МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1. пусть $2\alpha = k$, $2\beta = m \Rightarrow \sin(k+m) = \frac{-1}{\sqrt{17}}$; $\sin(k+2m) + \sin k = -\frac{2}{17}$; формула суммы синусов: $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\Rightarrow \sin(k+2m) + \sin k = 2\cdot\sin\frac{2k+2m}{2}\cdot\cos\frac{2m}{2} = 2\cdot\sin(k+m)\cdot\cos(m) \Rightarrow$

$2\sin(k+m)\cdot\cos(m) = \frac{-2}{17}$; т.к. $\sin(k+m) = \frac{-1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$ получаем:

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(m) = \frac{-1}{17} \Rightarrow \cos(m) = \frac{1}{\sqrt{17}}$;

Рассмотрим два варианта:

1) $m \in I$ четв. $\Rightarrow \sin(m) \geq 0 \Rightarrow \sin(m) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

используя формулу синуса суммы: $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\Rightarrow$ ~~$\sin(k+m) = \sin(k)\cdot\cos(m) + \sin(m)\cdot\cos(k) = \sin(k)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos(k)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$~~

$\sin(k+2m) + \sin k = \sin(k+m)\cdot\cos(m) + \cos(k+m)\cdot\sin(m) + \sin k = \frac{-2}{17}$

а) пусть $k+m \in [IV;\ ]$ четв. $\Rightarrow \cos(k+m) \geq 0 \Rightarrow \cos(k+m) = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin(k) = \frac{-2}{17} \Rightarrow \sin(k) = \frac{-16}{17} + \frac{1}{17} - \frac{2}{17} = -1$

$\Rightarrow$ ~~т.к. k=~~ $k = \frac{-3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ (удовлетворяет условию $k+m \in [IV\ ]$)

$\Rightarrow 2\alpha = \frac{-3\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow \alpha = \frac{-3\pi}{4} + \pi n \Rightarrow tg(\alpha) = tg\left(\frac{-3\pi}{4}\right) = tg\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \boxed{1}$

б) пусть $k+m \in [\ ; III]$ четв. $\Rightarrow \cos(k+m) \leq 0 \Rightarrow \cos(k+m) = \frac{-4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\frac{-1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{-4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin(k) = \frac{-2}{17} \Rightarrow \sin(k) = \frac{16}{17} + \frac{1}{17} - \frac{2}{17} = \frac{15}{17} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = \arcsin\left(\frac{15}{17}\right) + 2\pi n \\ k = \pi - \arcsin\left(\frac{15}{17}\right) + 2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} \cos(k+m) = \cos k\cdot\cos m - \sin k\cdot\sin m\ (\cos k > 0) = \\ \cos(k+m) = \cos k\cdot\cos m - \sin k\cdot\sin(m)\ (\cos k < 0) = \end{array}$

$= \frac{8}{17}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{15}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} < 0 \Rightarrow$ уд.

$\Rightarrow \frac{-8}{17}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{15}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} < 0 \Rightarrow$ уд. $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(2\alpha) = \frac{15}{17}\quad \cos(2\alpha) = \frac{8}{17} \\ \sin(2\alpha) = \frac{15}{17}\quad \cos(2\alpha) = \frac{-8}{17} \end{array}\right. \Rightarrow$

т.к. $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg(\alpha) = \sqrt{\frac{1-8/17}{1+8/17}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \boxed{\frac{3}{5}} \\ tg(\alpha) = \sqrt{\frac{1+8/17}{1-8/17}} = \sqrt{\frac{25}{9}} = \boxed{\frac{5}{3}} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $m \in \overline{IV}$ четв. $\Rightarrow \sin(m) = \frac{-4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

а) $k+m \in \overline{IV}$ четв $\Rightarrow \cos(k+m) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{-1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{+1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{-4}{\sqrt{17}} +$

$+ \sin k = \frac{-2}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(k) = \frac{15}{\sqrt{17}}$ – такой вариант уже рассмотрен

б) $k+m \in \overline{III}$ четв $\Rightarrow \cos(k+m) = \frac{-4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(k) = \frac{-16}{\sqrt{17}} + \frac{1}{17} \frac{-2}{17} = -1 -$

– такой вар уже рассмотрен

Ответ: $tg\alpha = \frac{3}{5}; 1; \frac{5}{3}$

Задача 3. $|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$ $D(y): 26x - x^2 > 0$

$\Rightarrow |-26x+x^2| = 26x - x^2 \Rightarrow$ пусть $26x - x^2 = k,\ k > 0 \Rightarrow$

$k^{\log_5 12} + k \geq 13^{\log_5(k)}$ $\cdot a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \Rightarrow 13^{\log_5(k)} = k^{\log_5(13)}$

$\Rightarrow k^{\log_5 12} + k \geq k^{\log_5 13} \Rightarrow \left(D(y): x \in (0; 26)\right) \Rightarrow k^{\log_5 \frac{12}{5}} - k^{\log_5 \frac{13}{5}} \geq -1$

$k^{\log_5 \frac{13}{5}} - k^{\log_5 \frac{12}{5}} \leq 1$ [illegible] $f(k) = k^{\log_5 \frac{13}{5}} - k^{\log_5 \frac{12}{5}}$

$(k > 1) \Rightarrow$

[illegible]

заметим, что $f(k) = k^{\log_5 \frac{13}{5}} - k^{\log_5 \frac{12}{5}} \uparrow \Rightarrow$ [illegible]

$(k > 1)$

1 решение. [illegible] не вып.

$f(x)\uparrow = const$ – 1 решение (смотри лист 6)

Задача 2. $\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$

пусть $\begin{cases} x - 1 = m \\ y - 6 = k \end{cases} \Rightarrow k - 6m = y - 6 - 6x + 6 = y - 6x \Rightarrow \begin{cases} k - 6m = \sqrt{km} \\ 9m^2 + k^2 = 90 \end{cases}$

$D(y):\ \begin{rcases} km \geq 0 \\ k \geq 6m \end{rcases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - 12km + 36m^2 = km \\ 9m^2 + k^2 - 90 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k^2 - 13km + 36m^2 = 0 & 1) \\ 9m^2 + k^2 = 90 & 2) \end{cases}$

1) решим относительно $k \Rightarrow D = 169m^2 - 36 \cdot 4m^2 = (169 - 144)m^2 = 25m^2$

$\Rightarrow k_1 = \frac{13m - 5m}{2} = 4m \quad k_2 = \frac{13m + 5m}{2} = 9m \Rightarrow$

2) $\left[\begin{array}{l} 9m^2 + 16m^2 = 90 \\ 9m^2 + 81m^2 = 90 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = \frac{90}{25} \\ m^2 = \frac{90}{90} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m^2 = \frac{18}{5} \\ m^2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1))\ m = 3\sqrt{\frac{2}{5}} \quad k = 12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 2))\ m = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \quad k = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 3))\ m = 1 \quad k = 9 \\ 4))\ m = -1 \quad k = -9 \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left[\begin{array}{l} 1)) \ mk>0 \quad 6m=18\sqrt{\frac{2}{5}}>12\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \text{ не уд. } D(y) \\ 2)) \ mk>0 \quad 6m=-18\sqrt{\frac{2}{5}}<-12\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow \text{ уд.} \\ 3)) \ mk>0 \quad 6m=6<9 \Rightarrow \text{ уд.} \\ 4)) \ mk>0 \quad 6m=-6>-9 \Rightarrow \text{ не уд. } D(y) \end{array}\right.$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y-6=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \end{array}\right.$

~~Отв~~

Ответ: $\begin{cases} x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$

Задача 4.

рис.1.

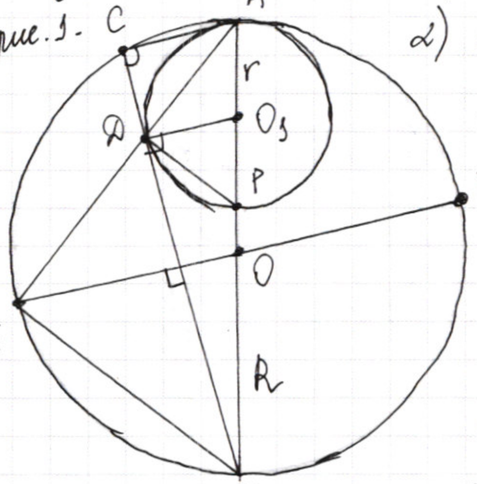
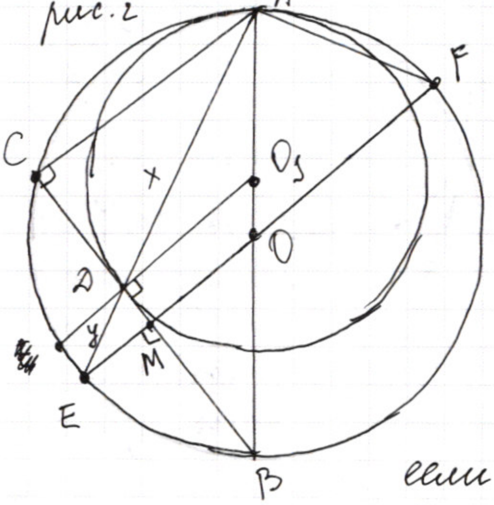


рис.2



1) BC-касательная $\Rightarrow O_1D$ (радиус) $\perp BC$

2) $EF \perp BC \Rightarrow EF \parallel O_1D \Rightarrow$ пусть $EF \cap AB = (\cdot)H$, тогда $\triangle DAO_1 \sim \triangle EAH$ (общая вершина и $\parallel$ осн)

$\Rightarrow \frac{DO_1}{EH} = \frac{AD}{AE}$ 3) $\left.\begin{array}{l} AD = 2r\sin\angle DPA \\ AE = 2R\cdot\sin\angle EBA \\ \angle DPA = 90^\circ - \angle DAP = \angle EBA \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} = \frac{DO_1}{EH}$, т.к. $DO_1 = r \Rightarrow EH = R \Rightarrow$

$(\cdot)H = (\cdot)O$ 4) AB-диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ \Rightarrow$

$\triangle ABC \sim \triangle O_1BD$ (общ. верш. $(\cdot)B$ и $AC \parallel DO_1$) $\Rightarrow$

$\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{13+12} \Rightarrow 24R = 25r \Rightarrow$

$r = \frac{24}{25}R \Rightarrow$ (рисунок 2-верный)

5) пусть $ED = y$; $DA = x \Rightarrow$ из степени $(\cdot)D \Rightarrow CD\cdot BD = AD\cdot DE = xy = 13\cdot12 = 156$

6) $EM \parallel AC$; $(\cdot)D$-общая $\Rightarrow \triangle EDM \sim \triangle ADC \Rightarrow$

$\frac{AD}{DE} = \frac{x}{y} = \frac{DC}{DM}$ (т.к. OE-радиус; $OE \perp BC \Rightarrow$ если $OE \cap BC = (\cdot)M$, то $CM = BM$) $\Rightarrow DM = 13 - \frac{25}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \begin{cases} \frac{x}{y} = 24 \\ xy = 156 \end{cases} \Rightarrow x = 24y \downarrow \quad 24y^2 = 156 \Rightarrow \overset{1}{y} = \sqrt{\frac{13}{2}} \quad x = 24\sqrt{\frac{13}{2}} \Rightarrow$

7) $\triangle ACD$: $\angle C = 90^\circ \Rightarrow AC^2 = AD^2 - DC^2 = 24^2 \cdot \frac{13}{2} - 144 = 144 \cdot 25$

8) $\triangle ABC$: $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 144 \cdot 25 + 25^2 = 25(144+25) = 25 \cdot 169 \Rightarrow$

$AB = 2R = 5 \cdot 13 \Rightarrow R = \frac{65}{2} \Rightarrow r = \frac{65}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$

9) $AE = 2R \cdot \sin\angle AFE$ (хорда окр-ти) $\Rightarrow$ т.к $AE = x+y = 25\sqrt{\frac{13}{2}} \Rightarrow$

$\sin\angle AFE = \frac{25}{65} \cdot \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{5}{13} \cdot \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$ 10) EF-диаметр $\Rightarrow$

$\angle EAF = 90^\circ \Rightarrow S_{\triangle EAF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF$ 11) $AF = \sqrt{EF^2 - AE^2}$; $EF = 2R \Rightarrow$

$AF = \sqrt{4 \cdot \frac{65^2}{4} - 25^2 \cdot \frac{13}{2}} = \sqrt{25 \cdot 13\left(13 - \frac{25}{2}\right)} = \cdot 5\sqrt{13 \cdot \frac{1}{2}} = 5\sqrt{\frac{13}{2}} \Rightarrow$

$S_{\triangle EAF} = \frac{1}{2} \cdot 25 \cdot \sqrt{\frac{13}{2}} \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{125 \cdot 13}{4} = \frac{1625}{4}$

Ответ: $\begin{cases} R(\Omega) = \frac{65}{2} \\ r(\omega) = \frac{156}{5} \\ \angle AFE = \arcsin\left(\frac{5}{\sqrt{26}}\right) \\ S_{\triangle EAF} = \frac{1625}{4} \end{cases}$

Задача 5 $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\begin{cases} f(x) = \left[\frac{x}{4}\right] \\ f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{1}{4y}\right] \end{cases} \Rightarrow$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right]$, т.к. $4 \leq x \Rightarrow$

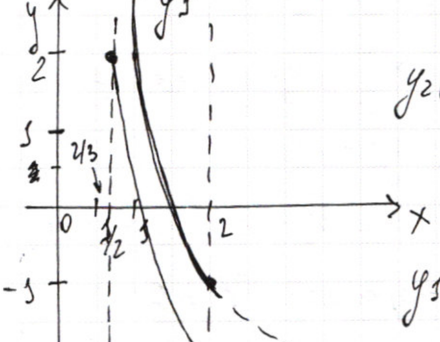
$\left[\frac{x}{4}\right] \geq 1$ $\left(\frac{4}{4} = 1\right) \Rightarrow$ чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{4y}\right] < -1$, но

$y > 0 \Rightarrow \left[\frac{1}{4y}\right] \geq 0 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 1 + 0 = 1 \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 - \begin{matrix} x \in \varnothing \\ y \in \varnothing \end{matrix}$

Ответ: ноль

Задача 6. $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$ $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$ ← уд.

$\underbrace{-2 + \frac{4}{3x-2}}_{''y_1} \geq ax + b \geq \underbrace{2\left(3x - \frac{17}{4}\right)^2 - \frac{65}{8}}_{''y_2}$ $y = -2 + \frac{4}{3x-2}$ - гипербола $\begin{pmatrix} x \neq \frac{2}{3} \\ y \neq -2 \end{pmatrix}$

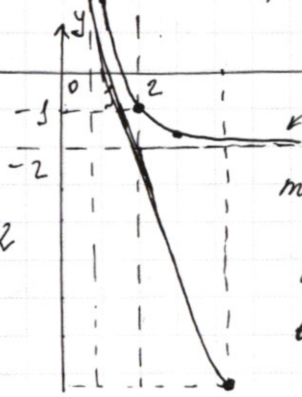


$y_2(2) = 2 \cdot \left(6 - \frac{17}{4}\right)^2 - \frac{65}{8} = -2$

$y_2\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \left(2 - \frac{17}{4}\right)^2 - \frac{65}{8} = 2$

$y_1(2) = -2 + \frac{4}{6-2} = -1$

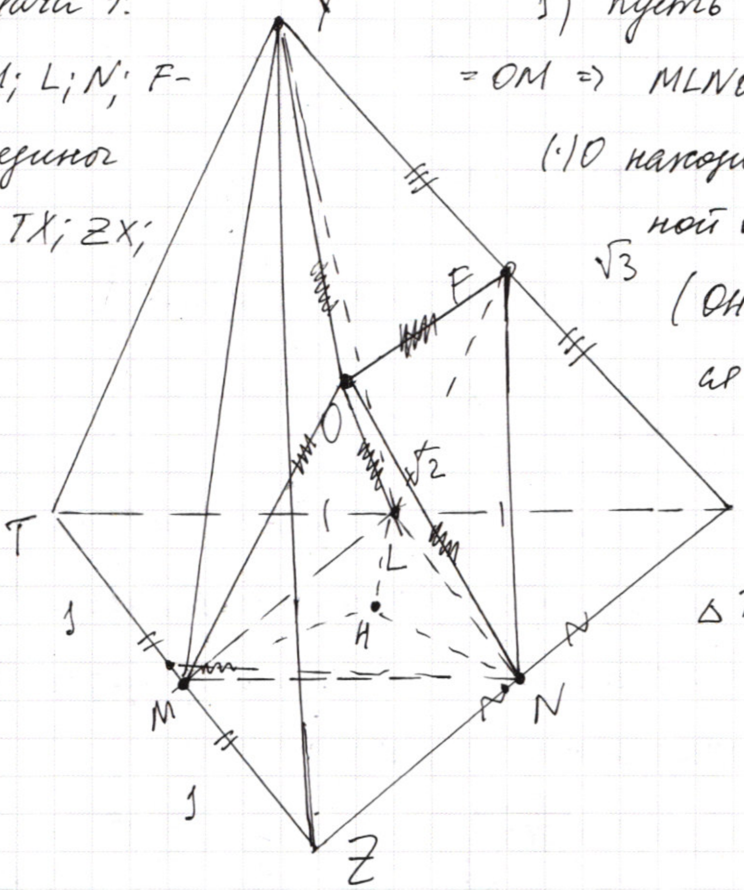
$y_1\left(x \neq \frac{2}{3}\right) \Rightarrow$



← при $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$ только правая ветвь гиперб. и левая половина парабол.

Задача 7.

(·)M; L; N; F- середины TZ; TX; ZX; YX



1) пусть (·)O- центр сферы => OL = ON = = OM => MLNO- равнобокая пирамида => (·)O находится над центром описанной окр-ти около △MLN ((·)H) (OH ⊥ (TZX)). тоже выполняется для △LFN; △MLY; △LYF, ...

2) ML-ср. линия △TZX => ZX = 2•ML

Задача 3 (продолжение) => $k^{\log_5 13} - k^{\log_5 12} \le 1$ ~~выполняется при $\begin{cases} k \le 3125 \\ k > 1 \end{cases}$ (функция = $k^{\log_5 13} - k^{\log_5 12}$ возрастает на всех k > 1, а т.к. при $k = 5^5 = 3125$ f(k) = 1 => при k ∈ (1; 3125] f(k) ≤ 1)~~ при k ∈ (0; 1], т.к. $\log_5 13 > 0$ и $\log_5 12 > 0$ => ~~f(k) < 1~~, ~~т.к. при $k = \frac{1}{5}$ => (-13+12) при k = 1 f(k) < 1 => при k∈~~

$\log_5 13 > \log_5 12$ => при $k \le 1$ всегда $k^{\log_5 13} < k^{\log_5 12}$ => $f(k) < 1$

=> ~~$\begin{cases} k > 0 \\ k \le 3125 \end{cases}$ => $\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ 26x - x^2 \le 3125 \end{cases}$ $\begin{cases} x \in (0; 26) \\ x^2 - 26x + 3125 \le 0 \end{cases}$ D/4 = 169~~

при $k = 5$ => $5^{\log_5 13} - 5^{\log_5 12} = 13 - 12 = 1$ => при $k > 5$, т.к. $f(k)\uparrow$ (при k > 1) => $k^{\log_5 13} - k^{\log_5 12} > 1$, а при $\begin{cases} k \le 5 \\ k > 0 \end{cases}$ $k^{\log_5 13} - k^{\log_5 12} \le 1$ => уд.

=> $\begin{cases} k \le 5 \\ k > 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} 26x - x^2 \le 5 \\ D(y) \end{cases}$ ↘ $x^2 - 26x + 5 \ge 0$ $D/4 = 169 - 5 = 164 = 4 \cdot 41$ =>

$\begin{cases} x \in (-\infty; +13 - 2\sqrt{41}] \cup [13 + 2\sqrt{41}; +\infty) \\ x \in (0; 26) \end{cases}$

Ответ: $x \in (0; 13 - 2\sqrt{41}] \cup [13 + 2\sqrt{41}; 26)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

крайний случай для ax+b: проходит через (2;−2) и $(\frac{2}{3};2) \Rightarrow$

$\begin{cases}-2=2a+b\\2=\frac{2}{3}a+b\end{cases} \downarrow - \quad -4=\frac{4}{3}a \Rightarrow a=-3, \quad b=-2+6=4 \Rightarrow \begin{cases}a=-3\\b=4\end{cases}$;

Наше условие выполняется, если на промежутке $y=ax+b$ не пересекает ни гиперболу, ни параболу (концы не включая) при этом $y=ax+b$ не может касаться параболы изнутри. ⇒

~~если $ax+b=y$ проходит через $(2;-2) \Rightarrow a \neq -3 \Rightarrow b \neq 4$~~

~~касание с гиперболой: $y_2' = \frac{-4\cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{-12}{(3x-2)^2} = a \Rightarrow$~~

~~так же крайний случай для ax+b: проходит через $(2;-1)$; $(\frac{2}{3};2)$~~

~~$\begin{cases}-1=2a+b\\2=\frac{2}{3}a+b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=\frac{-9}{4}\\b=-1+\frac{9}{2}=\frac{7}{2}\end{cases} \Rightarrow a \neq \frac{-9}{4}$ − для всех $ax+b=y$~~

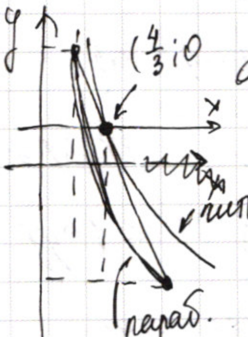
↙ производная гиперболы

при $a=-3$: $y_2' = \frac{-12}{(3x_0-2)^2} = -3 \Rightarrow (3x_0-2)^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}3x_0-2=2\\3x_0-2=-2\end{array}\right. \left[\begin{array}{l}x_0=\frac{4}{3}\\x_0=0\end{array}\right.$

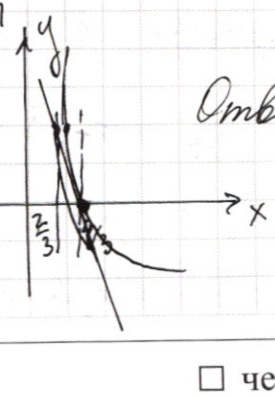
⇒ если касание в (·) $\frac{4}{3} \Rightarrow y_2(\frac{4}{3}) = -2+\frac{4}{4-2} = 0 \Rightarrow$

$a=-3$ и $y=ax+b$ проходит через $(\frac{4}{3};0) \Rightarrow \frac{4}{3}a+b=0 \Rightarrow b=-\frac{4}{3}a=4$

⇒ при $\begin{cases}a=-3\\b=4\end{cases} \Rightarrow$ 1) пересекает параболу в 2х точках ⇒
2) касается гиперболы



поднять или опустить или повернуть прямую нельзя (иначе пересечет y_2 или y_1) ⇒ единственное решение $\begin{cases}a=-3\\b=4\end{cases}$



Ответ: $\begin{cases}a=-3\\b=4\end{cases}$; [illegible]

$0 \geq \log_k \left(k^{\log_5\left(\frac{13}{5}\right)}\left(1-k^{\log_5\left(\frac{12}{13}\right)}\right)\right) = \log_5\left(\frac{13}{5}\right) + \log_k\left(1-k^{\log_5\left(\frac{12}{13}\right)}\right)$

$1-\log_5(13) \geq \log_k\left(1-k^{\log_5\left(\frac{12}{13}\right)}\right)$ $\quad 1-k^{\log_5\left(\frac{12}{13}\right)} \leq k^{1-\log_5 13}$

$2\alpha = k \quad 2\beta = m \quad \sin(k+m) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sin(k+2m)+\sin k = -\frac{2}{17}$

$\cdot \sin(k+m)\cdot\cos m = \frac{-1}{17} \qquad \sin k\cdot\cos m + \sin m\cdot\cos k$

1) $\sin(k)+4\cos(k) = -1$ $\qquad 1+\frac{k^{\log_5(12)}}{k^{\log_5(13)}} \leq \frac{k}{k^{\log_5 13}} \Rightarrow k^{\log}$

$\frac{6}{17}-\frac{1}{17} = \qquad \frac{-2}{17}-\frac{15}{17} = -1$

$k+m = \arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right)$

$k = \arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$ $\qquad \sin(2\alpha) = \frac{15}{17}$

$m =$

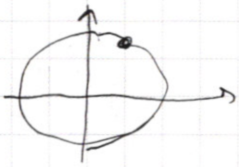
$\sin(k+m)\cdot\cos m + \cos(k+m)\cdot\sin(m) + \sin k = \frac{15}{17} \Rightarrow$

$\overset{\shortparallel}{\frac{-1}{\sqrt{17}}} \qquad \overset{\shortparallel}{\frac{1}{\sqrt{17}}} \qquad \overset{\shortparallel}{\frac{4}{\sqrt{17}}} \qquad \overset{\shortparallel}{\frac{4}{\sqrt{17}}} + \sin k =$

~~$(3x-1)^2$~~ $\quad (3x-3)^2$

$\begin{array}{r} 289 \\ -225 \\ \hline 64 \end{array}$

$\log_5\left(\frac{13}{5}\right) = \log_5(13)-1$



$+\begin{array}{r}45\\45\end{array}$ $\quad$ ~~46~~ ~~36~~

$9k^2+m^2=90$

$m^2+36k^2-13mk=0$

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \Rightarrow 9(x-1)^2+(y-6)^2 = 45+36+9 = 90 \end{cases}$

~~$+3x+y=3$~~ $\qquad (3x+y-2)^2 \qquad \sqrt{(y-6)(x-1)} = y-6x \qquad D = 169k^2-36\cdot 4k^2 = 25k^2$

$9x^2+y^2+4-12x-$ $\qquad$ 1) $y \geq 6x \Rightarrow y^2-12xy+36x^2 = xy-6x-y+6$

$36x^2+y^2-13xy+6x+y=6$ $\qquad 36\cdot 4 = 144$

$y-6x = \sqrt{(y-6)(x-1)}$ $\qquad |x^2-26x|^{\log_5(12)} + 26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2 \geq 0 \qquad (26x-x^2)^{\log_5(12)}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36-90$

$k^{\log_5 12}+k \geq k^{\log_5 13} \qquad k^{\log_5 12}\left(1-k^{\log_5\frac{13}{12}}\right)+k \geq 0$ $\quad 90$

$\frac{9\cdot 2}{5} = \frac{18}{5}$

$k^{\log_5\frac{12}{5}}+1 \geq k^{\log_5\frac{13}{5}}$

$k = 12^{\log_{12} k} \qquad 12^{\log_5 k}+12^{\log_{12} k}$

$\log($

$k^{\log_5\frac{12}{5}}\left(1-\cancel{k^{\log_5\frac{1}{5}}}\right) \qquad \log_5\frac{13}{5} = \log_5\left(\frac{12}{5}\cdot\frac{13}{12}\right)$

$\log_k\left(k^{\log_5\left(\frac{12}{5}\right)}\left(1-k^{\log_5\left(\frac{13}{12}\right)}\right)\right) =$

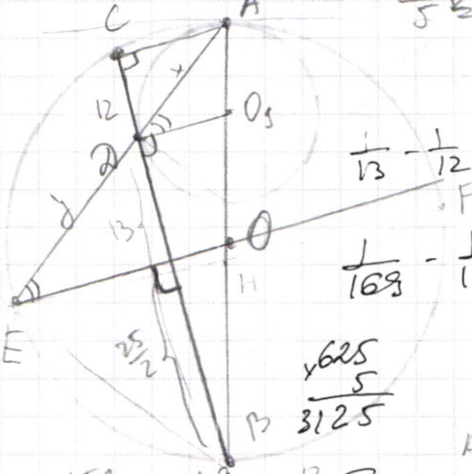
$k = x-1 \quad y-6 = m$

$6(x-1) \quad y-6 \qquad y-6x = m-6k$

$\begin{cases} 9k^2+m^2=90 \\ \sqrt{km} = m-6k \Rightarrow km = m^2+36k^2-12mk \\ m^2+36k^2-13mk=0 \end{cases}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

13^5



$\frac{13}{5} \le \frac{12}{AD}+1$ $\frac{AD}{AE} = \frac{O_1D}{EH}$

$\frac{41}{4}$ 164 $AD \cdot DE = 12 \cdot 13 \Rightarrow DE = \frac{156}{AD}$

$\frac{26}{5} \le \frac{24}{5}+1$

$26 \times 26 = 156$, 52, 676

$\frac{x}{\left(x+\frac{156}{x}\right)} = \frac{O_1D}{EH}$

$169 \times 3 = 507$, $169 \cdot 2 = 338$, 343

$\frac{1}{13} - \frac{1}{12}$

$\frac{13}{12}$ $\frac{12}{26}$ $\frac{13}{156}$

$125 \times 13 = 375$, 125, 1625

$13+2\sqrt{41} \vee 26$

$169 + 4 \cdot 41 + 26\sqrt{41} \vee 26^2$

$\frac{x}{AE} = \frac{2r}{2R}$

$\frac{1}{169} - \frac{1}{144} =$

$26\sqrt{41} \vee 343$

$\frac{x}{AE} = \frac{r}{R} = \frac{x}{\left(x+\frac{156}{x}\right)}$ $\frac{13}{25} = \frac{r}{R}$

$\log_5\left(\frac{12}{5}\right) \cdot \log_5(k) + \log_5\left(k^{\log_5\left(\frac{13}{5}\right)}-1\right) \le 0$

$625 \times 5 = 3125$

$AC = \frac{425r}{13} \Rightarrow$

$x \cdot y = 156 \Rightarrow y/x = \frac{156}{x^2}$

k $\log_5 k = n$ $676 \cdot 41 \vee 343^2$

$\frac{156}{24} = \frac{39}{13} \vee \frac{13}{2\sqrt{41}}$

$\left(\frac{13}{5}\right)^n - 28 = \left(\frac{12}{5}\right)^n \frac{r}{R} \le 1$ $\Rightarrow R/r = 1 + \frac{y}{x}$ $\frac{156}{x^2}$

$x^2 = \frac{625r^2}{}$

$169 \vee 4 \cdot 41 = 164$ $51 = 3 \cdot 17$

$343 \times 343 = 1029$, 1372, 1029, 117649

$2\left(3x - \frac{17}{4}\right)$

$\frac{1}{5^n}\left(13^n - 12^n\right) \le 1$ $26R$

$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$ $\frac{39}{5} \le \frac{36}{5}+1$ $28 \cdot 8 = 224$

$25r = 24R$

$13^n - 12^n \le 5^n$

$18x^2 - 51x + 28 = 2\left(3x - \frac{17}{4}\right)^2 - \frac{65}{8}$ $289 - 224 = 65$

$25 \cdot 13^2 - 25^2 \cdot \frac{13}{2}$

$2\left(\frac{7}{4}\right)^2 - \frac{65}{8} = -2$ 52 13 $48+5=53$

$676 \times 41 = 676$, 2704, 27716

k $\Rightarrow \frac{13}{5} - \frac{12}{5}$ 65 60

$f(ab) = f(a) + f(b)$

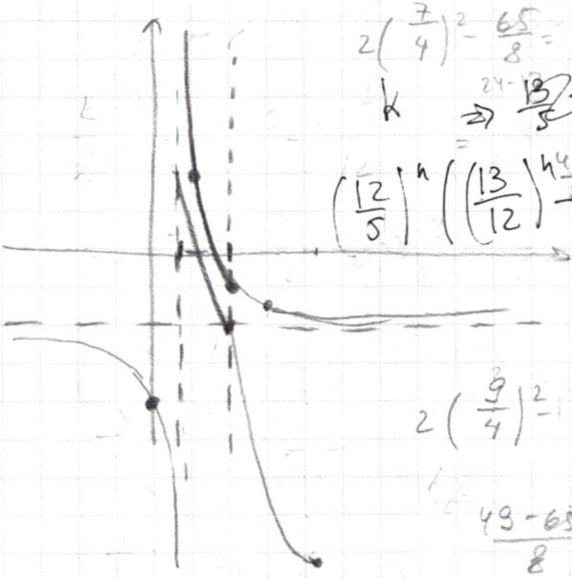
$f(p) = \left[p/4\right]$

$\left(\frac{12}{5}\right)^n \left(\left(\frac{13}{12}\right)^n - 1\right) \le 1$ $\frac{49}{81}$

$f(x/y) < 0$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(x) =$



$2\left(\frac{9}{4}\right)^2 - \frac{65}{8} = 1$ $\Rightarrow 144 = 144 \cdot 25 \Rightarrow AC = 12 \cdot 5$

$\left[x/4\right] + \left[\frac{1}{4x}\right] \Rightarrow$

≥ 1 $k^{\log_5\left(\frac{12}{5}\right)}\left(k^{\log_5\left(\frac{13}{12}\right)}-1\right) \le 1$

$\frac{49-65}{8}$

$17 \cdot 8 = 9$

$\left(-2 + \frac{4}{3x-2}\right)' = \frac{-4 \cdot 3}{(3x-2)^2} = \frac{-12}{(3x-2)^2}$

$81 - 65$ $\frac{65}{16}$ $\log_5\left(\frac{12}{5}\right)$

$\begin{cases} 2 = \frac{2}{3}a + b \\ -1 = 2a + b \end{cases}$ $\frac{4}{3}a = -3 \Rightarrow a = -\frac{9}{4}$

$\log_5\left(\frac{13}{5}\right) + \log_5\left(k^{\log_5\left(\frac{13}{12}\right)}-1\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)