МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 5.

~~Т.к. 2 про~~ Заметим, что $f(\frac{7}{2}) = f(7) + f(\frac{7}{2})$, откуда $f(7)=0$. Тогда $f(k)+f(\frac{7}{k})=0 \Rightarrow f(b) = -f(\frac{7}{b})$

(1) Значит, $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{7}{y}) = f(x) - f(y)$. Найдём $f(p)$ для всех простых чисел $p \in [3; 27]$:

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$, $f(5) = 1$, $f(7) = 1$, $f(11) = 2$, $f(13) = 3$, $f(17) = 4$, $f(19) = 4$, $f(23) = 5$. Определим $f(y)$ для всех составных чисел $y \in [3; 27]$: $f(4) = f(2) + f(2) = 0$ ($f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$), $f(6) = f(2) + f(3) = 0$, $f(8) = f(2) + f(4) = 0$, $f(9) = f(3) + f(3) = 0$, $f(10) = f(2) + f(5) = 1$, $f(12) = f(6) + f(2) = 0$, $f(14) = f(2) + f(7) = 1$, $f(15) = f(5) + f(3) = 1$, $f(16) = f(8) + f(2) = 0$, $f(18) = f(2) + f(9) = 0$, $f(20) = f(10) + f(2) = 1$, $f(21) = f(3) + f(7) = 1$, $f(22) = f(11) + f(2) = 2$, $f(24) = f(4) + f(6) = 0$, $f(25) = f(5) + f(5) = 2$, $f(26) = f(13) + f(2) = 3$, $f(27) = f(9) + f(3) = 0$.

Распределим значения функции в порядке убывания:

$f(23) = 5$, $f(19) = f(17) = 4$, $f(26) = f(13) = 3$, $f(25) = f(11) = f(22) = 2$, $f(5) = f(7) = f(10) = f(14) = f(15) = f(20) = f(21)$

Т.к. необходимо найти все ~~$x \in$~~ $3 \le x \le 27$ и $3 \le y \le 27$, такие, что $f(\frac{x}{y}) < 0$, то, из утверждения (1) получаем, что $f(x) < f(y)$. Заметим, что при $y = 23$ можно найти 24 натуральных $3 \le x \le 27$ таких, что $f(x) < f(y)$. (2).

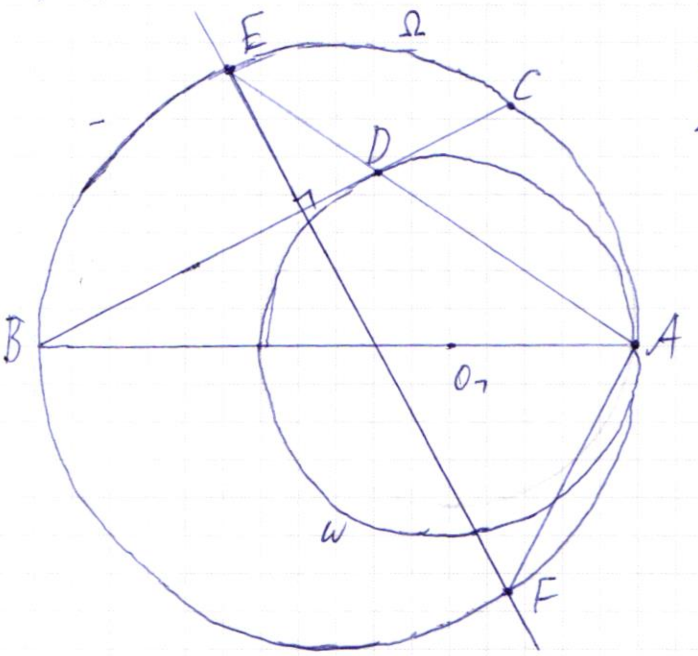
При $y = 19$ подходящих значений x будет 22, при $y = 17$ аналогично (3). Для $y = 26$, как и для $y = 13$ можно найти

20 значений x. (4). Для $y=25$, как и для $y=11$, и $y=22$ подойдут ~~18~~ 17 значений x. (5). $f(y)=1$ при семи значениях $3 \le y \le 27$, поэтому для них подойдут $17-7=10$ значений x. (6) Таким образом, из пунктов (2–6) следует, что можно найти $24+22\cdot 2+20\cdot 2+17\cdot 3+10\cdot 7=$

$=24+44+40+51+70=68+110+51=229.$

Ответ: 229.

N 4.



По свойству хорд, $BD\cdot DC=ED\cdot AD$. Положим что O_1 – центр окружности ω. Тогда, по свойству касательной

$BD\cdot \cancel{CD} = BO_1^2$
BC

$BO_1=\sqrt{BD\cdot BC}=\sqrt{BD\cdot(BD+CD)}=$

$=\sqrt{\frac{13}{2}\cdot 9}=\sqrt{}$

Из $\triangle BDO_1$: $DO_1=\sqrt{BO_1^2-BD^2}=$

$=\sqrt{\frac{13\cdot 9}{2}-\frac{169}{4}}=\sqrt{\frac{13\cdot 18-13\cdot 13}{4}}=$

$\sqrt{\frac{65}{4}}=\frac{\sqrt{65}}{2} \Rightarrow r(\omega)=\frac{\sqrt{65}}{2}$

N 3.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

Т.к. логарифмическое выражение всегда положительно, то $|x^2+6x|=x^2+6x$

$3^{\log_4(x^2+6x)}-(x^2+6x)^{\log_4 5} \ge -x^2-6x$

$(x^2+6x)^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)} \le x^2+6x$

Пусть $x^2+6x=t$, тогда $t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t} \le t$

Пусть $t=4^k$, тогда $(4^k)^{\log_4 5}-3^{\log_4 4^k} \le 4^k$

$5^k-3^k \le 4^k$. Заметим что $5^k-3^k=4^k$ при $k=2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Разделим обе части на 5^k: $1 \le 0{,}6^k + 0{,}8^k$

$y=0{,}6^x$ убывающая функция, как и $y=0{,}8^x$, поэтому

$1 \le 0{,}6^k + 0{,}8^k$ верно $\forall k \le 2$.

Вернёмся к прежней переменной$_1$: $t \le 4^2 \Rightarrow t \le 16$

Вернёмся к прежней переменной$_2$: $x^2+6x \le 16$

$x^2+6x-16 \le 0$

$D_1 = 9+16=25$, $x_1 = -3+5=2$, $x_2=-3-5=-8$.

$+$ -8 2 $+$ x $\quad x \in [-8; 2]$ (1)

При этом т. к. x^2+6x является логарифмическим выражением, то $x^2+6x>0 \Rightarrow x(x+6)>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup$ $\cup(0;+\infty)$ (2). ~~Из~~ Из (1) и (2) получаем, что $x \in [-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $x \in [-8;-6)\cup(0;2]$

N 6.

$$\begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \\ ax+b \geq 8x^2-34x+30 \end{cases} \quad \begin{cases} b \le \frac{4x-3}{2x-2} - ax \\ b \geq 8x^2-(34+a)x+30 \end{cases}$$

При $x=\frac{3}{2}$: $\begin{cases} b \le 3-1{,}5a \\ b \geq 18-(34+a)\cdot 1{,}5+30 \end{cases}$ $\begin{cases} b \le 3-1{,}5a \\ b \geq -3-1{,}5a \end{cases}$ (1)

При $x=2$: $\begin{cases} b \le \frac{5}{2}-2a \\ b \geq 32-(34+a)\cdot 2+30 \end{cases}$ $\begin{cases} b \le \frac{5}{2}-2a \\ b \geq -2a-6 \end{cases}$ (2)

При $x=3$: $\begin{cases} b \le \frac{9}{4}-3a \\ b \geq 72-(34+a)\cdot 3+30 \end{cases}$ $\begin{cases} b \le \frac{9}{4}-3a \\ b \geq -3a \end{cases}$ (3)

~~При $a \le -3$: $b \le 1{,}5$ из системы (2), но $b \geq 9$ из системы (3).~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

~~Противоречие.~~

~~При $a \in (-3; -2)$ $b \leq$~~

Отсюда получаем, что $\begin{cases} 3-1{,}5a \geq -2a-6 \\ 3-1{,}5a \geq -3a \\ \frac{5}{2}-2a \geq -3-1{,}5a \\ \frac{5}{2}-2a \geq -3a \\ \frac{9}{4}-3a \geq -2a-6 \\ \frac{9}{4}-3a \geq -3-1{,}5a \end{cases}$

$\begin{cases} 0{,}5a \geq -9 \\ 1{,}5a \geq -3 \\ -0{,}5a \geq -5{,}5 \\ a \geq -\frac{5}{2} \\ -a \geq \cancel{-3{,}75}\ -8{,}25 \\ -1{,}5a \geq -5{,}25 \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq -18 \\ a \geq -2 \\ a \leq 11 \\ a \geq -2{,}5 \\ a \leq 8{,}25 \\ a \leq \frac{5{,}25}{1{,}5} \end{cases}$ $\begin{cases} a \geq -2 \\ a \leq 3{,}5 \end{cases}$

~~Для~~ При $x = \frac{5}{4}$: $\begin{cases} b \leq 4-1{,}25a \\ b \geq -1{,}25a \end{cases}$ (4)

Из систем (3) и (4) получаем, что $\frac{9}{4}-3a \geq -1{,}25a$

$-1{,}75a \geq -\frac{9}{4} \Rightarrow a \leq \frac{9}{7}$, т.е. $a \in [-2; \frac{9}{7}]$

Пусть $a=0$. Тогда $\frac{4x-3}{2x-2} \geq b \geq 8x^2-34x+30$

№2.

$3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \Rightarrow \begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2 \\ 3y-2x \geq 0 \end{cases}$

Выразим x: $4x^2-15xy+2x = \cancel{9y^2}\ 2-3y-9y^2$

~~$x+4$~~ $4x^2-15xy+2x-2+3y+9y^2$

Рассмотрим треугольник со сторонами

$a=\sqrt{3}x$, $b=\sqrt{3}y$, $c=2$. Тогда, по теореме косинусов, $3x^2+3y^2-$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{7}{\sqrt{17}}$ $\quad a=\sqrt{3}x,\ b=\sqrt{3}y$

$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = 4$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad -2\cdot 6xy\cos\alpha = 4$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \cos(2\alpha+2\beta) = 17 - \frac{7}{17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad xy\cos\alpha = -\frac{2}{3}$

$-2(3x+2y)$ $\quad 3x+2y = -6xy\cos\alpha$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad (3y-2x)$

$9xy-6x^2+6y^2-4xy=$

$-\frac{7}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad f(27)=7,\ f(\ 5xy+6(y^2x^2)$

$f(5)=7,\ f(7)=7,$ $\quad f(14)=$

$3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}$ $\quad f(75)=7,\ f(70)=7, f(20)=7,$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$ $\quad f(3)=0,\ f(2)=0,\ f(4)=0,\ f(8)=0\ f(76)=0,$

$\begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2 \\ 3y-2x\geq 0 \end{cases}$ $\quad f(6)=0, f(72)=0, f(24)=0, f(8)=0$

$9y^2+4x^2-12xy-6y^2-x^2-6x-4y=4$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$ $\quad 3xy-2x-3y+2-6y^2-x^2-6x-4y=4$

$x^2+y^2 = \frac{6x+4y+4}{3}$ $\quad 6y^2+x^2+8x+7y+2-3xy=0$

$3x+2y = \frac{3x^2+3y^2}{8}$ $\quad f(\frac{a}{b}) = f(a)+f(\frac{7}{b}) = f(a)-f(b),$

$+$

$3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}$ $\quad f(\frac{a}{b}) = f(a)+f(\frac{7}{b})$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$ $\quad \cancel{f(ab)} = f(\frac{7}{b}) = f(7)+f(\frac{7}{b})$

$x^2+6x>0 \Rightarrow x(x+6)>0, \Rightarrow x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$ $\quad f(2)+f(\frac{7}{2})=0$

$f(ab) = f(a)+f(b)$ $\quad f(\cancel{\frac{7}{2}) = f}$ $\quad \cancel{f(7)}\ f(k)+f(\frac{7}{k})=0$

$f(p) = [p/4]$ $\quad f(5)=7$ $\quad f(p_1\cdot p_2) = f(p_1)+f(p_2) = [\frac{p_1}{4}]+[\frac{p_2}{4}]$

$f(\frac{7}{8}) = -f(b)$

Допустим, что $\frac{x}{y}$ – простое число

$\cancel{f(3)=\frac{3}{4}}$ $\quad f(2) = \frac{1}{2}.f(3)=0$ $\quad f(\frac{x}{y}) = f(x)\cdot\frac{7}{y}) =$

$f(x)+f(\frac{7}{y})$ $\quad f(7)=0$

$f(\frac{7}{3}) = f(\frac{7}{6}\cdot 2) = f(2)+f(\frac{7}{6})$ $\quad \cancel{f(7)}\ f(7) = f(2)+f(\frac{7}{2})$

$f(2\cdot 3) = f(2)+f(3)=0$ $\quad 2, 3, 6, 4, 6, 8$ $\quad f(\frac{7}{2}) = f(7)+f(\frac{7}{2})$

$\cancel{f(7)} = f(2\cdot 6) = f(6)+f(2) = 0$ $\quad f(7) = f(2)+$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

~~Заметим, что f(7) = f~~ Т.к. 2 - простое число, то $f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$.

Заметим что $\cancel{f(7)} = f(\frac{7}{2}) = f(7) + f(\frac{7}{2})$, откуда $f(7) = 0$.

Тогда $f(\frac{a}{b}) = f(a) + f(\frac{7}{b}) = f(a) + \cancel{f(\frac{7}{b})}$

$\cancel{f(\frac{7}{k})} = f(k) + f(\frac{7}{k}) = 0 \Rightarrow f(b) = -f(\frac{7}{b})$ 4-

Тогда $f(a/b) = f(a) + f(\frac{7}{b}) = f(a) - f(b)$ $<3+6x<3+4-x^2$

Т.к. $f(a/b) < 0$, если $f(a) < f(b)$. $x^2+6x<4$

Для простых чисел: $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = 7$, $f(7) = 7$,

$f(77) = 2$, $f(73) = 3$, $f(77) = 4$, $f(79) = 4$, $f(23) = 5$, f

$f(4) = 0$, $f(8) = 0$, $f(76) = 0$ & $f(6) = 0$, $f(9) = 0$, $f(70) = 7$, $f(72) = 0$,

$f(74) = 7$, $f(75) = 7$, $f(7\overset{8}{7}) = 0$, $f(20) = f(70) + f(2) = 7$-

$f(27) = 7$, $f(22) = 0$, $f(24) = 0$, $f(25) = \cancel{7}2$, $f(26) = 3$, $f(27) = 0$.

~~f(a) при 3 ≤ a ≤ 27~~ Имеем что система

~~f(a) ∈~~ $\in [0; 5)$ $f(23) = 5$, $\Rightarrow$ 24 пары

$\cancel{f(79) = 4}$ $f(23) = 5$ $x = \frac{3}{tg y}$, $y \in ($

$\geq (8x^2 - 34x + 30)(2x-2)$

$4x - 3 \geq (ax+b)(2x-2)$ $f(79) = 4$ $\frac{9}{4} \geq 3a+b \geq 72 - 702 + 30$

$\frac{4\cdot(2x-2) + 2(4x-3)}{(2x-2)^2}$ $f(77) = 4$, $0 \leq 3a+b \leq \frac{9}{4}$

$f(26) = 3$ $\frac{5}{2} \geq 2a+b \geq 32 - 68 + 30$

$2a+b$

$\frac{8x - 8 + 8x + 6}{4(2x-2)^2} =$ $f(73) = 3$ $D_1 = 289 - 240 = 49$

$16x - 74$ $x = \frac{74}{76}$

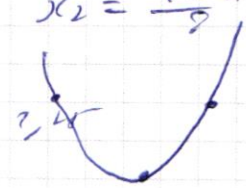
$\frac{\cancel{2}}{+(2x-2)^2}$ $f(77) = 2$ $x_1, x_2 = \frac{17+7}{8} = 3$

$\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{4}$ $f(25) = 2$ $x_2 = \frac{17-7}{8} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = 1{,}25$

$a = \sqrt{3}x$, $b = \sqrt{3}y$ $f(5) = 7$

$2ab\cos\angle = 6x + 4y$

~~ab~~ $3xy\cos\angle = 3x + 2y$ $f(7) = 7$



$f(74) = 7$ $f(75) = 7$ $f(20) = 7$, $f(27) = 7$

$\sin 2(\angle+\beta) = 2\sin(\angle+\beta)$, $\cos(\angle+\beta) = -\frac{7}{2\sqrt{7}}$

$\sin 2(\angle+2\beta) + \sin 2\angle = 2\sin(\angle+2\beta)\cdot\cos(\angle+2\beta) + 2\sin\angle\cdot\cos\angle$

$-8\sin^2(2\angle+2\beta) = -\frac{\cancel{7}8}{77}$ $\sin(2\angle+4\beta)$ $|x^2+6x| < 4$

$x^2+6x > 4$, тогда $\log_4(x^2+6x) > 7$, $3^{\log_4(x^2+6x)} > 3$, $3+6x > 3+4-x^2$

$x^2+6x > 4 < 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Допустим что $\log_4(x^2+6x)>4$. Тогда $6x>4-x^2$ (2). (1)

Тогда, из утверждения 1: $3^{\log_4(x^2+6x)}>3^1=3$.

получаем что $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x>3+4-x^2$ $\qquad \angle BAC=\frac{BC}{}$

При этом $|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2<x^2+6x+6x-4$ $\qquad AB=\frac{BC}{\sin BAC}$

Заметим что при $x=2$ $3^{\log_4(4+12)}+12=27$

$|2^2+12|^{\log_4 5}-4=16^{\log_4 5}-4=(4^{\log_4 5})^2-4=21$

$|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ $\qquad \cos\beta AD=\frac{AD^2+AB^2-BD^2}{2AD\cdot AB}$

$3^{\log_4 t}=\frac{1}{3^{\log_t 4}}$ $\quad 3^{\frac{1}{\log_t 4}}=\frac{1}{3^{\log_t 4}}$

$|x^2+6x|^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}\le x^2+6x$ $\qquad \cos BAC=\cos(BAD+\cos BAC)$

Пусть $x^2+6x=t$, тогда $|t|^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}\le t$

Рационализируем: $(|t|-3)(5-t)\ge 0$

$t=\pm 3$, $t=5$

$x^2+6x>0$

$x(x+6)$

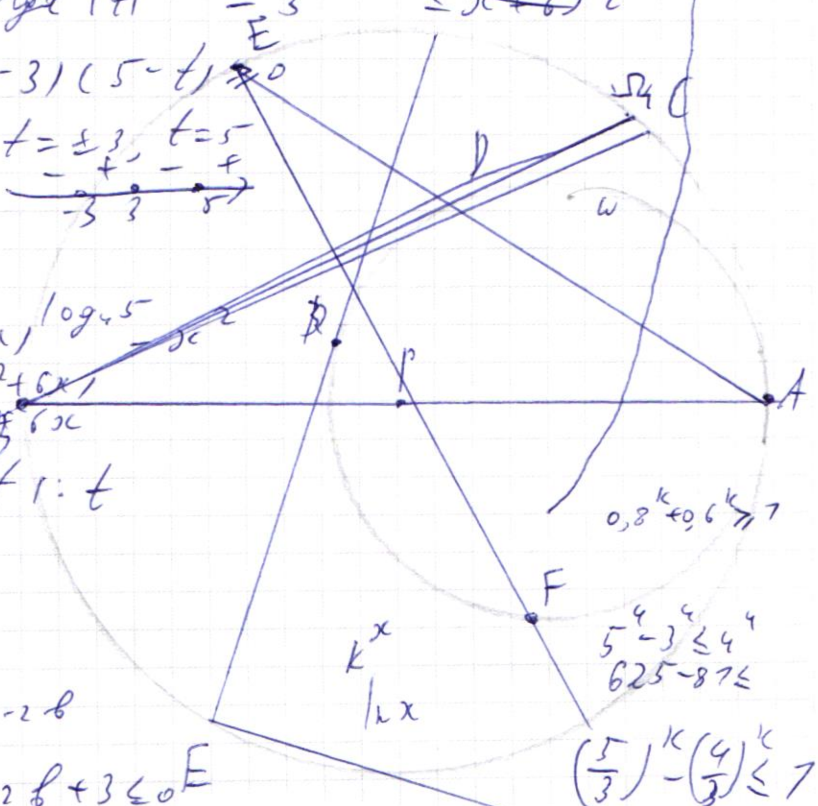
$x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\ge(x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}\le x^2+6x$

$t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}\le t \mid :t$

$\frac{t^{\log_4 5}}{t}-3\,\,1$



$0{,}8^k+0{,}6^k\ge 1$

$ax+b\le\frac{4x-3}{2x-2}$

$5^4-3^4\le 4^4$

$625-81\le$

k^x

$\ln x$

$4x-3\ge 2ax^2-2ax+2bx-2b$

$2ax^2+2b(2(ab-a)x-2b+3\le 0$

$\left(\frac{5}{3}\right)^k-\left(\frac{4}{3}\right)^k\le 1$

$D_1=(b-a-2)^2-2a(3-2b)=$ $\quad 1\le 0{,}8^k+0{,}6^k$

$(b-a-2)^2-6a-4ab=b^2+a^2-2ab+4+4b-4a=-6a-4ab$

$b^2+a^2-6ab+4+4b-10a$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8(x-3)(x-1{,}25)$

~~2x+b~~ $\frac{5}{2} \geq 2a+b \geq 32-68+30 = -6$

$\frac{9}{4} \geq 3a+b \geq 72-102+30 = 0$

$\frac{9}{4}$ $3a+b \geq 0 \Rightarrow \boxed{b \geq -3a}$

a

$3-7{,}5a$

$3a+b \leq \frac{9}{4} \Rightarrow b \leq \frac{9}{4} - 3a$

$2a+b \geq -6 \Rightarrow \boxed{b \geq -6-2a}$

$2a+b \leq \frac{5}{2} \Rightarrow b \leq \frac{5}{2}-2a$

~~b~~ $\leq$ $-6-2a \geq -3a \Rightarrow \boxed{a \geq 6}$

$\frac{9}{4} - 3a \geq \frac{5}{2} - 2a \Rightarrow -a \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \boxed{a \leq \frac{7}{4}}$

b

$a \leq \frac{7}{4} \Rightarrow \begin{cases} b \geq \cancel{-3a} \ -\frac{3}{4} - 3a \\ b \leq \frac{5}{2} - 2a = \end{cases} \Rightarrow$ $b \geq \frac{3}{4} + 3 - 7{,}5a \times 7 - 3a$

$7{,}5a > 3$

$a > \frac{2}{5}$ $ax(2x-2)$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \Rightarrow b \leq \frac{4x-3}{2x-2} - ax \Rightarrow b \leq \frac{4x-3-2ax}{2}$

$3-7{,}5a \geq \frac{9}{4}-3a$

$ax+b \geq 8x^2-34x+30 \Rightarrow b \geq 8x^2-34x+30-ax$

$b \leq \frac{4x-3-2ax^2+2ax}{2x-2}$

$3-7{,}5a \geq -2a-6$ $7{,}5a \geq -3$

$a \geq -2$

~~$3-7{,}5a$~~ $-$ ~~$3-7{,}5a$~~ $\leq 3-7{,}5a$

$b \geq 8x^2 - a(34+a)x + 30$

$0{,}5a \geq -9$

$a \geq -18$

~~$3-7{,}5$~~

$-3-7{,}5a \leq -2a-6$

$0{,}5a \leq -3$ $a \leq -6$

~~$4x-32a$~~ $\frac{4x-3-2ax^2+2ax}{2x-2} \geq 8x^2-(34+a)x+30$

~~$-2x(2a$~~ $\frac{2ax^2-2ax-4x+3}{2-2x} \geq 8x^2-(34+a)x+30$

$\frac{2ax^2-2(a+2)x+3}{2-2x} \geq 8x^2-(34+a)x+30$

$b \geq 9$

При этом, при $b \leq 17{,}25$

$D_1 = a^2+4+4a-6a = a^2+4-2a$

$b \geq 0$

$3^{\log_4 t}$ $\log_4 t = \frac{\log t}{\log 4}$ $\frac{b}{a}$

$b \leq 8{,}5$

$b \leq 7{,}5$

Если $t > 4$, то $t^{\log_4 5} > 5$, $3^{\log_4 t} > 3$

$b \geq 1{,}5$

Пусть $t = \log_4 k$, тогда $(\log_4 k)^{\log_4 5} - 3^{\log_4(\log_4 k)} \leq t$

Пусть $t = 4^k$, тогда $(4^k)^{\log_4 5} - 3^{\log_4 4^k} \leq 4^k$,

$5^k - 3^k \leq 4^k \mid : 4^k$

$b \leq$ ~~3~~ $3-a$

$b \leq 3-a$

$b \geq 15-0{,}5a$

$\left(\frac{5}{4}\right)^k - \left(\frac{3}{4}\right)^k \leq 1$

$b \geq 2-(34+a) \cdot 0{,}5+30$

$15-0{,}5a \leq 3-a$

$0{,}5a \leq -12$

$3-7{,}5a = 0 \Rightarrow$ ~~$7{,}5a$~~ $\boxed{a=2}$

$b \leq 3$

$\boxed{a \leq -24}$

$\boxed{a=-2}$ $\boxed{a=-6}$ $\boxed{a=0}$

$\boxed{a=7{,}25}$ $\boxed{a=9/72}$ При $a < -8$;

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{8x}^2$ $\frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8} = 2{,}125$

$8x^2-34x+30 \in$ $BO_1 = \sqrt{BD^2+r^2}$

$8\frac{8\cdot 17^2}{8^2} - 34\cdot\frac{17}{8}+30 = \frac{289}{8} - \frac{2\cdot 289}{8}+30 = -\frac{289}{8}+30 =$

$-\frac{49}{8}$ $8-34+30=4$

$3y-2x \geq 0$

$3xy-2x-3y+2 \geq 0$

$3xy-2 \geq 3y+2x$

$8x^2-34x+30 \in [-\frac{49}{8}; 4)$

$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{8x-8-2(4x-3)}{(2x-2)^2} =$

$f(0) = \frac{-3}{-2} = 1{,}5$, $f(2) = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$3y-2x \geq 0$

$3xy-2x-3y+2 \geq 0$

$f(\frac{7}{8}) = \frac{-7}{-1} = 7$ $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$

$b \leq 0$

$b \leq 6$

b $b \geq$ $b \leq 5{,}5$

$\frac{4x-3}{2x-2} =$ $5{,}25 = \frac{21}{4}$

$1{,}5 = \frac{6}{4}$

$34\cdot\frac{5}{4} = 17\cdot\frac{5}{2} =$ $b \leq$

$b \geq 8$

При $x=\frac{5}{2}$: $\frac{7}{3} - 2{,}5a$ $4-1{,}25a$

$34 + \frac{8}{8{,}5} =$ $42{,}5$

$-3-\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{7} =$

$-3-\frac{27}{14}$

$\cancel{b \geq 5a}$

$3-1{,}5a \geq -1{,}25a$

$-0{,}25a \geq -3$

$\cancel{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}$ $\frac{5}{4}$

$\begin{cases} \frac{2}{0{,}5} - 1{,}25a \\ b \geq 12{,}5-(34+a)1{,}25+30 \end{cases}$

$2{,}5-2a \geq -1{,}25a$

$0{,}75a \geq -2{,}5$

$a \geq$

$\cancel{3y-2x}$ $\sqrt{3x}, \sqrt{3y}$ a 2

$4-1{,}25a \geq -3-1{,}5a$

$3\cancel{y-2x=3)}$

$b \leq 4-1{,}25a$

$0{,}25a \geq -7$

$a \geq$

$9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2$

$b \geq -1{,}25a$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$4-1{,}25a \geq -2a-6$

$\frac{9}{4}-3a \geq -1{,}25a$

$0{,}75a \geq -10$

$a^2+b^2-2ab\cos\alpha = 4$

$-1{,}75a \geq -\frac{9}{4}$

$4-1{,}25a \geq -3a$

2

$1{,}75a \geq -4$

$6x+4y = 3x^2+3y^2-4$

$3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$a \geq \frac{9}{4} : \frac{7}{4} \Rightarrow a \geq \frac{9}{7}$

$a \geq -4 : \frac{7}{4}$

$a \geq -\frac{16}{7}$

$b = 6$

$b \in (0;6)$

$b = 0$

$b \in 6{,}5$

$b =$