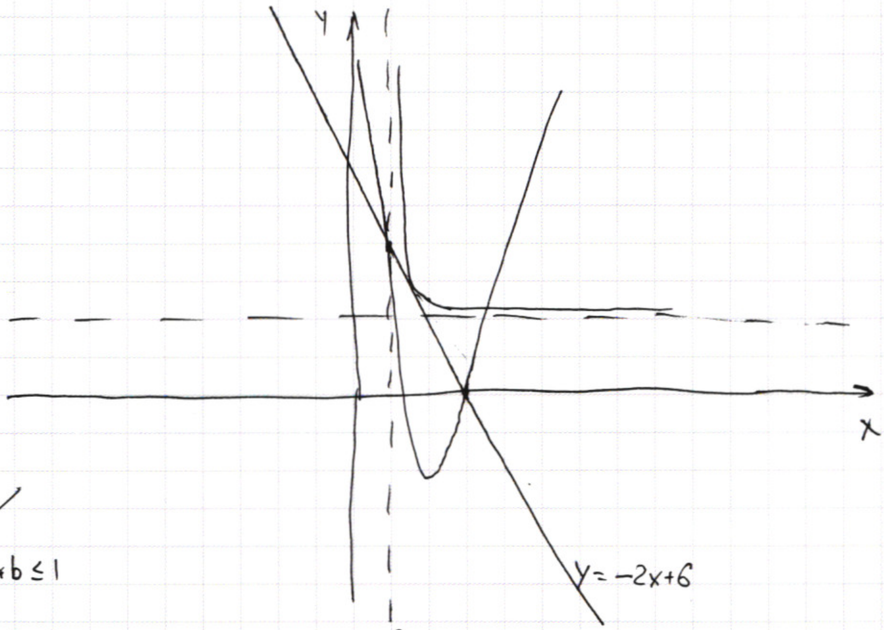
~~$-4a-4b+1 \geq 0 \quad a+b \leq 1$~~

~~$18a+6a+6b-12+3-2b \geq 0$~~

~~$24a+4b-9 \geq 0$~~

~~$18a-6a-6b+12-3+2b \geq 0$~~

~~$12a-4b+9 \geq 0$~~



$a=-2$
$b=6$ – решение.

$\frac{4x-3-2ax^2+2ax-2bx+2b}{2x-2} \geq 0$

$\frac{-2ax^2+(2a-2b+4)x+2b-3}{2x-2} \geq 0$

$f(1) \geq 0 \qquad -2a+2a-2b+4+2b-3 \geq 0 \quad 1 \geq 0$

$f(3) \geq 0 \qquad -18a+6a-6b+4+2b-3 \geq 0 \quad -12a-4b+1 \geq 0$

$\frac{1}{4} \geq 3a+b \geq 0$

$a+b \geq 4$

$\frac{1}{4}-3a \geq b \geq 4-a$

$-3,75 \geq 2a$

$2,5 \geq 2a+b \geq 2$

$2,5+4,5 \geq b \geq 2+2$

$a=-2$
$b=6$

~~$\begin{cases} a \in [-2,25;-2] \\ b \in [6,25;6] \\ a+b \geq 4 \end{cases}$~~

$a \in [-2,25;-2]$
$b \in [6,25;7]$
$a+b \geq 4$

Отв: ~~$a \in [-2,25;-2]$~~ $(a;b)=(-2;6)$

~~$b \in [6,25;7]$~~ ~~$b \in [6;6,75]$~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)