МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

(2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot$

$\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{-4}{17\cdot\sin(2\alpha+2\beta)} \overset{(\text{из }(1))}{=} \frac{4}{\sqrt{17}}$

~~(1): $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2$~~

$\cos(2\beta) = 2\cdot\cos^2(\beta) - 1 = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos^2\beta = \frac{4+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}(4+\sqrt{17})}{34}$

$\Rightarrow$ возможные значения $\cos\beta$, удовл. этому услов. только $\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}(4+\sqrt{17})}{34}}$

(1): $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\cdot$

$\cdot\sin(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin(2\alpha)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)$

Рассм. два случая, т.к. $\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$, то $\sin(2\beta)$ может принимать только два значения, поскольку должно выполняться основ. тригон. тожд. $\sin^2(2\beta) = 1-\cos^2(2\beta) = \frac{1}{17} \Rightarrow \sin(2\beta) = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1 случ. $\sin(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда (1) ур-ние принимает вид:

$$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin(2\alpha)+\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big|\cdot\sqrt{17}$$

$$4\sin(2\alpha)+\cos(2\alpha)=-1$$

$$4\cdot2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=-1$$

$$\cancel{8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1-2\sin^2\alpha=-1}$$

$$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1$$

$$\cos\alpha(8\sin\alpha+2\cos\alpha)=0$$

$\cos\alpha\neq0$, т.к. в условии $\operatorname{tg}\alpha\ \exists$

$$8\sin\alpha+2\cos\alpha=0 \quad \Big|:\cos\alpha(\neq0)$$

$\underline{\operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4}}$ – нашли одно возможное знач.

2 случ. $\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда (1) ур-ние принимает вид:

$$\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin(2\alpha)-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big|\cdot\sqrt{17}$$

$$8\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cos(2\alpha)=-1$$

$$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha-(1-2\sin^2\alpha)=-1$$

$$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\sin^2\alpha=0 \quad \Big|:2$$

$$\sin\alpha(4\cos\alpha+\sin\alpha)=0$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0 \quad \big|:\cos\alpha(\neq0)\\ 4\cos\alpha+\sin\alpha=0 \quad \big|:\cos\alpha(\neq0)\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=0\\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{4}\end{array}\right.$$ – нашли ещё два возможн. знач.

А больше знач. быть не может, т.к.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

мы показали, что всего два случая, т.е. $tg\alpha$ может принимать максим. 3 знач., а в услов. сказано, что их миним. три => все они реализуются. Ответ: $0; -\frac{1}{4}; -4$.

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)} & (1) \\ 3x^2-6x+3y^2-4y=4 & (2) \end{cases}$$

Сделаем замену: $t=(3y-2)$, $k=(x-1)$, тогда $t^2=9y^2-\cancel{2}6y+4=3(3y^2-4y)+4$, $k^2=x^2-2x+1$

Система принимает вид:

$$\begin{cases} t-2k=\sqrt{t\cdot k} & (1) \\ \frac{1}{3}t^2-\frac{4}{3}+3k^2-3=4 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t-2k=\sqrt{t\cdot k} \\ t^2+9k^2=25 \end{cases}$$

~~Пусть $\sqrt{t}$~~ Рассмотрим два случ.:

1 случ. $t\geq 0$, $k\geq 0$, тогда сделаем ещё замену $\sqrt{t}=m$ (≥ 0), $\sqrt{k}=n$ (≥ 0), система приним. вид:

$$\begin{cases} m^2-2\cancel{k}^2=m\cdot n \\ m^4+9n^4=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m^2-2m\cdot n+m\cdot n-2n^2=0 \\ m^4+9n^4=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} m(m-2n)+n(m-2n)=0 \\ m^4+9n^4=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (m+n)\cdot(m-2n)=0 \\ m^4+9n^4=25 \end{cases}$$

система распадается на две:

$$\begin{cases} m+n=0 \\ m^4+9n^4=25 \end{cases} \varnothing$$

т.к. m и $n \geq 0$, то случ. $m=-n$ возможен только при $m=n=0$, но тогда 2 ур-ние не верно $0 \neq 25 \Rightarrow$ нет реш.

$$\begin{cases} m=2n \\ m^4+9n^4=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16n^4+9n^4=25 \\ m=2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^4=1 \\ m=2n \end{cases}$$

$$\begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases}$$ т.к. $n \geq 0$

Вернемся к t и k:

$$\begin{cases} \sqrt{t}=2 \\ \sqrt{k}=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t=4 \\ k=1 \end{cases}.$$

Вернемся к x и y:

$$\begin{cases} 3y-2=4 \\ x-1=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y=6 \\ x=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Второй случай: $t<0$, $k<0$, тогда произв. $t\cdot k>0$. Сделаем замену: $\sqrt{-t}=a$, $\sqrt{-k}=b$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} -a^2+2b^2=a\cdot b \\ a^4+9b^4=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+a\cdot b-2b^2=0 \\ a^4+9b^4=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+2a\cdot b-a\cdot b-2b^2=0 \\ a^4+9b^4=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(a+2b)-b(a+2b)=0 \\ a^4+9b^4=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-b)(a+2b)=0 \\ a^4+9b^4=25 \end{cases}$$

сист. распад. на две:

$$\begin{cases} a=b \\ a^4+9b^4=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4+9a^4=25 \\ a=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^4=\frac{5}{2} \\ a=b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=\sqrt[4]{\frac{5}{2}} \\ b=\sqrt[4]{\frac{5}{2}} \end{cases}$$ т.к. $a, b\geq 0$

$$\begin{cases} a+2b=0 \\ a^4+9b^4=25 \end{cases} \varnothing$$

$a=-2b \Rightarrow$ т.к. a и $b\geq 0$, то случ. возможен при $a=b=0$, но тогда не вып. второе ур-ние.

Вернемся к t и k:

$$\begin{cases} \sqrt{-t} = \sqrt[4]{\frac{5}{2}} \\ \sqrt{-k} = \sqrt[4]{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -t = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ -k = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ k = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Вернемся к x и y:

$$\begin{cases} 3y-2 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x-1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y = 2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x = 1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x = 1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Ответ: $(2;2)$; $\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$.

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

Из ОДЗ следует, что $x^2+6x>0$, на ОДЗ нер-во равносильно: (следующим)

$$4^{\log_4 3 \cdot \log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x^2+6x)^{\log_4 3}+(x^2+6x)\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}$$

Замена: пусть $x^2+6x=t>0$, (модуль убрали, т.к. считали, что $x^2+6x>0$)

тогда:

$$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5} \quad \Big| : t>0$$

$$t^{\log_4 3-1}\geq t^{\log_4 5-1}-1$$

Рассм. ф-ция $t^{(\log_4 3-1)}$, т.к. $\log_4 3<\log_4 4\leq 1$, то $\log_4 3-1<0 \Rightarrow$ ф-ция $f(t)=t^{(\log_4 3-1)}$ убыв. на промеж. $(0;+\infty)$ Рассм. ф-цию $g(t)=t^{\log_4 5-1}$, т.к. $\log_4 5>\log_4 4=1 \Rightarrow$

$\log_4 5-1>0 \Rightarrow$ ф-ция $g(t)=t^{\log_4 5-1}$ возр. на промеж. $(0;+\infty) \Rightarrow$ возр. ф-ция $g'(t)=t^{\log_4 5-1}-1 \Rightarrow$ ур-ние $f(t)=g'(t)$ имеет не более одного корня на пром. $(0;+\infty)$

Найдём t_0: $f(t_0)=g'(t_0)$

$t_0=16$ – подходит.

Проверка:

$$16^{\log_4 3}+16=4^{2\cdot\log_4 3}+16=3^2+16=25=$$
$$=16^{\log_4 5}=4^{2\cdot\log_4 5}=5^2=25 \text{ – верно.}$$

$\Rightarrow$ в ответ нам подходят t:

$$\begin{cases} t\leq t_0 \\ t\in 0\text{Д}3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t \le 16 \\ t > 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $t \in (0; 16]$. Вернемся к x:

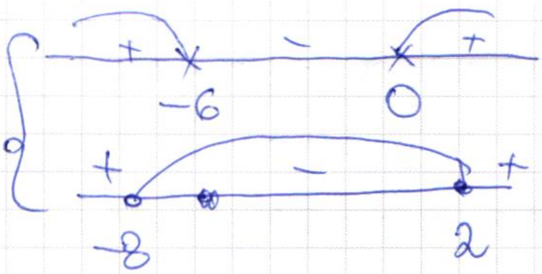
$$\begin{cases} x^2 + 6x \le 16 \\ x^2 + 6x > 0 \end{cases}$$

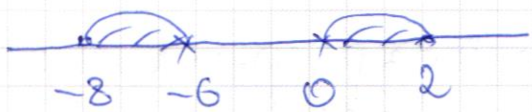
$$\begin{cases} x^2 + 6x - 16 \le 0 \\ x(x+6) > 0 \end{cases}$$

$D = 36 + 4 \cdot 16 = 36 + 64 = 100$

$x = \frac{-6 \pm 10}{2}$

$$\begin{cases} (x+8)(x-2) \le 0 \\ x(x+6) > 0 \end{cases}$$





Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$.

№6.

$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax + b \ge 8x^2 - 34x + 30$ $\quad (a; b)$ - ?

$\forall x \in (1; 3]$

Пусть $f(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} =$

$= 2 + \frac{1}{2(x-1)}$ Постр. граф. $f(x)$ – гипербола с ассимп. $x = 1$ и $y = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(x) = 8x^2 - 34x + 30 = \cancel{8(}$ − парабола

$x_в = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$; $y_в = \frac{-D}{4a} = \frac{-(34^2 - 32\cdot 30)}{32} = \frac{-34^2}{32} + 30 =$

$= \frac{-17^2}{8} + 30 = -\frac{289}{8} + 30 =$

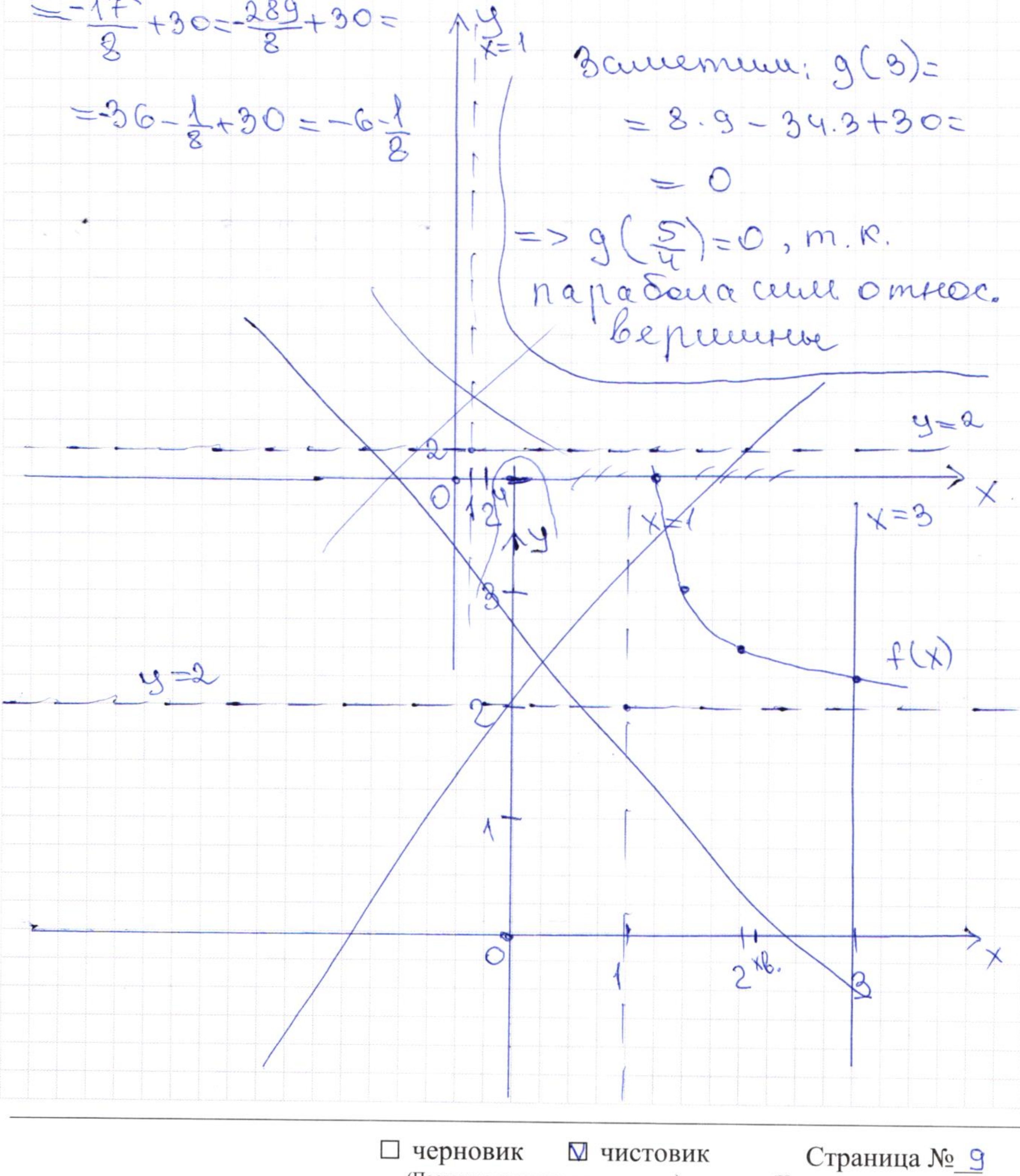
$= -36 - \frac{1}{8} + 30 = -6\frac{1}{8}$

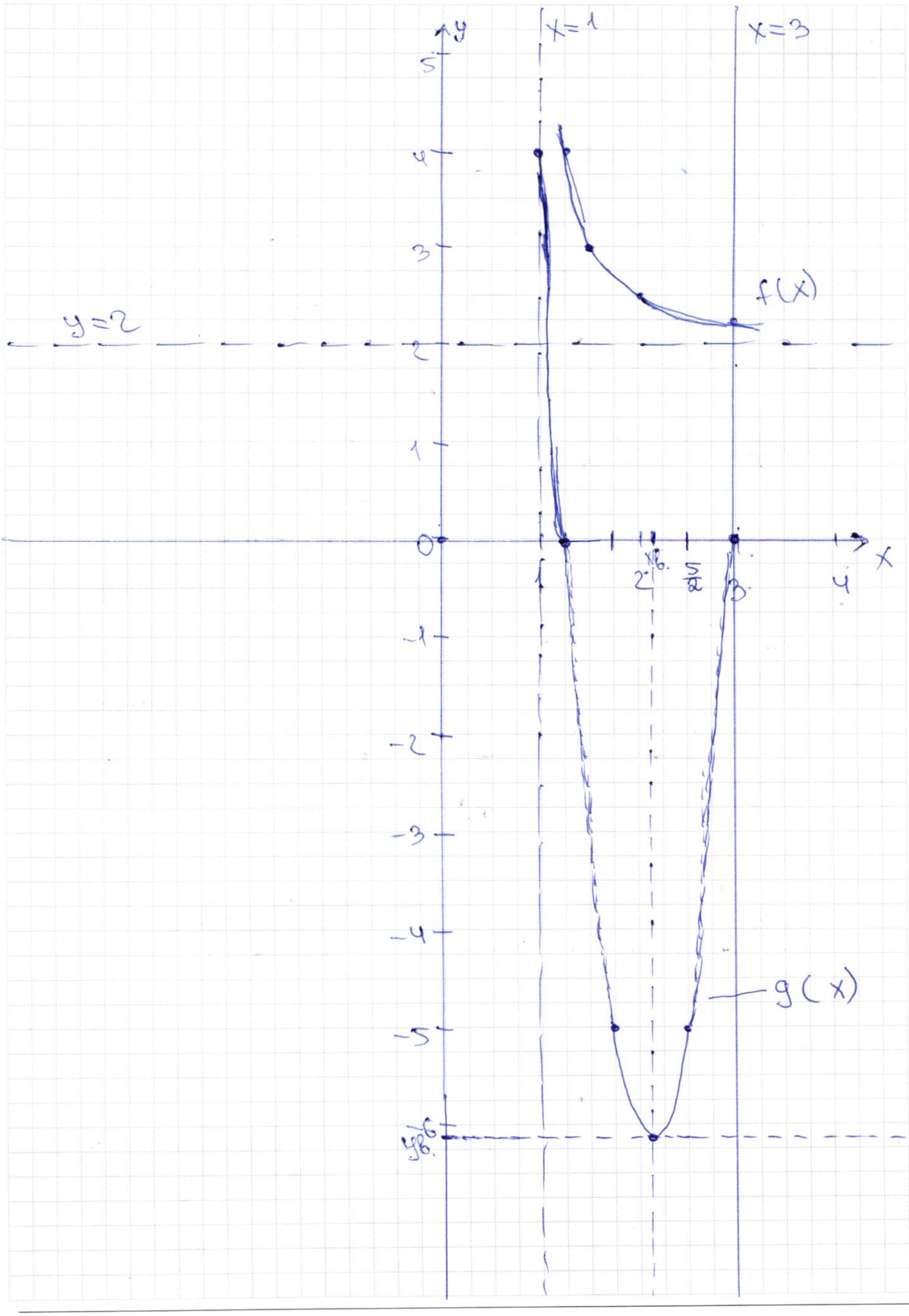
Заметим: $g(3) =$

$= 8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 =$

$= 0$

$\Rightarrow g\left(\frac{5}{4}\right) = 0$, т.к. парабола сим относ. вершины





y
x
x=1
x=3
y=2
f(x)
g(x)
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
1
2
3
4
5/2

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(1) = 8 - 34 + 30 = 4$

$g\left(\frac{9}{4}\right) = 8 \cdot \frac{81}{16} - \frac{34 \cdot 9}{4} + 30$, $g\left(\frac{5}{2}\right) = 8 \cdot \frac{25}{4} - \frac{34 \cdot 5}{2} + 30 =$

$= 50 - 17 \cdot 5 + 30 = 80 - 85 = -5 \Rightarrow g\left(\frac{7}{4}\right) = -5$

$h(x) = ax + b$ – график прямая

$\Rightarrow$ чтобы выполнялось нер-во необходимо и достаточно, чтобы часть прямой $y = ax + b$, при $x \in (1; 3]$ лежала выше, чем график $g(x)$ или где-то совпад., и ниже, чем граф. $f(x)$ или где-то совпад.

Тогда эта прямая должна пересекать пр. $x = 3$ в точке с ординатой $\begin{cases} y(3) \geq 0 \\ y(3) \leq \frac{9}{4} \end{cases}$

и $y(1) \geq 4$, ~~ограничн. сверху нет, т.к. граф. f(x) не перес. пр. x = 1~~

Найдём огранич. сверху для $y(1)$. Предельный случай, когда прямая ещё удовл. нер-ву – это когда она касается гиперболы. Т.е. ур-ние $h(x) = f(x)$ имеет одно реш.

$$ax+b=2+\frac{1}{2(x-1)}$$

т. е. мы получаем условия:

$$\begin{cases} 3a+b\geq 0 \\ 3a+b\leq \frac{9}{4} \\ a+b\geq 4 \\ ax+b=2+\frac{1}{2(x-1)} \ (1) \end{cases}$$ – ур-ние имеет не более 1 реш.

~~ав~~

Т.к. у прямой и этого куска гип. возможны только 2 пересеч., 1 пер. – касание, или 0 т. пер.

$\Rightarrow$ нам подходит случай 1 реш. или 0 реш.

(1):

$$\frac{4x-3}{2x-2}=ax+b \Big| \cdot \underset{\neq 0}{2x-2}$$

$4x-3=2ax^2-2b+$

$+2bx-2ax$

$2ax^2+(2b-2a-4)x-2b+3=0$

$D\leq 0$ ($a=0$ не подх. в нер-во)

$D=(2(b-a-2))^2-4(2a)(3-2b)=$

$=4(\underline{b^2}-\underline{ab}-2b-\underline{ab}+\underline{a^2}+2a-2b+2a+4)-24a+$

$+16ab=4b^2+4a^2-8ab-16b+16a+16-24a$

$+16ab=4b^2+4a^2+8ab-16b-8a+16=$

$=4\underbrace{(a+b)^2}_{\geq 16 \text{ (из сист.)}}+16-16b-8a\leq 0$

$16b+8a\geq 16+4\cdot 16=80$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Сист. приним. вид:

$$\begin{cases} 3a+b\geq 0 & (2) \\ 3a+b\leq \frac{9}{4} & (3) \\ a+b\geq 4 & (4) \\ 2b+a\geq 10 & (5) \end{cases}$$

~~из (2) и (4) получ.~~

(4): $\quad -a-b\leq -4$

$(4)+(3)$: $\quad 2a\leq \frac{9}{4}-4=-\frac{7}{4}$

$$\underline{a}\leq -\frac{7}{8} \Rightarrow -a\geq \frac{7}{8}$$

$(2)+(4)$:

$$4a+2b\geq 4$$

$$2b\geq 4-4a\geq 4+4\cdot\frac{7}{8}=4+\frac{7}{2}=\frac{15}{2}$$

$$b\geq \frac{15}{2} \qquad \cancel{b\leq 1}$$

~~из (5): $2b\leq 10-a$~~ $\qquad$ ~~$a\geq 4-b$~~

~~из (5): $2b\geq 10-a\geq 10+\frac{7}{8}\geq\frac{87}{8}$~~

~~$a\geq 10-2b$~~

Ответ: $a\in(-\infty;-\frac{7}{8}]$, $b\in[\frac{15}{2};+\infty)$

№5.

$$\begin{cases} f(a\cdot b) = f(a) + f(b), \ a, b > 0, \ a, b \in \mathbb{Q} \\ f(p) = [\frac{p}{4}] \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 \le x \le 27 \\ 3 \le y \le 27 \\ f(\frac{x}{y}) < 0 \end{cases} \quad (x; y) \in \mathbb{N}$$

$f(p\cdot 1) = f(p) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x\cdot\frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$, если $\frac{x}{y}$ не простое.

Найдём кол-во пар $(x; y)$, нат. $\begin{cases} 3 \le x \le 27, \\ 3 \le y \le 27, \end{cases}$ таких что $\frac{x}{y}$ – простое.

из сист. $\frac{x}{y}$ может лежать в промеж.

$[1; 9]$, здесь простые числа:

2, 3, 5, 7. Найдём кол-во способов получ.

2 : x – должно быть четн. $\Rightarrow$ от 6 до 26

при $x = 6$, $y = 3$ — мин, т.к. при $x = 4$,

при $x = 26$, $y = 13$ — y должен быть 2.

$\Rightarrow$ всего 11 пар. при таких x, y опр. однознач. $y = \frac{x}{2}$

Найдём к. спос. получ. 3:

x должен делиться на.

Если $\frac{x}{y}$ – простое, то $f(\frac{x}{y}) = [\frac{x}{y}] \ge 0$, т.к. x и y – нат

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

=> услов. $f(\frac{x}{y})<0$ вып. не будет.

=> $\frac{x}{y}$ должно быть не прост. и вып.:

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

т.к. $f(1)=f(y\cdot\frac{1}{y})=f(y)+f(\frac{1}{y})=0$, то
$y\neq 0$

$f(\frac{1}{y})=-f(y)$, т.е. $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)<0$

т.е. должно вып. $f(x)<f(y)$

Если x и y - простые.

$f(x)=[\frac{x}{4}]$, $f(y)=[\frac{y}{4}]$

$[\frac{x}{4}]<[\frac{y}{4}]$

простые от 3 до 27: $\{3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\}$

$x=3 \Rightarrow [\frac{3}{4}]=0<[\frac{y}{4}] \Rightarrow \frac{y}{4}\geq 4 \Rightarrow y\geq 16$

=> подходят 3 пары ($y=17, 19, 23$)

$x=5 \Rightarrow [\frac{5}{4}]=1<[\frac{y}{4}] \Rightarrow \frac{y}{4}\geq 8$ $y\geq 32$

таких нет пар, при $x>5$, также не будет пар

Если x и y составн.

$f(x)=f(a\cdot b)=f(a)+f(b)$ разложим на два множ.

Если a или b ещё не прост. то повторим операц. Получим:

$f(x) = f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)$, где $x_1, x_2, .. x_n$ - все пр. множ. x

Аналогич

$f(y) = f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_k)$, где $y_1, \ldots y_k$ все пр. множ. y.

т.е. $f(x_1) + f(x_2) \ldots + f(x_n) < f(y_1) + f(y_2) + \ldots + f(y_k)$

т.к. все x_i и y_i простые, то:

$$\left[\frac{x_1}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{x_n}{4}\right] < \left[\frac{y_1}{4}\right] + \ldots + \left[\frac{y_n}{4}\right]$$

т.к. они принадл. мн-ву $\mho$ (x_i, y_i), то $\left[\frac{x_i}{4}\right]$ и $\left[\frac{y_i}{4}\right]$ приним. знач. $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$

максим. кол-во слагаем. 4 при $x = 2^4$

макс. сумма:

Если слева множ. 4, то $x = 16$, слева сумма $0 \Rightarrow$ справа $1, .., 5$ (слева и множ. быть не может).

Если справа 1, то y либо 5, либо $5 \cdot 2 = 10$, либо $5 \cdot 2 \cdot 2 = 20 \Rightarrow$ 3 пары

Если справа 2, то

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$0<\log_4 3<1$ $\quad t^{\log_4 3}$ $\quad t^a$

$t^{(\log_4 3-1)}$ $\quad x^a \quad t^a$ $\quad -\frac{1}{2}$

убыв.

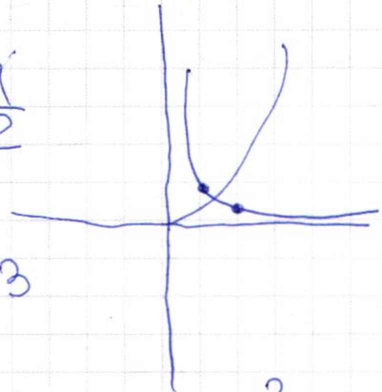
<0 $\quad 80-$

-3

$\cdot\ -16$ $\quad \frac{x^{16}}{4}$ $\quad 7$

$+\ -6 > 64$ $\quad \left(\frac{1}{7}\right)^3$ $\quad \frac{1}{7}$ $\quad x^{-2}$

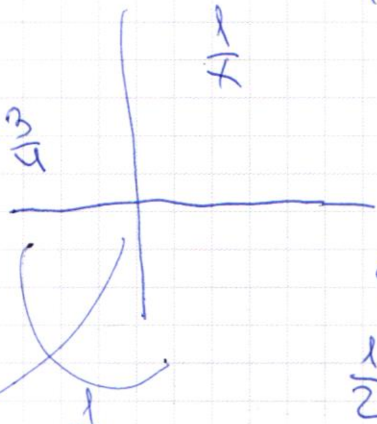
2 $\quad x^2$



$1+\frac{3}{4}$ $\quad 1$

$t^{\log_4 3}+t=\cancel{\log_4} 5^{\log_4 5}$

$t=2$ $\quad -8;2$ $\quad 2$



$4^{\frac{1}{2}\cdot\log_4 3}$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad 2+\frac{1}{4}$

$=3^{\frac{1}{2}}+2=5^{\frac{1}{2}}$

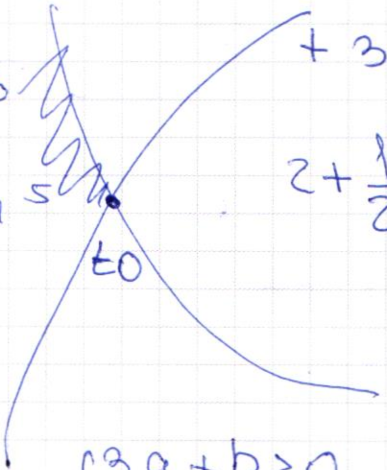
240

16 $\quad 1+\frac{1}{4}$ $\quad 5.16$ $\quad +34$

$4^{2\cdot\log_4 3}$

$2+\frac{1}{2}$

$9+16=4^{2\cdot\log_4 5}$ $\quad t_0$



$8x^2-34x+30$ $\quad 72-102+30$

$x=3$ $\quad 102-102$

$8\cdot9-34\cdot3+30$

$$\begin{cases}3a+b\ge0\\3a+b\le\frac{9}{4}\end{cases}$$

$a+b\ge4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(a;b)$ $\quad (b-a-2)(b-a-2)$

$D = 34^2 - 32\cdot 30 =$ $\quad \frac{1}{2x}$

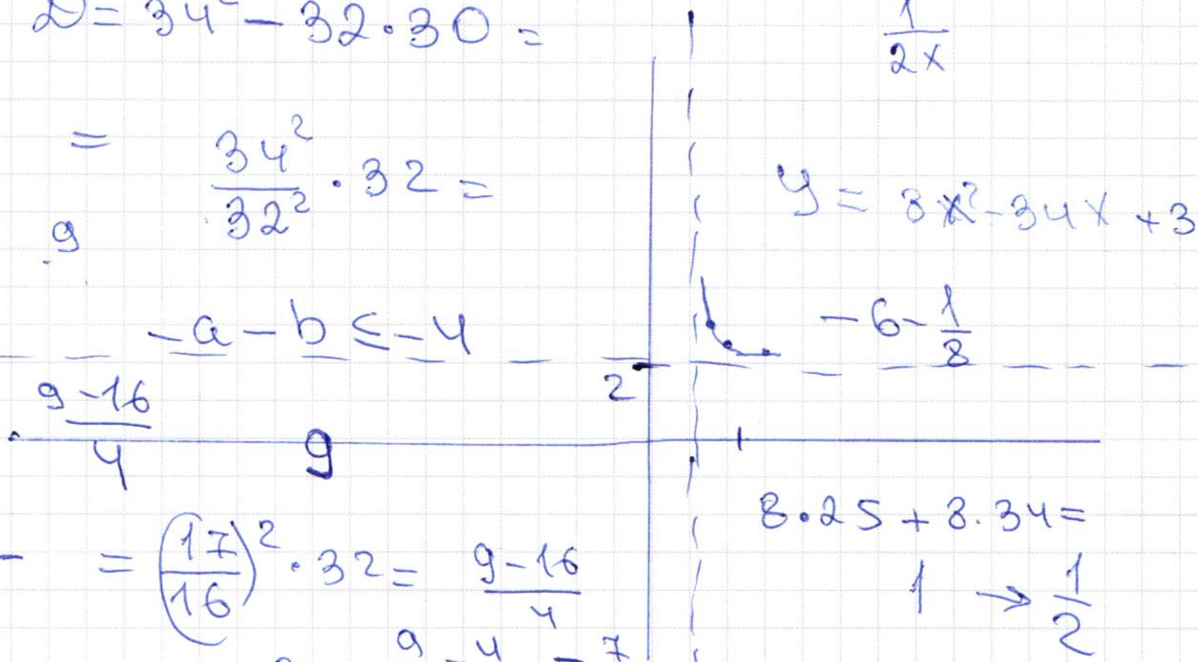
$= \frac{34^2}{32^2}\cdot 32 =$

$y = 8x^2 - 34x + 30$

9

$-a-b \leq -4$ $\quad -6-\frac{1}{8}$

$\frac{9-16}{4}$ $\quad$ 9 $\quad$ 2 $\quad$ 1



$8\cdot 25 + 8\cdot 34 =$

$= \left(\frac{17}{16}\right)^2 \cdot 32 = \frac{9-16}{4}$ $\quad 1 \to \frac{1}{2}$

$= 17^2$ $\quad \frac{9}{4} - 4 - \frac{7}{4}$ $\quad 3a+b = 2a + \underbrace{a+b}_{\geq 4} \geq 0$ $\quad 2a \geq -4$

$8x^2 - 34x + 30$ $\quad \frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2 + \frac{1}{8}$ $\quad \frac{1}{2}$

$\frac{17^2}{16\cdot 16}\cdot 32 =$ $\quad 5\cdot 4$

$= 17^2 \cdot \frac{2}{16} = \frac{17^2}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\quad \frac{1}{2}$ $\quad 289 \mid 8$, -24, 36, 49, -48 $\quad 2 \quad \frac{1}{4}$

$30 - \frac{17^2}{16\cdot 16}\cdot 32 =$ $\quad 36\cdot 8$ $\quad \frac{1}{8}$ $\quad \frac{1}{2}$

$\frac{-D}{4a}$ $\quad = 30 - \frac{17^2}{8}$ $\quad 36 \times 8 = 288$ $\quad \frac{1}{4}$

$\frac{-34^2 + 32\cdot 30}{32}$ $\quad a \in \left(\frac{1}{4}\ \cancel{x}\right)$ $\quad 2\cdot\frac{1}{8}$

$b \in (x\ )$

$1 + \frac{1}{2}$ $\quad \frac{3}{2}\cdot 2$

$30 - \frac{34^2}{32^2}\cdot 32$ $\quad \frac{1}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3a \geq -b \quad -b \leq -\frac{15}{2}$

$3a \quad 3a \leq \frac{9}{4} - b \leq \frac{9}{4} - \frac{15}{2}^{|\cdot 2} = \frac{9}{4} - \frac{30}{4} =$

$= \frac{-21}{4} \qquad a \geq 4 - b$

$a \leq \qquad b \leq \frac{15}{2}$

a

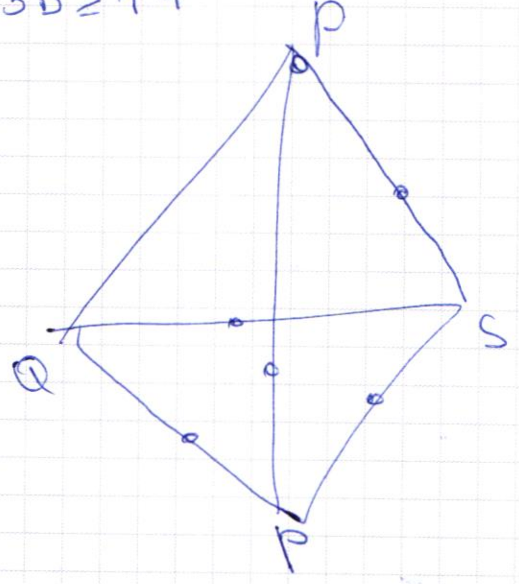
$\frac{81}{16} \qquad a \geq 10 - 2b$

$10 \quad 5$

10

$16b + 8a \geq 4(a+b)^2 + 16$

$2a + 3b \geq 14$



$x \in [3; 27]$ 1

$y \in [3; 27]$

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$ $f(1) -$

$f(p \cdot 1) = f(p) + f(1)$

$\frac{x}{y}$

$f(1) = f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(y$

23

$2^k \cdot$

$b \leq \frac{9}{4} - 3a$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $8\sin\alpha=-2\cos\alpha$

$4\sin\alpha=-\cos\alpha$ $tg\alpha$ - ? есть 3

$\sin(2\alpha+4\beta)+\cancel{4}\sin2\alpha=-\frac{8}{17}$ s tg

$\sin(2\cdot(\alpha+\beta))=2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)$

$\cos(2\alpha)$

$2\cdot\sin(\alpha+2\beta)$ $2\cos^2\alpha-1$

$\sin x+\sin y=2\cdot\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$ $\cos^2+$

$=2\cdot\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos2\beta=-\frac{8}{17}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}+1=$ $\frac{16}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos2\beta=-\frac{8}{17}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \cos(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}$

$\cos2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$=\frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{1}}$ $\cos2\beta=2\cdot\cos^2\beta-1$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+2\cdot\cos^2\alpha$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+1-2\sin$

$\cos\alpha(8\sin\alpha+2\cos\alpha)$

$\sin\alpha=-4\cos\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{1}$ $\quad 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$\cancel{2}$

$\cancel{3}$ $\quad 3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}=$

4 $\quad =\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

5

6 $\quad 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \qquad \frac{25}{10}$

7 $\quad \cancel{3(x^2-2x}$

$\sqrt{t\cdot k}$ $\quad 3(x^2-\cancel{6}2x)=3(x-1)^2-3 \qquad 3\;3$

$3y^2-4y=3(y^2-\frac{4}{3}y)=3(y^2-2\cdot\frac{2}{3}y+$

$\sqrt{-t}=a$ $\quad +\frac{4}{9})-\frac{4}{3} \qquad -4-9$

$-t=a^2 \qquad -13=12$

$t=-a^2$ $\quad \cancel{3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2-3-\frac{4}{3}=4}$

t

$\sqrt{3y-2}=t,\ \sqrt{x-1}=k$

$3y-2x-2-2$

$t^2=t^2\cancel{+}2k^2=t\cdot k$

$(3y-2)\mp 2(x-1)=$

$\begin{cases} t^2-2k^2=t\cdot k \\ \cancel{3(x} \; 3x(x-2)+y(3y-4) \end{cases}$ $\quad =3y-2x\cancel{-2+2}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$ $\quad 3y-2=t$

$\begin{cases} t-2k=\sqrt{t\cdot k} \\ \frac{1}{3}t^2-\frac{4}{3}+k^2-3 =4 \end{cases}$ $\quad x-1=k$

$t^2=9y^2-12y+4$

$3(3y^2-4y)+4$

$\begin{cases} t^2+9k^2=25 \\ t-2k=\sqrt{t.k} \end{cases}$ $\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=$ $3y^2-4y+\frac{4}{3}$

$\sqrt{t}=m, \sqrt{k}=n$ $=2+\frac{5}{2}-3\sqrt{\frac{5}{2}}+2$ $\quad 3x^2+3\cancel{y^2}-6x-\cancel{4y}=4$

$m,n\geq 0$

$\begin{cases} m^2-2n^2=m.n \\ m^4+9n^4=25 \end{cases}$ $\quad k^2=x^2-2x+1$

$3x^2-6x+3$

2^4

$12+8$

$m^4+4n^4-4m^2n^2=m\cdot n$ $\quad -4-9=12$

$m^4+9n^4=25$

4 $\quad 12+1$ $\quad 12-4-6+2$

$6-4$

$5n^4+4m^2n^2+mn=25$

$3\cdot 4$ $\quad 14-8$

$m^2-m.n-2n^2=0$ $\quad 3\sqrt{\frac{5}{2}}-4$ $\quad 4-3\sqrt{\frac{5}{2}}$

$12-4$

~~$m(m-1$~~ $m^2-2m.n+m\cdot n-2n^2=0$

$8-6+2$

$m(m-2n)+n(m-2n)$

$\left(\frac{5}{2}\right)$

$2-\sqrt{\frac{5}{2}}-2\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)=\sqrt{\frac{5}{2}}$

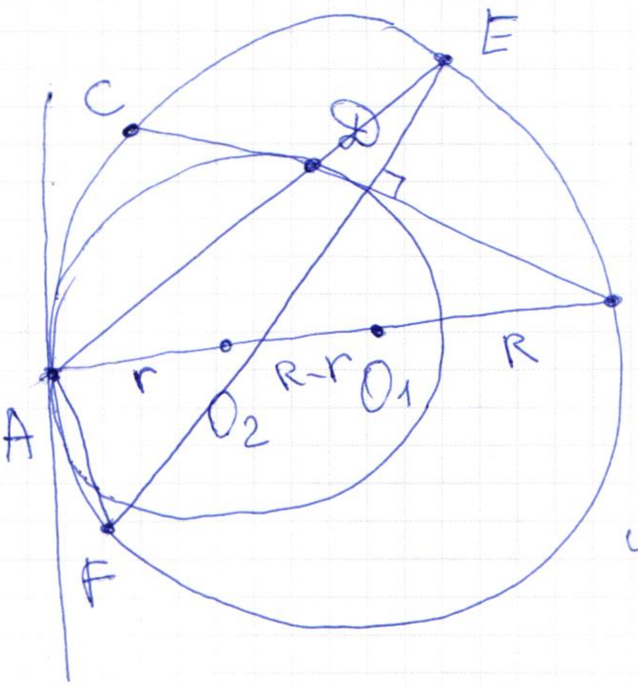
$\sqrt{\frac{5}{2}}-2-2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



Ω, ω

R, r, $\angle AFE$, S_{AEF}

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

4^3 $CB = 9$

3 $a^x + a^y$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

Пусть $x^2+6x = t$, тогда; ОДЗ: $x^2+6x > 0$
$t > 0$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$3^{\log_4}$ $4^{\log_4}$ $\overline{t}$

$4^{\log_4 3 \cdot \log_4(x^2+6x)}$ $3 = 4^{\log_4 3}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + (x^2+6x) \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5} \Big| : t$ $\quad t > 0$ $\quad 2 + \frac{1}{4}$

$\cancel{t^{100}}$ $t^{\log_4 3 - 1} \geq t^{\log_4 5} - 1$ $\quad t$

$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq \cancel{100}\, t^{\log_4 5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)