МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

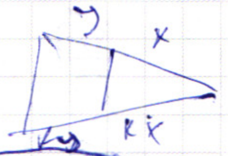
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

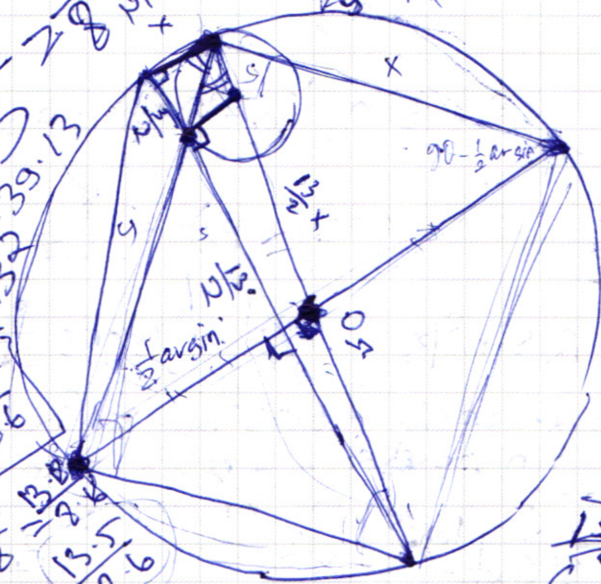
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4





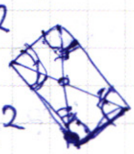
$\frac{25}{4}x^2 + 81 = \frac{169}{4}x^2$

$81 = \frac{144}{4}x^2$

$81 = 36x^2$

$9 = 4x^2$

$x = \frac{3}{2}$



$9 \cdot 18x = 39 \cdot 13$

$8 \cdot 6x = 132$

$\boxed{x = \frac{132}{8 \cdot 6}}$

$39 \cdot 5 = 9 \cdot 2 \cdot 4y$

$13 \cdot 5 = 6 \cdot 4y$

$\frac{6}{1} = \frac{y \cdot 84}{39}$

$39 = 24y \quad y = \frac{39}{24} = \frac{13}{8}$

$\frac{8 \cdot \sin 90}{39} = \frac{\sin y}{9}$

$\frac{4}{39} = \frac{\sin y}{9} \qquad \sin y = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}$

$y = \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$

$18x = \frac{39}{4}$

$\angle APE = 90^\circ - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$

$x = \frac{13 \cdot 5}{6 \cdot 4}$

$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)}{x} = \sin\left(90 - \frac{1}{2}\arcsin\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)$

$xy = \frac{9 \cdot 169}{16} \cdot \frac{tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)}{2}$

$1 + \frac{\sin^2}{\cos^2}$

$\frac{\cos^2 + \sin^2}{\cos^2}$

$\frac{x}{y} = tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)$

$x = y \cdot tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)$

$\frac{13 \cdot 9 \cdot 12}{64} = \frac{13 \cdot 9 \cdot 3}{16}$

$y^2 \cdot tg^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right) + y^2 = \frac{39 \cdot 39}{4^2}$

$y = \sqrt{\frac{9 \cdot 169}{16} : \left(tg^2\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right) + 1\right)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos(2\beta)$

$\sin 60^\circ + \sin 30 = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}$ $\quad 2 \sin 60 \cdot \cos(0)$

$\cancel{\sin(45) \cdot \cos(15)}$ $\quad 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin(2\alpha+2\beta) \cdot \cos(2\beta)$

$2 \cdot \cos(2\beta) = \frac{8}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos(2\beta) = \frac{8}{2\sqrt{17}}$ $\quad = \frac{8}{17}$

$\cos^2\beta - \sin^2\beta = 1 - 2\sin^2\beta$ $\quad 2\beta = \arccos\frac{8}{2\sqrt{17}}$

$2x^2 + 6xy - 8x - 6y = 4$ $\quad 8 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

$x^2 + 3xy - 4x - 3y = 2$ $\quad 8 \cdot \sin \cdot \cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$(x+1)(3y-2)$ $\quad x(1-x) + 3x - 2$

№3 $3^{\log_4(x^2+6x)} - 3y(1-x) + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$ $\quad x^2+6x \geq 0$

$(x+1)(3y+x+2)$ $\quad = x^2+3yx - 3y + 2x - x - 2$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$ $\quad 8 \cdot \sin \cdot \cos = \cos^2$

$8 \cdot$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 4^{\log_4(x^2+6x) \cdot \log_4 5}$

$(x-1)(3y+x+2) = 5x$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^x + 4^x \geq 5^x$ $\quad (3y+1+x)(y+1+x) + \cancel{2xy}$

$x \geq 0$

$\cancel{27 + 64 \geq 125}$ $\quad (3y+x)(3x+y) - 2x^2 + 2x$

$0 \leq y \leq 2$

$0 \leq \log_4(x^2+6x) \leq 2$ $\quad x \in [-8; 2]$

$\log_4(x^2+6x) \leq 2$ $\quad x^2 + 6x \leq 16$

$36 + 64 = 100$ $\quad x^2 + 6x - 16 \leq 0$

$\frac{10-6}{2}$ $\quad \varphi$ $\quad 2$ $\quad \frac{-10-6}{2}$ $\quad 4+12$

-8 $\quad 64 - 48 - 16 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

6xy

$$9y^2-12yx+4x^2=3xy-2x-3y+2$$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15yx+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$18y^2+8x^2-30yx+4x+6y=3x^2+3y^2-6x-4y$$

$$\cancel{18y^2+8}$$

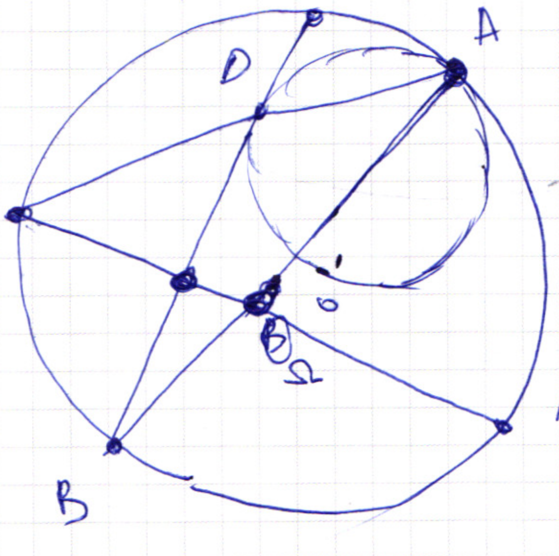
$$15y^2+5x^2=30yx-10x-10y$$

$$3y^2+x^2=6yx-2x-2y$$

$$\cancel{3y^2+x^2}$$

$$\cancel{(3y+x)^2}$$

№4

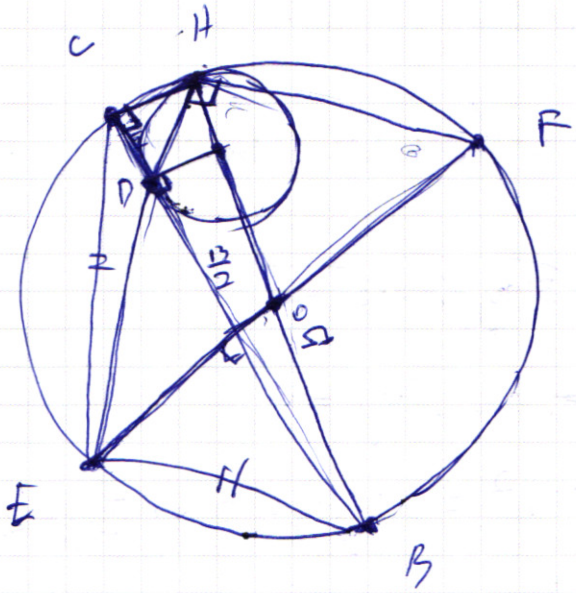


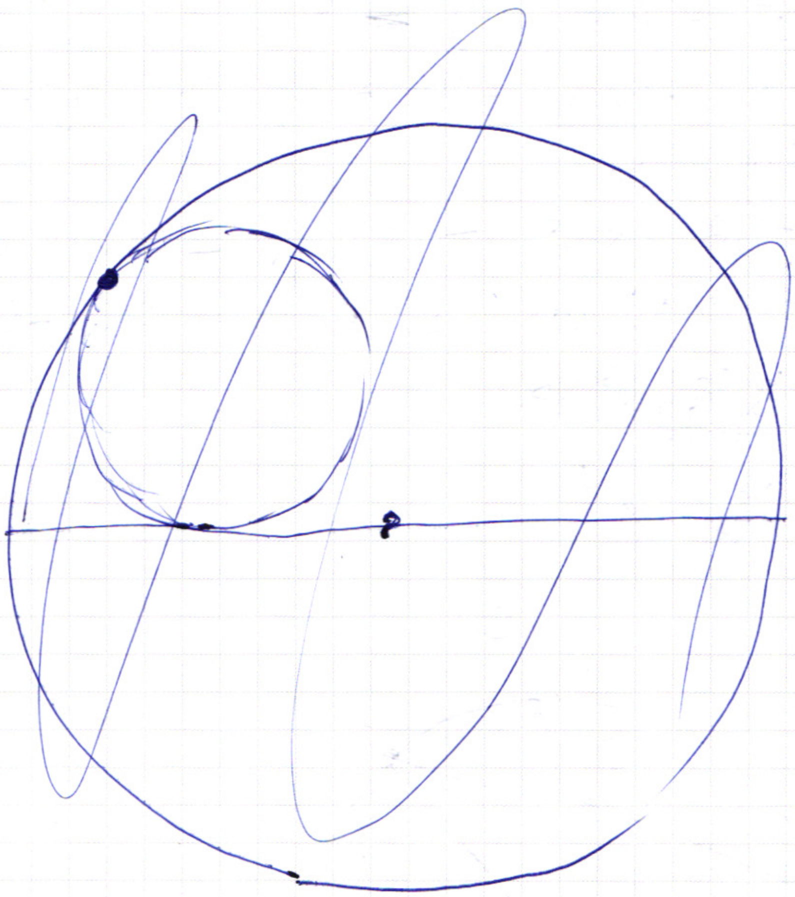
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



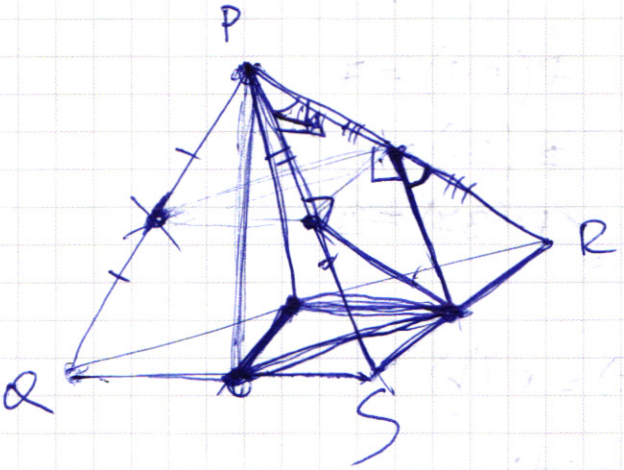


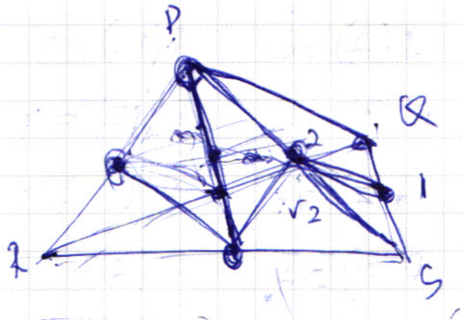
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

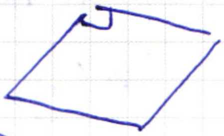
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

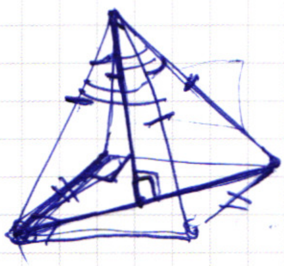
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

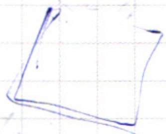
№6

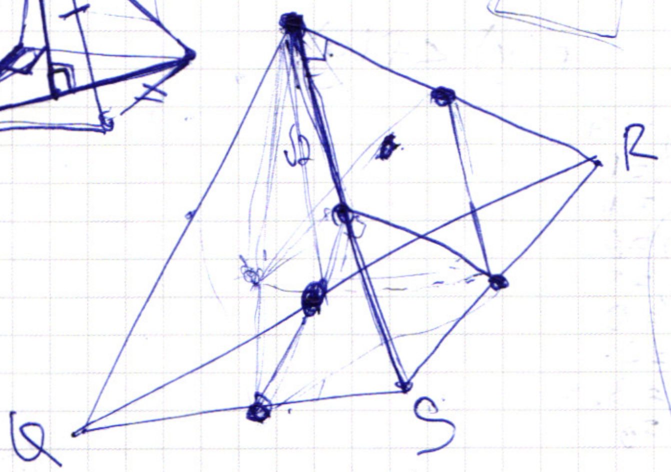


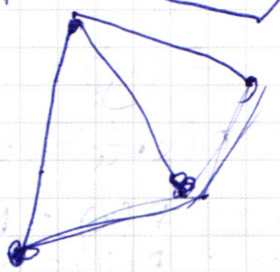












(2) $4x-3 \geq 2ax^2+2bx-2ax-2b$

$0 \geq 2ax^2+\cancel{2bx}\ x(2b-2a-4)-2b+3$

$8\cdot 4=32$

$62-68$

$\frac{3}{4}-\frac{b}{3} \geq a \geq \frac{-b}{3}$

№7 $\quad \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \qquad [1;3]$

$(1;3)$ $\quad \frac{9}{4} \geq 3a+b \geq 72-102+30=0$

$\frac{9}{4} \geq \boxed{3a+b} \geq 0$

$\frac{5}{2} \geq 2a+b \geq -8$

$\frac{10}{4} \geq 2a+b \geq -8$

(1) $0 \geq 8x^2-(34+a)x+(30-b)$

$\cancel{(34+a)^2-32(30-b)}$

$0 \geq 2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3$

№3

№4

№5 $f(ab) = f(a) + f(b)$

$3 \le x \le 27$
$3 \le y < 27$ $f(x,y)$

$\frac{1}{9} \le f\left(\frac{x}{y}\right) \le 9$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(1) = 0$

$f(1 \cdot b) =$

$\boxed{f(2)=0 \quad f(3)=0 \quad f(7)=1}$

$f(13)=3$ $f(17)=4$ $f(19)=4$

$f(29)=7$ $f(31)=7$ $f(37)=9$

$f(11)=2$ $f(23)=5$

$2 \cdot 2 \cdot 2$ $f(2k) = f(k)$

$f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y})$

$f(y) = -f(\frac{1}{y})$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) < 0$ $f(x) < f(y)$

$f(1)=0$	$f(10)=1$	$f(19)=4$
$f(2)=0$	$f(11)=2$	$f(20)=1$
$f(3)=0$	$f(12)=0$	$f(21)=1$
$f(4)=0$	$f(13)=3$	$f(22)=2$
$f(5)=1$	$f(14)=1$	$f(23)=5$
$f(6)=0$	$f(15)=1$	$f(24)=0$
$f(7)=1$	$f(16)=0$	$f(25)=2$
$f(8)=0$	$f(17)=4$	$f(26)=3$
$f(9)=0$	$f(18)=0$	$f(27)=0$

$f(x)=0$ $f(y)>0$

$9 \cdot 15$ 135

$150 + 64 = 214$

$f(x)=1$ $f(y)>1$

$7 \cdot 8$ 56

$f(x)=2$ $f(y)>2$

$3 \cdot 5$ 15

$f(x)=3$ $f(y)>3$

$2 \cdot 3$ 6

$f(x)=4$ $f(y)>4$

$2 \cdot 1$ 2

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

т.к. мы можем взять $\log_4 \Rightarrow^{(1)} x^2+6x \geq 0 \Rightarrow$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq \left(4^{\log_4(x^2+6x)}\right)^{\log_4 5}$

$\Downarrow$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$\log_4(x^2+6x) = y$

$3^y + 4^y \geq 5^y$, при $y \leq 2$ это верно (т.к. при $y=2$

при $y=2$ - выполн. равен. а при $y<2$ - это верно

$y>2$ - это не выполняется;

тогда $\log_4(x^2+6x) \leq 2$

$0 \leq x^2+6x \leq 16$

из (1)

$x^2+6x \geq 0$ $\quad (x+6)x \geq 0$

+ −6 − 0 +

$x=-5$ $(x+6)x<0$

$x=1$ $(x+6)x>0$

$x=-100$ $(x+6)x>0$

(2) $x \in (-\infty, -6] \cup [0; +\infty)$

$f(x) = x^2+6x-16 \leq 0$ $\quad D = 36+64 = 100$ $\quad \sqrt{D} = 100$ $\quad x_1 = -8$, $x_2 = 2$

$f(x) = x^2+6x-16$

+ −8 − 2 +

$x=0$ $f(x) \leq 0$

$x=3$ $f(x)>0$

$x=-100$ $f(x)>0$

(3) $x \in [-8, 2]$

тогда из (2) и (3) $\quad x \in [-8, 6] \cup (0, 2]$

(т.к. функция log не опред. в $x=0$)

Ответ: $x \in [-8, 6] \cup (0, 2]$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

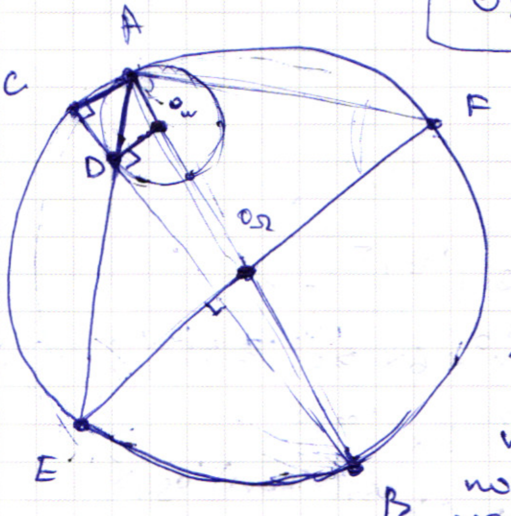
Страница № 1

(Нумеровать только чистовики)

№4.

O_ω - центр ω
O_Ω - центр Ω

$CB = CD + DB = 9$



т.к. ω и Ω касаются внутренним образом (т.A) а также AB - диаметр, то AB проходит через O_ω и O_Ω (т.к. если в т.A проведём общ. касат то AB ⊥ касательной ⇒ AB - прохд через O_ω)

т.к. ω и Ω - касаются внут. образом (т A), CB (хорда в Ω) - касается ω в точке D, тогда по лемме Архимеда AD - биссектр угла $\angle CAB$. т.к. AD - биссектриса ⇒ E - середина дуги CB (без A) ⇒ CE = EB, т.к. EF ⊥ CB ⇒ EF - серпер к CB (т.к. EF - высот. в равнобедр. $\triangle CEB$), а т.к. EF - серпер к CB, а центр. окр. лежит на серпер к CB ⇒ $O_\Omega \in EF$ ⇒ EF - диаметр.

т.к. AD - биссектр., то $\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{5}{13}$ (золотое св. биссектр.)

т.к. AB - диаметр, то $\angle ACB = 90°$. $CA = 5x$, $AB = 13x$. $(x > 0)$

тогда $25x^2 + 81 = 169x^2$; $81 = 144x^2$ ⇒ $9 = 12x$ ⇒ ⇒ $x = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$, тогда $CA = \frac{15}{4}$, $AB = \frac{39}{4}$, т.к. AB - диам. Ω ⇒ $R_\Omega = \frac{1}{2}AB = \frac{39}{8}$. (1)

$O_\omega D \perp CB$ (т.к. D - точка касания) $(O_\omega D = R_\omega)$,

$CA \perp CB$ ⇒ $AC \parallel O_\omega D$ ⇒ $\frac{BA}{O_\omega A} = \frac{BC}{CD}$ → $O_\omega A = \frac{BA \cdot CD}{BC}$ ⇒

$O_\omega A = \frac{39}{4} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{9} = \frac{13 \cdot 5}{4 \cdot 6} = \frac{65}{24}$ ⇒ $O_\omega A = R_\omega = \frac{65}{24}$ (2)

$\angle AFE = \angle AFC + \angle CFE$ (т.к. $\angle AFC = \angle ABC$; $\angle CFE = \frac{1}{2}\angle CAB$; оп. на $\cup$ CA) а $\angle ABC + \angle CAB = 90°$) ⇒ $\angle AFE = 90 - \frac{1}{2}\angle CAB$

Через т. синусов. $\frac{\sin\angle CAB}{BC} = \frac{\sin\angle ACB^{=90°}}{AB}$ ⇒ $\frac{\sin\angle CAB}{9} = \frac{4}{39}$ ⇒

⇒ $\sin\angle CAB = \frac{36}{39} = \frac{12}{13}$ ⇒ $\angle CAB = \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$ ⇒

⇒ $\angle AFE = 90° - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$.

т.к. EF - диаметр ⇒ $EF = \frac{39}{4}$, $\angle EAF = 90°$, тогда

$\angle AEF + \angle AFE = 90°$ ⇒ $\angle AEF = \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$

по т. синусов. $\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)}{AF} = \frac{\sin\left(90 - \frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)}{AE}$ ⇒

$\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)}{AF} = \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)}{AE}$ ⇒ $\frac{AF}{AE} = tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)$

$AF = AE \cdot \underbrace{tg\left(\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{12}{13}\right)\right)}_{y}$ ⇒ $AF = AE \cdot y$, тогда

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AF^2 + AE^2 = EF^2$ $\qquad AE > 0 \qquad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$

$AE^2 + AE^2 \cdot y^2 = \dfrac{13^2 \cdot 9}{16}$

$AE^2 = \dfrac{13^2 \cdot 9}{16 \cdot (1+y^2)}$ $\cancel{AE = \dfrac{13 \cdot 3}{4 \cdot \sqrt{1+y^2}}}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE$ (т.к. $\triangle AEF$ - прямоуг)

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AE^2 \cdot y$ $\qquad 1 + tg^2\alpha = 1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$S_{AEF} = \dfrac{13^2 \cdot 9}{32} \cdot \dfrac{y}{1+y^2} \Rightarrow$

$S_{AEF} = \dfrac{13^2 \cdot 9}{32} \cdot \dfrac{tg(\frac{1}{2}\arcsin(\frac{12}{13}))}{1 + tg^2(\frac{1}{2}\arcsin(\frac{12}{13}))} = \dfrac{13^2 \cdot 9}{32} \cdot tg(\frac{1}{2}\arcsin(\frac{12}{13})) \cdot$

$\cdot \cos^2(\frac{1}{2}\arcsin(\frac{12}{13})) = \dfrac{13^2 \cdot 9}{32} \cdot \underbrace{\sin(\frac{1}{2}\arcsin(\frac{12}{13})) \cdot \cos(\frac{1}{2}\arcsin(\frac{12}{13}))}_{= \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\sin(\arcsin(\frac{12}{13}))}_{\frac{12}{13}}}$

$= \dfrac{13^{\cancel{2}} \cdot 9}{\cancel{32}_{16}} \cdot \dfrac{1}{\cancel{2}} \cdot \dfrac{\cancel{12}^{3}}{\cancel{13}} = \dfrac{13 \cdot 9 \cdot 3}{16} = \dfrac{13 \cdot 27}{16}$

Ответ: $R_\Omega = \dfrac{39}{8}$; $R_\omega = \dfrac{65}{24}$; $\angle AFE = 90^\circ - \frac{1}{2}\arcsin(\frac{12}{13})$;

$S_{AFE} = \dfrac{13 \cdot 27}{16}$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№5. Т.к. $f(ab)=f(a)+f(b) \Rightarrow f(1\cdot k)=f(1)+f(k) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1)=0$, тогда $\underbrace{f\left(y\cdot\frac{1}{y}\right)}_{\substack{f(1)\\ \parallel \\ 0}} = f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = f(y_1)+f\left(\frac{1}{y_1}\right) \Rightarrow f(y_1) = -f\left(\frac{1}{y_1}\right)$

$f(x/y)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

$x, y \in \mathbb{N}$, тогда, чтобы $f(x)-f(y) < 0 \Rightarrow$

$f(x) < f(y)$

т.к. $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(2)=0$ $\quad f(17)=4$
$f(5)=1$ $\quad f(19)=4$
$f(7)=1$ $\quad f(23)=5$
$f(13)=3$
$f(11)=2$

тогда
$f(4)=f(2)+f(2)=0$ $\quad f(16)=f(8)+f(2)=0$ $\quad f(27)=f(3)+f(9)=0$
$f(6)=f(2)+f(3)=0$ $\quad f(18)=f(2)+f(9)=0$
$f(8)=f(4)+f(2)=0$ $\quad f(20)=f(4)+f(5)=1$
$f(9)=f(3)+f(3)=0$ $\quad f(21)=f(3)+f(7)=1$
$f(10)=f(2)+f(5)=1$ $\quad f(22)=f(2)+f(11)=2$
$f(12)=f(2)+f(6)=0$ $\quad f(24)=f(4)+f(6)=0$
$f(14)=f(2)+f(7)=1$ $\quad f(25)=f(5)+f(5)=2$
$f(15)=f(3)+f(5)=1$ $\quad f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(z)=1$, при $3\le z\le 27$ таких z – 7 штук
$f(z)=2$, $3\le z\le 27$ таких z – 3 штуки
$f(z)=0$, $3\le z\le 27$ таких z – 9 штук
$f(z)=3$, $3\le z\le 27$ таких z – 2 штуки
$f(z)=4$, $3\le z\le 27$ таких z – 2 штуки
$f(z)=5$, $3\le z\le 27$, таких z – 1 штука

тогда чтобы $f(x)-f(y)<0$, при а) $f(x)=0$, то $f(y)\geq 1$ – таких пар $9\cdot 15 = 135$ (т.к. всего 9 чисел, которые $f(x)=0$, а 15 $f(y)\geq 1$)
б) $f(x)=1 \Rightarrow f(y)\geq 2$, тогда таких пар $7\cdot 8 = 56$ (всего x, что $f(x)=1$ – 7 штук, а y, $f(y)\geq 2$ – 8).
в) $f(x)=2 \Rightarrow f(y)\geq 3$ – таких пар $3\cdot 5=15$ (3 числа $f(x)=2$, а 5 чисел $f(y)\geq 3$)
г) $f(x)=3 \Rightarrow f(y)\geq 4$ – таких пар $2\cdot 3=6$ (2 числа $f(x)=3$, 3 числа $f(y)\geq 4$); д) $f(x)=4 \Rightarrow f(y)=5$ – таких пар $2\cdot 1=2$ (т.к. $f(z)>5$, при $3\le z\le 27$ – нет)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

тогда всего пар: $135+56+15+6+2=214$

Ответ: 214 пар.

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1)\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2)\end{cases}$$

(1) возведём в квадрат: $9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

(3) $3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$ (в (2) перенесли в одну стор.)

(4) $18y^2-30xy+8x^2+4x+6y-4=0$ (домнож (1) на 2)

из (4) − (3): $15y^2-30xy+5x^2+10x+10y=0 \quad :5$

(6) $3y^2-6xy+x^2+2x+2y=0$

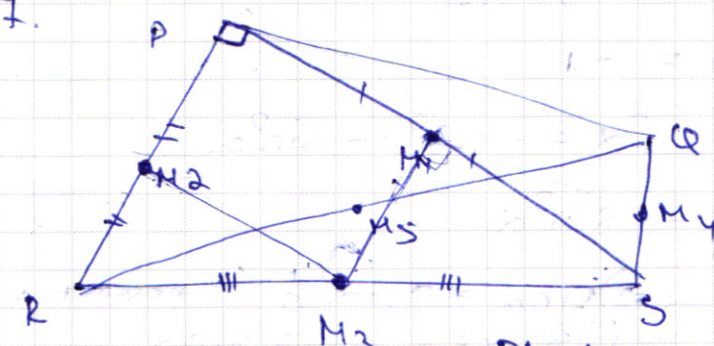
из (2) вычтем (6)

$6xy+2x^2-8x-6y=4 \quad |:2$

$3xy+x^2-4x-3y=2$

$(x-1)(3y+x+2)=5x$

№7.



M_1 − середина PS
M_2 − середина PR
M_3 − середина RS
M_4 − середина QS
M_5 − середина RQ

$P, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ − лежат на одной сфере, т.к. $P\,M_2\,M_1\,M_3$ − лежат в одной плоскости $\Rightarrow PM_1M_3M_2$ − вписанный четырехугольн.

M_1M_3 − средняя линия (в $\triangle PSR$) $\Rightarrow M_1M_3 \parallel PR$, аналогично $M_3M_2 \parallel PS$

$\Rightarrow PM_1 \parallel M_2M_3$; $PM_2 \parallel M_1M_3 \Rightarrow PM_1M_2M_3$ − параллелограмм $\Rightarrow$

$\angle M_2PM_1 = \angle M_1M_3M_2$ да из вписанности $\angle M_2PM_1 + \angle M_1M_3M_2 = 180^\circ \Rightarrow$

$\angle M_2PM_1 = \angle M_1M_3M_2 = 90^\circ \Rightarrow PM_2M_3M_1$ − прямоугольник, RPS прям. треугольн.

№1 1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ Ответ: $tg\alpha$ может. равн $-0; -4; -1/4$.

2) $\underbrace{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha} = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

(3) $\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{4}{17}$

~~sin(2α~~

поделим (3) на 1) :

(4) $\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos^2 2\beta = \frac{16}{17}$, т.к. $\cos^2 2\beta+\sin^2 2\beta=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ (5) $\sin^2 2\beta = \frac{1}{17}$

(6) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta)$

(5) $\sin^2 2\beta = \frac{1}{17} \Rightarrow$ а) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

б) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

а) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\sin(2\alpha)+\cos(2\alpha) = -1 \Rightarrow$ ~~cos(2α)...~~

$-1 = -\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$

$8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} = -\cancel{\sin^2\alpha}-\cos^2\alpha$

$8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -2\cdot\cos^2\alpha$ $|:\cos^2\alpha|$ $\cos\alpha\neq 0$, т.к. tg опр. ≥ 3 реш

$8\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2 \Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{4}$ (!(1)) - решение

б) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \cos(2\alpha)\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin(2\alpha) - \cos(2\alpha) = -1$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha}+\sin^2\alpha = -\cancel{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha$

(10) $8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -2\sin^2\alpha$

1) $\sin\alpha = 0$, тогда $tg\alpha = 0$ (!(2)) - решение

2) $\sin\alpha\neq 0$, тогда (10) поделим на $\sin\alpha$

(11) $8\cos\alpha = -2\sin\alpha$

$\cos\alpha\neq 0$, (т.к. tg - определён, ≥ 3 р)

тогда поделим (11) на $\cos\alpha \cdot 2$

$-4 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow -4 = tg(\alpha)$ - 3реш.

т.к. по условию ≥ 3 решения, а мы получили ровно 3 возм. реш. $\Rightarrow$ все решения подходят. Ответ: $tg\alpha = 0; -4; -1/4$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \quad | \cdot 2x-2$ (т.к. при $x \in (1;3]$, $2x-2>0$)

$4x-3 \geq 2ax^2-2ax+2xb-2b$

$0 \geq 2ax^2+(2b-2a-4)x+3-2b$

$ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$0 \geq 8x^2 - (a+34)x+30-b$

т.е. при $x \in (1;3]$ выполняется:

$$\begin{cases} 0 \geq 2ax^2+(2b-2a+4)x+3-2b \\ 0 \geq 8x^2-(a+34)x+30-b \end{cases}$$