МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$\begin{cases} \sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad ** \\ \sin(2a+4b) + \sin 2a = -\frac{8}{17} \quad * \end{cases}$$

$*\ \sin 2a \cdot \cos 4b + \cos 2a \cdot \sin 4b + \sin 2a = -\frac{8}{17}$

$\sin 2a \cdot (\cos^2 2b - \sin^2 2b) + \cos 2a \cdot 2\sin 2b \cdot \cos 2b + \sin 2a = -\frac{8}{17}$

$\sin 2a \cdot (\cos^2 2b - (1 - \cos^2 2b) + 1) + 2 \cdot \cos 2a \cdot \sin 2b \cdot \cos 2b = -\frac{8}{17}$

$2\sin 2a \cos^2 2b + 2\cos 2a \sin 2b \cdot \cos 2b = -\frac{8}{17} \quad | : 2$

$\cos 2b (\sin 2a \cos 2b + \cos 2a \sin 2b) = -\frac{4}{17}$

$\cos 2b \cdot \sin(2a+2b) = -\frac{4}{17}$ | подставим $**$

$\cos 2b \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{4}{17}$

$\cos 2b = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin^2 2b = 1 - \frac{16}{17} = \frac{1}{17} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2b = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2b = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

$**\ \sin 2a \cos 2b + \cos 2a \sin 2b = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2a + \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2a - \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 8\sin a\cos a + 2\cos^2 a - 1 = -1 \\ 8\sin a \cos a - (1 - 2\sin^2 a) = -1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\cos a\,(4\sin a + \cos a) = 0 \\ 2\sin a\,(4\cos a + \sin a) = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos a = 0 \\ 4\sin a + \cos a = 0 \\ \sin a = 0 \\ 4\cos a + \sin a = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\, a \text{ не опр.} \\ tg\, a = -\frac{1}{4} \\ tg\, a = 0 \\ tg\, a = -4 \end{array}\right.$

Ответ: $\{-4; -\frac{1}{4}; 0\}$

N 2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y - 2 - 2x + 2 = \sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x-1)^2 + \frac{1}{3}(3y-2)^2 = \frac{25}{3} \end{cases}$$

ОДЗ: $(3y-2)(x-1) \geq 0$; Пусть $\begin{cases} 3y - 2 = a \\ x - 1 = b \end{cases}$: $\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \quad * \\ 3b^2 + \frac{1}{3}a^2 = \frac{25}{3} \end{cases}$

$*$ Если $b = 0$: $a - 0 = 0 \Rightarrow a = 0$; 2-е не выполняется $\Rightarrow b \neq 0 \Rightarrow \ | : b$

$\frac{a}{b} - 2 = \sqrt{\frac{ab}{b^2}} \Rightarrow \frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}} - 2 = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 2\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + 1\right) = 0 \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№2 продолж.

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{a}{b}}=2\\ \sqrt{\frac{a}{b}}=-1 \ \varnothing\end{array}\right. \Rightarrow \frac{a}{b}=4 \Rightarrow a=4b$$

Подставим во 2-е: $3b^2+\frac{16}{3}b^2=\frac{25}{3} \Rightarrow b^2=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}b=1 \Rightarrow a=4\\ b=-1 \Rightarrow a=-4\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3y-2=4\\ x-1=1\end{cases}\\ \begin{cases}3y-2=-4\\ x-1=-1\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=2\\ x=2\end{cases}\\ \begin{cases}y=-\frac{2}{3}\\ x=0\end{cases} \varnothing\end{array}\right.$$

– обе пары удовл. ОДЗ; однако $(0; -\frac{2}{3})$ не удовл. 1-му ур-ю.

Ответ: $(2;2)$.

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2 \quad \text{ОДЗ: } x^2+6x>0$$

$$(x^2+6x)^{\log_4 3}+x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} \quad (\text{т.к. } x^2+6x>0)$$

Пусть $t=x^2+6x$, $t>0$

$$t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5} \quad |:t$$

$$1+t^{\log_4 0{,}75} \geq t^{\log_4 1{,}25}$$

$y_1=1+t^{\log_4 0{,}75}$

$y_1'=\underbrace{\log_4 0{,}75}_{<0}\cdot \underbrace{t^{(\log_4 0{,}75)-1}}_{>0} <0 \ \forall t>0$

$y_2=t^{\log_4 1{,}25}$

$y_2'=\underbrace{\log_4 1{,}25}_{>0}\cdot \underbrace{t^{(\log_4 1{,}25)-1}}_{>0} >0 \ \forall t>0$

Значит левая часть нерав-ва монотонно убывает, а правая монотонно возрастает $\Rightarrow$ у них не более 1 точки пересеч.

При $t=16$: $y_1=1+16^{\log_4 0{,}75}=1+0{,}75^{\log_4 16}=\frac{25}{16}$

$y_2=16^{\log_4 1{,}25}=1{,}25^{\log_4 16}=\frac{25}{16}=y_1 \Rightarrow$ пересечение при $t=16$.

Значит $y_1 \geq y_2$ при $t \leq 16$

$x^2+6x \leq 16 \Rightarrow (x-2)(x+8) \leq 0 \Rightarrow x \in [-8;2]$ ← пересечение

$x^2+6x>0 \Rightarrow x(x+6)>0 \Rightarrow x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$

Ответ: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

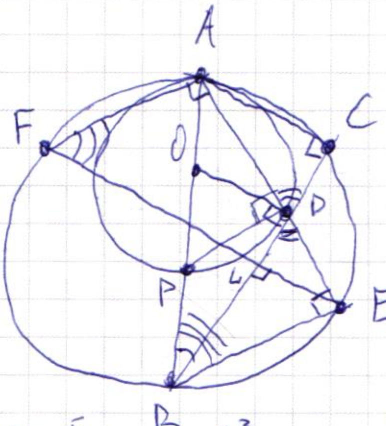
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



1) Пусть O - центр ω; тогда $OD \perp BC$ (как радиус к т. касания)

2) $\angle ACB = 90°$, т.к. впис. опир. на диаметр.

3) $\Delta ACB \sim \Delta ODB$ по 2 углам ($\angle B$ - общий) $\Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BO} \Rightarrow \frac{\frac{5}{2}+\frac{13}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{BA}{BO} \Rightarrow \frac{BA}{BO} = \frac{18}{13}$

$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$

4) Пусть радиус ω равен r; радиус Ω равен R. Тогда $BA = 2R$; $BO = BA - AO = 2R - r \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 5) $\frac{2R}{2R-r} = \frac{18}{13} \Rightarrow 26R = 36R - 18r \Rightarrow r = \frac{5}{9}R$

6) $\angle AEB = 90°$ (опир. на диаметр.); $\angle ADC = \angle BDE$ (верт.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ADC \sim \Delta BDE$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE} \Rightarrow AD \cdot DE = BD \cdot CD = \frac{65}{4}$

7) Пусть $AB \cap \omega = P$; тогда $\angle ADP = 90°$ (опир. на диаметр.)

$\Delta ADP \sim \Delta AEB$ по 2 углам ($\angle A$ - общий) $\Rightarrow \frac{AD}{AE} = \frac{AP}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} = \frac{5}{9}$

$\cancel{\frac{AP}{AD}} \Rightarrow AD = \frac{5}{9}AE \Rightarrow DE = AE - AD = \frac{4}{9}AE \Rightarrow AD = \frac{5}{4}DE \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из (6): $\frac{5}{4}DE \cdot DE = \frac{65}{4} \Rightarrow DE^2 = 13 \Rightarrow DE = \sqrt{13} \Rightarrow AE = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

8) По теор. Пифагора в ΔBDE: $DE^2 + BE^2 = BD^2 \Rightarrow BE^2 = \frac{169}{4} - 13 = \frac{117}{4}$

9) По теор. Пифагора в ΔABE: $AB^2 = AE^2 + BE^2 = \frac{81 \cdot 13}{16} + \frac{117}{4} = \frac{13 \cdot 9 \cdot (9+4)}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow AB = \frac{39}{4} \Rightarrow R = \frac{AB}{2} = \frac{39}{8} \Rightarrow r = \frac{5}{9}R = \frac{65}{24}$

10) Пусть $EF \cap BC = L$, тогда EL - выс. прямоуг. $\Delta EDB \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta BEL \sim \Delta BDE$ по 2 углам $\Rightarrow \frac{BE}{BD} = \frac{BL}{BE} \Rightarrow BL = \frac{BE^2}{BD} = \frac{\frac{117}{4}}{\frac{13}{2}} = \frac{9}{2}$

$BC = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = 9 = 2BL \Rightarrow FE$ проходит через середину хорды BC под прямым углом $\Rightarrow FE$ - диаметр $\Omega \Rightarrow \angle FAE = 90°$ (опир. на диам)

11) $\angle AFE = \angle ABE$ (опир. на $\overset{\frown}{AE}$) $\Rightarrow \Delta AFE = \Delta EBA$ (обе гипот. - диаметры),

$\Rightarrow \angle AEF = \angle BAE$; $\sin\angle BAE = \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{\sqrt{117}}{2}}{\frac{39}{4}} = \frac{2\sqrt{13}}{13} = \frac{2}{\sqrt{13}} \Rightarrow \angle AEF = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

№4 продолж.

11) $S_{\Delta AEF} = S_{\Delta EBA} = \frac{AE \cdot BE}{2} = \frac{\frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{4}}{2} = \frac{351}{32}$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$; $\angle AEF = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$; $S_{\Delta AEF} = \frac{351}{32}$.

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$; $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{x}{xy}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x} \cdot \frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right)$

Значит $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x) \Rightarrow \boxed{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)}$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$; $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$; $f(4) = f(2 \cdot 2) = 0$; $f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$; $f(6) = f(2 \cdot 3) = 0$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$; $f(8) = f(2 \cdot 4) = 0$; $f(9) = f(3 \cdot 3) = 0$; $f(10) = f(2 \cdot 5) = 1$;

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$; $f(12) = f(3 \cdot 4) = 0$; $f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$; $f(14) = f(2 \cdot 7) = 1$;

$f(15) = f(3 \cdot 5) = 1$; $f(16) = f(4 \cdot 4) = 0$; $f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$; $f(18) = f(2 \cdot 9) = 0$;

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$; $f(20) = f(4 \cdot 5) = 1$; $f(21) = f(3 \cdot 7) = 1$; $f(22) = f(2 \cdot 11) = 2$;

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$; $f(24) = f(4 \cdot 6) = 0$; $f(25) = f(5 \cdot 5) = 2$; $f(26) = f(2 \cdot 13) = 3$

$f(27) = f(3 \cdot 9) = 0$ Итого: $f(3) = f(4) = f(6) = f(8) = f(9) = f(12) = f(16) = f(18) = f(24) =$
$= f(27) = 0$; $f(5) = f(7) = f(10) = f(14) = f(15) = f(20) = f(21) = 1$;
$f(11) = f(22) = f(25) = 2$; $f(13) = f(26) = 3$; $f(17) = f(19) = 4$; $f(23) = 5$

Итого 10×0; 7×1; 3×2; 2×3; 2×4; 1×5.

Заметим, что $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Если $f(x) = 0$ - 10 способов выбрать, то выбрать $f(y)$ $7+3+2+2+1 = 15$ способов
$\Rightarrow$ всего $10 * 15 = 150$ пар; Если $f(x) = 1$ - 7 способов, то $f(y)$ $3+2+2+1 = 8 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ всего $7 \cdot 8 = 56$ пар. Если $f(x) = 2$ - 3 способа, то $f(y)$ $2+2+1 = 5 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ всего $3 \cdot 5 = 15$ пар; Если $f(x) = 3$ - 2 способа, то $f(y)$ $2+1 = 3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ всего $2 \cdot 3 = 6$ пар. Если $f(x) = 4$ - 2 способа, то $f(y)$ 1 способ $\Rightarrow 2 \cdot 1 = 2$ пары
Если $f(x) \geq 5$, нету у на отрезке, чтоб $f(y) > f(x)$.

Тогда всего $150 + 56 + 15 + 6 + 2 = 229$ пар.

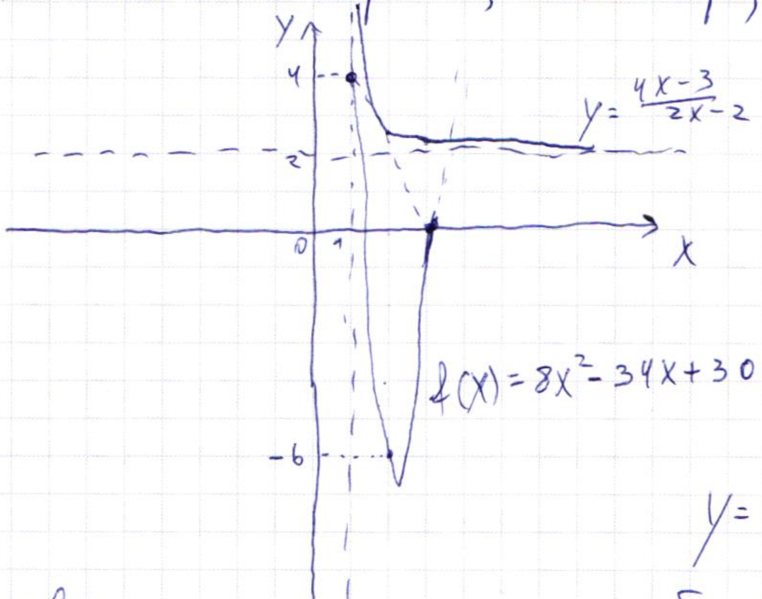
Ответ: 229 пар.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$ - гипербола с ас: $x=1$, $y=2$; $f(2)=\frac{5}{2}$; $f(3)=\frac{9}{4}$

$8x^2-34x+30$ - парабола, ветви вверх, $x_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$; $f(1)=4$; $f(2)=-6$; $f(3)=0$



$y=ax+b$ - прямая

найдём ур-е прямой, проходящей через $(1;4)$ и $(3;0)$:

$\begin{cases} 4=a+b \\ 0=3a+b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=6 \end{cases}$

$y=-2x+6$; $y(\frac{3}{2})=3$

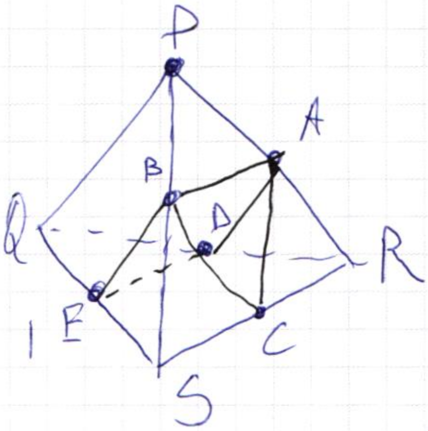
Проверим пересечение с гиперболой: $\frac{4x-3}{2x-2} = -2x+6 \,\Big|\cdot(2x-2)$ т.к. $x\neq1$:

$4x-3=-4x^2+16x-12 \Rightarrow 4x^2-12x+9=0 \Rightarrow (2x-3)^2=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ 1 точка пересечения $\Rightarrow$ касается $\Rightarrow$ подходит по условию. Предположим, найдётся другая прямая, удовлетворяющая условию, т.е. лежащая не ниже параболы и не выше гиперболы $(1;3]$; Поскольку она не ниже параболы, $f(1)\geq 4$ и $f(3)\geq 0$, но т.к. мы предполагаем, что она не совпадает с найденной $\Rightarrow$ одно из неравенств строгое, но тогда $f(\frac{3}{2})>3$, по формуле точки, делящей отр-к в пропорции $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ в т. $x=\frac{3}{2}$ она выше гиперболы, чего быть не может противоречие.

Ответ: $(-2;6)$

№ 7



A - сер. PR; B - сер. PS; C - сер. RS;
D - сер. QR; E - сер. QS.

1) AB - ср. линия PRS => AB ∥ RS;
$AB = \frac{1}{2} RS$; ED - ср. линия QRS =>
=> ED ∥ RS; $ED = \frac{1}{2} RS$ => ABED - параллелограм => A, B, E, D - в одной плоскости, а т.к. они на одной сфере => и на одной окружности, а вписанный параллелограм - прямоугольник.

2) BC - ср. линия SPR => BC ∥ PR; $BC = \frac{1}{2} PR$;
$AP = \frac{1}{2} RP$ => ACBP - параллелограм, а поскольку все его вершины на 1-й сфере => они и на одной окр-ти => PACB - также прямоугольник.

3) Несложно заметить, что поскольку все 6 точек на одной сфере => её центр - на перпендикуляре из центра ABED и на ⊥ из центра APBC, а значит конкретно в центре ABED =>
=> (ABED) ⊥ (APBC) => DA ⊥ (PRS) => QP ⊥ (PRS), из (2) ∠SPR = 90° => пирамида прямоугольная с ⊥ при вершине P

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cancel{\sin(2\alpha)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos$

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$3(x-1)^2 + 3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \frac{25}{3}$

$(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

10×0

7×1

3×2

2×3

2×4

1×5

$3\ 4\ 6\ 8$

$3y - 2 - (2x - 2) = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$a - 2b = \sqrt{ab}$

$b^2 + \frac{a^2}{9} = \frac{25}{9}$

$9b^2 + a^2 = 25$

$b^2 = 1 \quad b = \pm 1 \quad a = \pm 4$

$\frac{a}{b} - \sqrt{\frac{a}{b}} - 2 = 0$

$\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 2\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + 1\right) = 0$

$\sqrt{\frac{a}{b}} = 2$

$\frac{a}{b} = 4 \quad a = 4b$

$f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(2) = 0 \quad f(3) = 0 \quad f(5) = 1 \quad f(7) = 1 \quad f(11) = 2 \quad f(13) = 3 \quad f(17) = 4$

$f(19) = 4 \quad f(23) = 5$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = 0 \quad f(6) = f(2 \cdot 3) = 0 \quad f(8) = 0 \quad f(9) = 0$

$f(10) = 1 \quad f(12) = 0 \quad f(14) = 1 \quad f(16) = 0 \quad f(18) = 0 \quad f(20) = 1$

$f(21) = 1 \quad f(22) = 2 \quad f(24) = 0 \quad f(25) = 2 \quad f(26) = 3 \quad f(27) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

$f\left(\frac{14}{7}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30 \quad \forall\ x \in (1; 3]$

$\frac{9}{4} \geq 3a + b \geq 0 \qquad \frac{9}{4} - 3a \geq b \geq -3a$

$\frac{5}{2} \geq 2a + b \geq -6 \qquad \frac{5}{2} - 2a \geq b \geq -2a - 6$

$\frac{5}{2} - 2a \geq -3a$

$a \geq -\frac{5}{2}$

$(4x-3)(2x-2) =$

$\frac{9}{4} - 3a \geq -2a - 6$

$8x^2 - 34x + 30 = 2(4x^2 - 17x + 15) = \qquad a \leq \frac{33}{4}$

$= 2(4x-5)(x-3)$

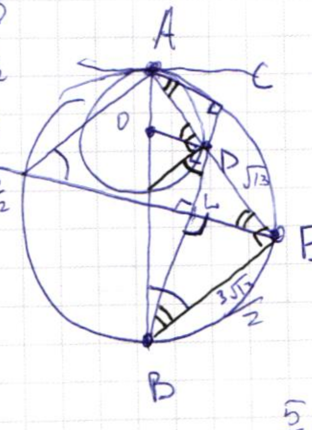
$8x^2 - (a+34)x + (30-b) \leq 0$

$D = (a+34)^2 - 32(30-b) > 0$

$\frac{BL}{\cancel{AD}EB} = \frac{BE}{BD}$

$BL = \frac{\frac{9 \cdot 13}{4} \cdot 2}{13} = \frac{9}{2}$

$CL = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} - \frac{9}{2} = \frac{9}{2}$



$CD = \frac{5}{2} \qquad BD = \frac{13}{2} \qquad BC = 9$

$AE = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

$\cancel{AE}$

$\frac{BO}{BD} = \frac{A\cancel{B}}{BC}$

$R^2 = \frac{81 \cdot 13}{16} + \frac{9 \cdot 13}{4} =$

$= \frac{9 \cdot 13}{16} \cdot (9 + 4)$

$R = \frac{39}{4}$

$r = \frac{65}{12}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} = \frac{5}{9}$

$\frac{5}{4} DE^2 = \frac{65}{4}$

$DE^2 = 13$

$DE = \sqrt{13}$

$\frac{\cancel{2}R - 2r}{\frac{13}{2}} = \frac{2R}{9}$

$\frac{AD}{AD+DE} = \frac{5}{9} \qquad \frac{AD}{DE} = \frac{5}{4}$

$BE = \sqrt{\frac{169}{4} - 13} = \sqrt{\frac{117}{4}} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$36R - 18r = 26R$

$10R = 18r$

$r = \frac{5}{9}R$

$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 2(4x-5)(x-3) = \frac{4x-3}{x-1}$

$x=\frac{5}{4}: \quad 4 \geq \frac{5}{4}a+b \geq 0$ $\qquad \left[-\frac{49}{8}; 4\right)$

$x=3: \quad \frac{9}{4} \geq 3a+b \geq 0$ $\qquad \left[\frac{9}{4}; +\infty\right)$

$4-\frac{5}{4}a \geq b \geq -\frac{5}{4}a$

$\frac{9}{4}-3a \geq b \geq -3a$ $\qquad 16x^3-68x^2+60x-16x^2+68x-8-4x+3 \geq$

$\frac{9}{4}-3a \geq -\frac{5}{4}a$ $\qquad 16x^3-84x^2+124x-57=0$

$9-12a \geq -5a$

$a \leq \frac{9}{7}$ $\qquad b \geq$

$4-\frac{5}{4}a \geq -3a$

	16	-84	124	-57
3	4			

$x=\frac{17}{8}$

$16-5a \geq -12a$

$\boxed{\frac{9}{7} \geq a \geq -\frac{16}{7}}$

$\frac{\frac{17}{2}-3}{\frac{17}{4}-2} = \frac{\frac{11}{2}}{\frac{9}{4}} = \frac{22}{9} \geq \frac{17}{8}a+b \geq -\frac{49}{8}$

$2\cdot\left(\frac{17}{2}-5\right)\left(\frac{17}{8}-3\right) = 2\cdot\frac{7}{2}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) = -\frac{49}{8}$

$\frac{22}{9}-\frac{17}{8}a \geq b \geq -\frac{49}{8}-\frac{17}{8}a$

$\begin{cases} \frac{-2ax^2+(4-2b+2a)x+2b-3}{2x-2} \geq 0 \quad 2x-2>0 \\ 8x^2-(34+a)x+(30-b) \leq 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} -2ax^2+2(2+a-b)x+2b-3 \geq 0 \\ 8x^2-(a+34)x+(30-b) \leq 0 \end{cases}$ $x \in (1, -3)$

$f = 2+\frac{1}{2x-2}$ $\qquad f' = \frac{1}{2}\cdot -\frac{1}{(x-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$2+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$8x^2 - 34x + 30 = 2(4x-$

$b \geq 4$

$a:$ $3a + b > 0$

$\boxed{a > -\frac{b}{3}}$

$2 + \frac{1}{2x-2} = ax + b$

$4x - 3 = 2ax^2 + 2bx - 2ax - 2b$

$2ax^2 + (2b - 2a - 4)x + (3 - 2b) = 0$

$D = 4(a^2 + b^2 + 4 - 2ab - 4b + 4a) - 4(6a - 4ab) =$

$= 4(a^2 + b^2 + 2ab - 4b - 2a + 4) < 0$

$f' = -\frac{1}{2(x-1)^2} = a$

$ax + b = \frac{4x-3}{2x-2}$

$x = 1$ $\varnothing$

$\frac{2b(x-1)^2 - x}{2(x-1)^2} = \frac{4x-3}{\cancel{8(x-1)}}$

$2b(x-1)^2 = 4x^2 - 6x + 3$

$b =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

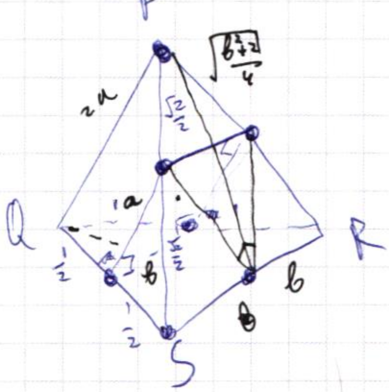
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

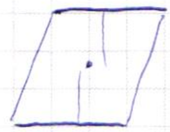
ШИФР

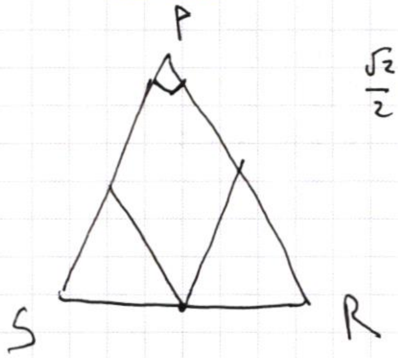
(заполняется секретарём)

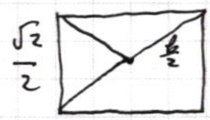
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

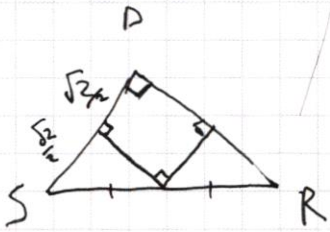


$QP \perp RS$









$d = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{b^2+2}}{2}$

$r = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$

$r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2+2}{4}}$

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2a+4b) + \sin 2a = -\frac{8}{17}$

$$\begin{cases} \sin 2a \cos 2\beta + \cos 2a \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2a \cos^2 2b - \sin 2a \sin^2 2\beta + 2\cos 2a \sin 2\beta \cos 2\beta + \sin 2a = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$2\sin 2a \cos^2 2\beta \cancel{- \sin 2a \sin^2 2\beta} + 2\cos 2a \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta(\sin 2a \cos 2\beta + \cos 2a \sin 2\beta) \cancel{- \sin 2a \sin^2 2\beta} = -\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}} \cos 2\beta = -\frac{8}{17}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2a \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2a \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2a + \cos 2a + 1 = 0$

$8\sin a \cos a + 2\cos^2 a = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos a = 0 \\ \boxed{tg\, a = -\frac{1}{4}} \end{array}\right.$

$\sin 2a \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2a \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2a - \cos 2a + 1 = 0$ $\qquad -4, -\frac{1}{4}, 0$

$8\sin a \cos a + 2\sin^2 a = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin a = 0 \Rightarrow tg\, a = 0 \\ tg\, a = -4 \end{array}\right.$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$x^2+6x > 0$ $\left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > 0 \end{array}\right.$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} - (x^2+6x)^{\log_4 5} + x^2+6x \geq 0$

$a^{\log_4 3} - a^{\log_4 5} + a \geq 0$ $\quad a > 0$

~~1) a > 1~~

$a^{\log_4 3} + a \geq a^{\log_4 5}$

$a + a^{\log_4 3} \geq a^{\log_4 5}$

$f' = 1 + \log_4 3 \cdot a^{\log_4 3 - 1} - \log_4 5 \cdot a^{\log_4 5 - 1}$

$1 \cdot l$ $\qquad \frac{a + \log_4 3 \cdot a^{\log_4 3} - \log_4 5 \cdot a^{\log_4 5}}{a}$

$1 + a^{\log_4 \frac{4}{3}} - a^{\log_4 \frac{5}{3}} \geq 0$ $\qquad \downarrow \qquad \uparrow$

$1 + a^{\log_4 \frac{4}{3}} \geq a^{\log_4 \frac{5}{3}}$ $\qquad f' = \log_4 \frac{4}{3}$

$\downarrow$

$1 + a^{\log_4 \frac{3}{4}} \geq a^{\log_4 \frac{5}{4}}$ $\qquad f' = \log_4 \frac{3}{4} \cdot a^{\cdots} < 0$

$a = 16$ $\qquad > 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)