МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 6 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124, \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leqslant \log_{2x} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12414.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{8}{15}$, $AP = \frac{17}{2}$, $NC = 17$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x - 14}{2x - 3} \leqslant ax + b \leqslant 2 + \sqrt{\frac{51}{4} - 7x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани $KLMN$ и LMM_1L_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых L_1M_1 и M_1N_1, плоскости LMM_1, а также плоскости KLM в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle NN_1M_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 5$, $AM_1 = 2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124 \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92 \end{cases}$$

1. Сделаем замену:

$t = \sqrt[3]{64y^2 - x^2}$

Тогда:

$$\begin{cases} x - t = 124 \\ 8y - t = -92 \\ t^3 = 64y^2 - x^2 - \end{cases}$$

$t^3 = 64y^2 - x^2 = (8y - x)(8y + x)$

2. Сложим первые два уравнение:

$x - t + 8y - t = 32$

$8y + x = 32 + 2t$

3. Вычтем из второго первое:

$8y - t - x + t = -216$

$8y - x = -216$

$-216 = -6^3$

4. $t^3 = (8y - x)(8y + x) = (32 + 2t) \cdot (-6^3)$

$t^3 = -6^3 \cdot 32 - 2 \cdot 6^3 t$

$t^3 + 2 \cdot 6^3 t + 6^3 \cdot 32 = 0$

Один из корней этого уравнение $t = -12$

~~Используя~~ Поделим $t^3 + 2 \cdot 6^3 t + 6^3 \cdot 32$ на $t + 12$, получим:

$t^3 + 2 \cdot 6^3 t + 6^3 \cdot 32 = (t + 12)(t^2 - 12t + 576)$

$(t + 12)(t^2 - 12t + 576) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} t = -12 \\ t^2 - 12t + 576 = 0 \end{array}\right.$$

$t^2 - 12t + 576 = 0$, $D < 0$ $\Rightarrow$ корней нет

5. Тогда $t = -12$

$$\begin{cases} x + 12 = 124 \\ 8y + 12 = -92 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 112 \\ 8y = -104 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 112 \\ y = -13 \end{cases}$$

Ответ: $x = 112$, $y = -13$

~~N2.~~

$\cancel{\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}}$

~~1. Пользуясь свойствами логарифмов вынесем за логарифмы степени~~

~~N6~~

$\cancel{\frac{12x-14}{2x-3} \le ax+b \le 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}}$

~~Рассмотрим~~ $\cancel{f(x)=\frac{12x-14}{2x-3}}$

$\cancel{f'(x)=\frac{12(2x-3)}{(2x-3)^2}}$

N2.

$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \le \log_{2x} \frac{1}{x^3}$; Вынесем степени:

$\sqrt{9(\log_{2x^3} x)} \le -3\log_{2x} x$

$$\begin{cases} x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{2}} \\ x \ne \frac{1}{2} \\ x > 0 \\ \sqrt{\frac{9}{\log_x 2x^3}} \le \frac{-3}{\log_x 2x} \end{cases}$$

1. $\sqrt{\frac{9}{\log_x 2x^3}} \le \frac{-3}{\log_x 2x}$

$\sqrt{\frac{9}{\log_x 2+3}} \le \frac{-3}{\log_x 2+1}$

Замена: $t=\log_x 2$

$\sqrt{\frac{9}{t+3}} \le \frac{-3}{t+1}$

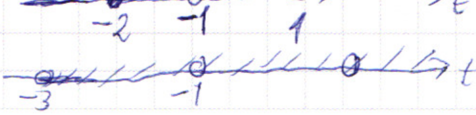
$$\begin{cases} t<-1 \\ t>-3 \\ \frac{9}{t+3} \le \frac{9}{(t+1)^2} \\ t \ne -1 \end{cases}$$

– можем домножить с обеих сторон на $\frac{(t+1)^2}{9}$

~~9(t+~~ $\frac{t^2+2t+1}{t+3} \le 1$; $\frac{t^2+t-2}{t+3} \le 0$;

$\frac{t^2+t-2}{t+3} \le 0$; $\frac{(t+2)(t-1)}{t+3} \le 0$;

$$\begin{cases} t<-1 \\ (t+2)(t-1)(t+3) \le 0 \\ t>-3 \\ t \ne -1 \end{cases}$$



$t \in [-2; -1)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2 (продолжение)

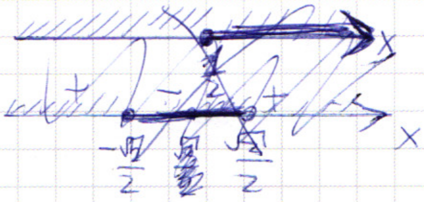
$t \in [-2; -1) \cancel{\cup (-1; 1]}$

Обратная замена: $\log_x 2 = t$

$\begin{cases} \log_x 2 \geq -2 \\ \log_x 2 < -1 \\ \cancel{\log_x 2 \neq -1} \end{cases}$ $\begin{cases} \log_x 2 \geq \log_x \frac{1}{x^2} \\ \log_x 2 \leq \log_x \frac{1}{x} \\ \cancel{x \neq \frac{1}{2}} \end{cases}$

1. $x > 1$

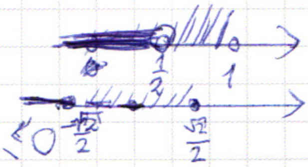
$\begin{cases} x > 1 \\ 2 \geq \frac{1}{x^2} \\ 2 \leq \frac{1}{x} \\ \cancel{x \neq \frac{1}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ 2x^2 - 1 \geq 0 \\ x \leq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} x > 1 \\ x \leq \frac{1}{2} \\ (\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1) \geq 0 \end{cases}$ $\varnothing$



$\cancel{x \geq 2}$

2. $0 < x < 1$

$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ \cancel{x \neq \frac{1}{2}} \\ \frac{1}{x^2} \geq 2 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ 2x^2 - 1 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x < 1 \\ x \geq \frac{1}{2} \\ (x - \frac{\sqrt{2}}{2})(x + \frac{\sqrt{2}}{2}) \leq 0 \end{cases}$



$\cancel{x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]}$ $x \in [\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$

Вспомним условие, которые были поставлены в начале:
$x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, $x \neq \frac{1}{2}$, $x > 0$.

С их учётом ничего в этих двух случаях не изменится,
т.к. $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\cancel{x \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}]}$

N2 (продолжение)

3. $x = 1$, подставим в неравенство:

$$\sqrt{\log_2 1} \leq \log_2 1 \qquad 0 \leq 0$$

$x = 1$ подходит.

Тогда, суммируя все случаи ответ будет такой:

$$\cancel{x \in (0; \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}; \tfrac{\sqrt{2}}{2}] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)}$$

~~Ответ:~~ $\cancel{x \in (0; \tfrac{1}{2}) \cup (\tfrac{1}{2}; \tfrac{\sqrt{2}}{2}] \cup \{1\} \cup [2; +\infty)}$

$$x \in (\tfrac{1}{2}; \tfrac{\sqrt{2}}{2}] \cup \{1\}$$

Ответ: $x \in (\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}] \cup \{1\}$

№3.

Семизначное число можно представить в виде

$\overline{abcdefg}$ ($1 \le a \le 9$; $0 \le b, c, d, e, f, g \le 9$)

Заметим, что остаток от деления на 10 в степени n равен числу, состоящему из n последних цифр данного числа в том же порядке.

1. Допустим последовательные степени числа 10 это 1, 2, 3. Тогда ~~остатки~~ сумма остатков равна:

$$S_1 = \overline{g} + \overline{fg} + \overline{efg} = 3g + 20f + 100e$$

$e, f, g \le 9$, значит $S_1 \le 3\cdot 9 + 20\cdot 9 + 100\cdot 9 = 27 + 180 + 900 = 1107$

Значит нельзя набрать сумму равную 12414 при степенях числа 10 от 1 до 3.

2. Допустим степени числа 10 это 2, 3, 4. Тогда сумма остатков равна:

$$S_2 = \overline{fg} + \overline{efg} + \overline{defg} = 3g + 30f + 200e + 1000d$$

$g, f, e, d \le 9$

$S_2 \le 27 + 270 + 1800 + 9000 = 10800 + 297 = 11097 \le 12414$

Значит нельзя набрать сумму равную 12414 при степенях числа 10 от 2 до 4.

3. Можно набрать сумму равную 12414 при степенях числа 10 от 3 до 5, т.к. число ~~$\overline{cdefg}$~~ $<$ $\overline{cdefg}$ является пятизначным как и число 12414.

Рассматривать последовательные степени далее бессмысленно, так как если $a, b > 0$, то там будут шести и семизначные

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

числа соответственно, а если $a, b = 0$, то их бессмысленно рассматривать, т.к. сумма остатков при участии ~~цифр~~ a и b будет такой же как сумма остатков без их участия.

Тогда рассмотрим последовательные степени чисел 10 от 3 до 5:

$S_3 = \overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 3g + 30f + 300e + 2000d + 10000c$

~~Зате~~ $S_2 = \cancel{..}\ 12414$

$3g + 30f + 300e + 2000d + 10000c = 12414$

$0 \le g, f, e, d, c \le 9$ Заметим, что $0 \le c \le 1$

1. Если $c = 1$, то

$3g + 30f + 300e + 2000d = 2414$ Заметим, что $0 \le d \le 1$

Если $d = 0$, то

$3g + 30f + 300e = 2414$, 2414 не делится на 3, а выражение слева делится.

Значит $d = 1$

$3g + 30f + 300e = 414$ $g + 10f + 100e = 138$

$0 \le g, f, e \le 9$, значит $\overline{efg} = 138$

Тогда $\overline{defg} = 1138$, а $\overline{cdefg} = 11138$

Тогда $\overline{ab}$ может принимать значение от 10 до 99, значит чисел с $c = 1$ существует 90 различных.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3 (продолжение)

2. Если $c = 0$, то

$$3g + 30f + 300e + 2000d = 12414$$

$3g+30f+300e$ и 12414 делятся на 3, значит $2000d$ делится на 3, тогда $d=0$ $d = 3$ или $d=6$ или $d=9$

$3g+30f+300e \leq 3\cdot 9 + 30\cdot 9 + 300\cdot 9 = 27+270+2700 = 2997$

Тогда $d=6$ или $d=9$, т.к. $6000+2997 = 8997 < 12414$

Если $d=6$

$3g+30f+300e = 414$ $\quad g + 10f + 100e = 138$

$\overline{efg} = 138$ $\quad \overline{defg} = 6138$ $\quad \overline{cdefg} = 6138$

$\overline{ab}$ принимает значение от 10 до 99, значит чисел с $c=0$ и $d=6$ существует 90 различных

Если $d=9$, то $3g+30f+300e = -5576$, чего не может быть, значит $d \neq 9$

Тогда всего чисел, удовлетворяющих условию 180.

Ответ: 180.

N 6

$$\frac{12x-14}{2x-3} \leq ax+b \leq 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2} \quad x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$$

1. Рассмотрим $f(x)=\dfrac{12x-14}{2x-3}$

$$f'(x)=\frac{12(2x-3)-2(12x-14)}{(2x-3)^2}=\frac{24x-36-24x+28}{(2x-3)^2}=$$

$$=\frac{-8}{(2x-3)^2}$$ ~~из н~~ $\cancel{f'(x)<0}$ $\forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ $f'(x)<0$

$\Downarrow$

$f(x)$ монотонно убывает на $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

и у $f(x)$ есть асимптота $x=\frac{3}{2}$.

Тогда максимальное значение $f(x)$ на $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ составляет

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-6-14}{-1-3}=\frac{20}{4}=5$$

2. Рассмотрим $g(x)=2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}$

$$g'(x)=\frac{-7-2x}{2\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}} \qquad g'(x)=0 \quad x=-3{,}5 \text{ – точка максимума}$$

$\forall x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ $g'(x)<0$, $\Rightarrow$ $g(x)$ монотонно убывает на ~~$x\in$~~ $\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Тогда максимальное значение $g(x)$ при $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ составляет

$$g\left(-\frac{1}{2}\right)=2+\sqrt{\frac{51}{4}+\frac{14}{4}-\frac{1}{4}}=2+\sqrt{\frac{64}{4}}=2+4=6$$

3. Теперь рассмотрим функцию $y=ax+b$ – это прямая ~~чтобы~~ при $x=-\frac{1}{2}$

$$5\leq -\frac{a}{2}+b\leq 6 \qquad \cancel{x\leq\frac{6-b}{a}}$$

$$\begin{cases} b\leq 6+\frac{a}{2} \\ 5+\frac{a}{2}\leq b \end{cases}$$

. Заметим, что $a<0$, т.к. обе ~~функ~~ функции монотонно убывают ~~при~~ $x\in\left[-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Рассмотрим все касательные к графику $f(x)$:

$$y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$$y = \frac{-8}{(2x_0-3)^2}(x-x_0) + \frac{12x_0-14}{2x_0-3}$$

Касательная не будет подходить как прямая $ax+b$ если ~~в точке~~ при $x = -\frac{1}{2}$ $y>6$ или $y<5$, то есть

$$5 \le \frac{-8}{(2x_0-3)^2}\left(-\frac{1}{2}-x_0\right) + \frac{12x_0-14}{2x_0-3} \le 6$$

$$5 \le \frac{8x_0+4}{(2x_0-3)^2} + \frac{12x_0-14}{2x_0-3} \le 6$$

$$\cancel{\frac{8x_0+4}{(2x_0-3)^2} + \frac{12x_0-14}{2x_0-3} \le 6} \qquad \cancel{\frac{(8x_0+4)(2x_0-3)+12x_0-14}{(2x_0-3)^2}}$$

$$5 \le \frac{8x_0+4+24x_0^2+36x_0-28x_0-42}{(2x_0+3)^2} \le 6$$

$$5 \le \frac{24x_0^2+16x_0-38}{(2x_0+3)^2} \le 6$$

$$24x_0^2+16x_0-38 \le 6(2x_0+3)^2$$

$$24x_0^2+16x_0-38 \le 6(4x_0^2+12x_0+9)$$

$$24x_0^2+16x_0-38 \le 24x_0^2+72x_0+54$$

$$56x_0 \ge -92$$

$$x_0 \ge -\frac{23}{14}$$

$$24x_0^2+16x_0-38 \geqslant (4x_0^2+12x_0+9)\cdot 5$$

$$24x_0^2+16x_0-38 \geqslant 20x_0^2+60x_0+45$$

$$4x_0^2-44x_0-83 \geqslant 0 \qquad D = 44^2+16\cdot 83 =$$

$$= 1936+1328 =$$

$$= 3264$$

$$x_0 \in \left[\frac{44-\sqrt{3264}}{8}; \frac{44+\sqrt{3264}}{8}\right]$$

$$\begin{cases} x_0 \geqslant -\frac{23}{14} \\ x_0 \in \left[\frac{44-\sqrt{3264}}{8}; \frac{44+\sqrt{3264}}{8}\right] \end{cases} \qquad x_0 \in \left[-\frac{23}{14}; \frac{44+\sqrt{3264}}{8}\right]$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N3.

$\overline{abcdefg}$

$x \quad \overline{g} + \overline{fg} + \overline{efg} = 12414$

$3g + 20f + 100e = 12414$

$3\cdot 9 + 20\cdot 9 + 100\cdot 9 = 900 + 180 + 27 = 1107$

$\overline{fg} + \overline{efg} + \overline{defg} = 12414$

$3g + 30f + 200e + 1000d = 12414$

$3\cdot 9 + 30\cdot 9 + 200\cdot 9 + 1000\cdot 9 = 12414$

$27 + 270 + 1800 + 9000 = 10800 + 297 = 11097$

$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12414$

$3g + 30f + 300e + 2000d + 10000c = 12414$

~~c=1~~

~~d=1~~

~~e=1~~

f

44×44: 176, 176, 1936

16×83: 48, 128, 1328

$1378 \times 9 = 12384$

43×32: 86, 129, 1376

$12414 = 3^2 \cdot 2^5 \cdot 43$

$1936 + 1328 = 3264$

58×58: 464, 290, 3364

~~1+2~~

$12414 : 3 = 4128$ (12, 04, 3, 11, 9, 24, 24, 0)

$4128 : 3 = 1376$ (3, 11, 9, 22, 21, 18, 18, 0)

$1376 : 2 = 688$ (12, 17, 16, 16, 16, 0)

$688 : 2 = 344$ (6, 8)

$344 : 2 = 172$ (2, 14, 14, 0)

$172 : 2 = 86$ (16, 12, 12, 0)

$86 : 2 = 43$

$x = \sqrt{\frac{27}{3}} + \frac{3}{2}$

-3

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\log_{2x^3} x^9 = \log_{2x^3} 8x^9 - \log_{2x^3} 8 = 3 - \log_{2x^3} 8$$

$$\log_{2x} x^{-3} = \log_{2x} \frac{1}{8x^3} + \log_{2x} 8 = -3 + \log_{2x} 8$$

$$\frac{1}{\log_{2x^3} 8} = \log_8 2x^3 =$$

$$= \log_8 2 + 3\log_8 x$$

$\cancel{-ax+b}$

$\dfrac{12x-14}{2x-3}$ $\cancel{-ax+b}$

$$\frac{1}{\log_{2x} 8} = \log_8 2 + \log_8 x$$

$$y = \frac{-8}{(2x_0-3)^2}(x-x_0) + \frac{12x_0-14}{2x_0-3}$$

$\cancel{\log_8 x =}$

$$5 \leq \frac{-8}{(2x_0-3)^2}\left(-\frac{1}{2}-x_0\right) + \frac{12x_0-14}{2x_0-3} \leq 6$$

$\cancel{\dfrac{1}{\log_{2x^3} 8} = \dfrac{1}{\log_{2x} 8} + 2\log_8 x}$

$$\log_{2x^3} x^9 = 3 - \frac{1}{\log_8 2 + 3\log_8 x}$$

$$\log_8 2 = \frac{1}{3}$$

$$5 \leq \frac{8x_0+4}{(2x_0-3)^2} + \frac{12x_0-14}{2x_0-3} \leq 6 \quad \log_{2x} \frac{1}{x^3} = -3 + \frac{1}{\log_8 2 + \log_8 x}$$

$$\sqrt{3 - \frac{1}{\frac{1}{3}+3t}} \leq -3 + \frac{1}{\frac{1}{3}+t}$$

$$\frac{3}{1+9t}$$

$$\frac{3}{1+3t}$$

$$\sqrt{3 - \frac{3}{1+9t}} \leq -3 + \frac{3}{1+3t}$$

56

$$\frac{3}{1+9t} \leq 3 \qquad 46 \qquad 3 - \frac{3}{1+9t} \leq 9 - \frac{18}{1+3t} + \frac{9}{1+6t+9t^2}$$

23

28 14

$$\frac{1}{1+9t} \leq 1$$

$$\frac{9t}{t+\frac{1}{9}} \geq 0 \qquad t \in \left(-\infty; -\frac{1}{9}\right) \cup [0; +\infty)$$

$$\frac{-7+1}{2\sqrt{\frac{64}{4}}} = \frac{-6}{8} =$$

$$= -\frac{3}{4} = -0{,}75$$

$$(2x_0+3)(12x_0-14) = 24x_0^2 + 36x_0 - 28x_0 - 42$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{\pi}{3} - 60^0$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x+y) = 5\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \\ \sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = 8\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) = \sin\frac{\pi}{3}\sin x - \cos\frac{\pi}{3}\cos x =$$

~~$\sqrt{3}\cos(x+y)$~~

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x$$

$$\mathrm{ctg}\,x + \mathrm{ctg}\,y = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos y}{\sin y} = \frac{\cos x \sin y + \cos y \sin x}{\sin x \cdot \sin y} =$$

$$= \frac{\sin(x+y)}{\sin x \cdot \sin y} = \frac{\sin(x+y)\cdot 2}{\cos(x-y) - \cos(x+y)} =$$

$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x \sin y$

$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$2\sin x \sin y = \cos(x-y) - \cos(x+y)$

$=$

$$\sin(x+2y) = \sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\sin y$$

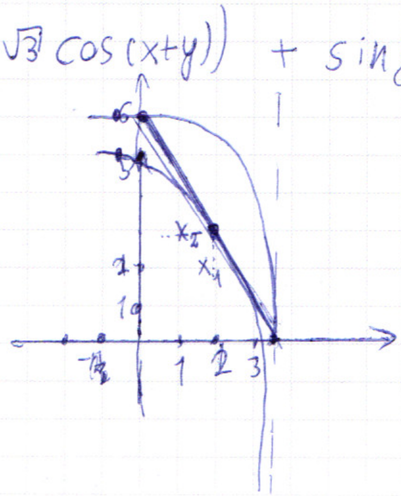
$$\cos(x+2y) = \cos(x+y)\cos y - \sin(x+y)\sin y$$

$$\sin(x+2y) + \sqrt{3}\cos(x+2y) = \sin(x+y)\cos y + \cos(x+y)\sin y +$$
$$+ \sqrt{3}\cos(x+y)\cos y - \sqrt{3}\sin(x+y)\sin y =$$

$$= \cos y\left(\sin(x+y) + \sqrt{3}\cos(x+y)\right) + \sin y\left(\cos(x+y) - \sqrt{3}\sin(x+y)\right) =$$

$=$

$$\frac{(4x_0+2)(2x_0-3) + 6x_0 - 7}{(2x_0-3)^2}$$



$6 = \frac{a}{2} + b$

$b = 6 + \frac{a}{2}$

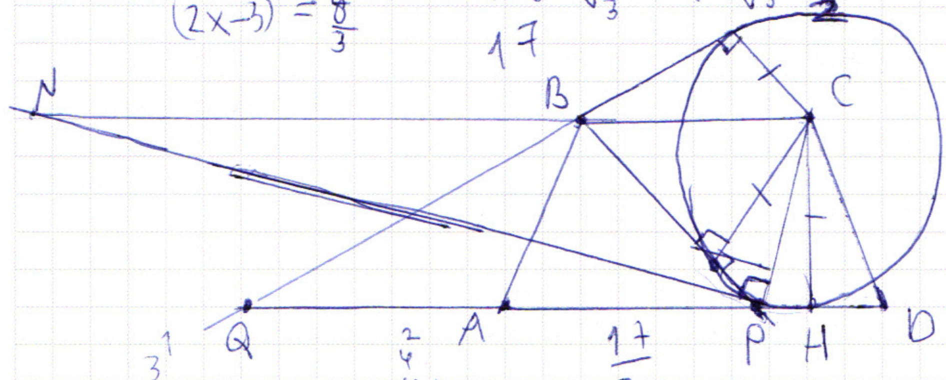
$f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 6 + \frac{4}{(2x_0-3)^2}$

$$\frac{8x_0+4}{(2x_0-3)^2} + \frac{12x_0-14}{2x_0-3} = 6$$

$$\frac{12x_0-14}{2x_0-3} + \frac{8x_0}{(2x_0-3)^2} = 6 - \frac{4}{(2x_0-3)^2}$$

$(2x-3)^2 = \frac{8}{3}$ $\quad 2x-3=\sqrt{\frac{8}{3}}$ $\quad x = \sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{3}{2}$

17



$-3 = \frac{-8}{(2x-3)^2}$ $\quad a=-3$

$12x^2 - 36 + 35 = 0$ $\quad -6=2a$

$6 = -\frac{a}{2}+b$

$0 = \frac{3a}{2}+b$

$\mathcal{D} =$ $\quad b = 6+\frac{3}{2} = 7,5$

$\frac{17}{2}$

$36 \times 36 = 216 + 108 = 1296$ $\quad 48 \times 35 = 240 + 144 = 1680$

$1296 = \cancel{-(x+}$

$\frac{51}{4} - 7x - x^2 = -(x^2+7x-\frac{49}{4}-\frac{1}{2}) =$

$f(x) = \frac{12x-14}{2x-3}$

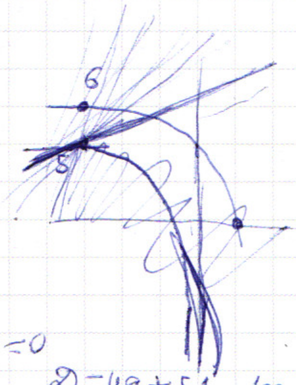
$1296 -$

$f'(-\frac{1}{2}) = \frac{-8}{16} = -\frac{1}{2}$

$f'(x) = \frac{12(2x-3)-2(12x-14)}{(2x-3)^2} =$

$= \frac{24x-36-24x+28}{(2x-3)^2} = \frac{-8}{(2x-3)^2}$

$\frac{-6-14}{-1-3} = \frac{-20}{-4} = 5$



$5 \geq \frac{12x-14}{2x-3}$

$a \leq 0$

$x^2+7x-\frac{51}{4}=0$

$\frac{-14}{-3} = \frac{14}{3} = 4+\frac{2}{3}$

$\mathcal{D} = 49+51 = 100$

$x_1 = \frac{-7+10}{2} = \frac{3}{2}$

$x_2 = \frac{-7-10}{2} = -8,5$

$\frac{12-14}{2-3} = \frac{-2}{-1} = 2$

$f(x)\ 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2} =$

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}} \cdot (-7-2x) =$

$2+\sqrt{\frac{51}{4}+\frac{7}{2}-\frac{1}{4}} =$

$= \frac{-7-2x}{2\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2}}$

$-7-2x=0$

$x = -3,5$

$f\ 2+\sqrt{\frac{50}{4}+\frac{14}{4}} =$

$= 2+\frac{8}{2} = 6$

$0 \leq 2+\sqrt{\frac{51}{4}-7x-x^2} \leq 6$

$y(x_0) = f'(x_0)\cdot x_0 + b$

$y = \frac{-8}{(2x_0-3)^2}(x-x_0) + \frac{12x_0-14}{2x_0-3}$ $\quad y = f'(x_0)\cdot x + f(x_0)$

$b = f(x_0) - f'(x_0)\cdot x_0$

$y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$27+270+2700$

$\overline{abcdefg}$

$\log_{2^2} 2^{-3} = -\frac{3}{2}$

$$\begin{array}{r} 18000 \\ -\ 12414 \\ \hline 5576 \end{array}$$

$\sqrt{\log_{2^4} 2^9} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$9990 + 1107 =$

$$\begin{array}{r} 9990 \\ +\ 1107 \\ \hline 11097 \end{array}$$

$414 : 3 = 138$

$\log_{2x} \frac{1}{x^3}$

$-3 \log_{2x} x < 0$

$\log_{2x} x > \log_{2x} 1$

$\cancel{x>1}$

$x > 1$

12414

$\frac{2}{2^3}$ 297

$\frac{1}{\sqrt{2}}$ $2^{-\frac{1}{2}}$

$$\begin{array}{r} \cancel{9991} \\ 12414 \\ -\ 18000 \\ \hline \cancel{414} \end{array}$$

$2 \cdot 2^{-\frac{3}{2}}$ $\log_{2 \cdot 2^{-\frac{3}{2}}} 2^{-\frac{9}{2}} =$

~~$-3 \cdot \log_2$~~

~~$= \frac{9}{2} \cdot \frac{2}{3} \log_2 2 = 3 \log$~~

$\log_{2 \cdot 2^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}} =$

$= \cancel{\log 2^{-9}} \; \frac{9}{2} \log_{2^{-\frac{1}{2}}} 2 =$

$= \frac{3}{2} \log_{2^{\frac{1}{2}}} 2 = 3$

$\frac{1}{4}$

$= 9 \log_2 2 =$

$\log_{2 \cdot \frac{1}{2^6}} 2^{-18} = \frac{-18}{-5} = \frac{18}{5}$

$\log_{2 \cdot 2^{-6}} \cdot 2^{-18} = \frac{18}{5}$

$\log_{2^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{2^{-\frac{3}{2}}} =$

$\log_{2 \cdot 2^{-2}} \frac{1}{2^{-6}} = \log_{2^{-1}} 2^6 = -6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \neq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ $\quad x \neq \frac{1}{2}$ $\quad \sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leq \log_{2x} \frac{1}{x^3}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$\cancel{x \neq 1}$ $\quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{4}$

$x > 0$

$\cancel{3+4+28+6} =$ $\quad \sqrt{\frac{1}{\log_2 x^9 + 3}} \leq \log_2 \frac{1}{x^3}$ $\quad \frac{1}{\log_2 \frac{1}{x^3} + 3}$

$\cancel{= 33}$

$x = 1$ подходит

$\sqrt{\frac{1}{9t+3}} \leq \frac{1}{-3t-3}$ $\quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

$9t+3 > 0$

$t > -\frac{1}{3}$ $\quad \cancel{\frac{1}{81t^2}}$ $\quad \frac{1}{9t+3} \leq \frac{1}{9t^2+18t+9}$ $\quad \frac{1}{2} < 8$

$\frac{1}{x^2} \leq 2 \leq x$ $\quad x \geq 2$ $\quad \frac{9t^2+18t+9}{9t+3} \leq 1$ $\quad \frac{9t^2+18t+9-9t-3}{9t+3} \leq 0$

$\frac{1}{x^2} \leq 2$

$-2 \leq \log_x 2 \leq 1$ $\quad \frac{1-x^2}{x^2} \leq$ $\quad \frac{9t^2+9t+6}{9t+3} \leq 0$ $\quad \frac{3t^2+3t+2}{3t+1} \leq 0$

$\cancel{D = 9-24}$

$t > -3$

$-2 \leq \frac{1}{\log_2 x} \leq 1$ $\quad \sqrt{\frac{1}{\log_x 2x^3}} \leq \frac{1}{\log_{\frac{1}{x^3}} 2x}$

$\sqrt{\frac{9}{t+3}} \leq \frac{-3}{t+1}$

$\log_x 2 \leq \log_x 0$

$x < 1$ $\quad \frac{9}{t+3} \leq \frac{9}{(t+1)^2}$

$\sqrt{9 \log_{2x^3} x} \leq 3 \log_{2x} x$

$\frac{t^2+2t+1-t-3}{t+3} \leq 0$

$\log_x x < \log_x 2$

$\sqrt{\frac{9}{\log_x 2 + 3}} \leq \frac{-3}{\log_x 2 + 1}$

$t_2 = \frac{-1-3}{2} = \frac{-4}{2} = -2$ $\quad \frac{t^2+t-2}{t+3} \leq 0$

$t_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$ $\quad D = 1+8 = 9$

$+ \quad - \quad +$

$-3 \quad -2 \quad 1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$t^3+6^3 \cdot 2t+6^3 \cdot 32 = (t+12)\cdot(t^2-12t+576)$

$\times \begin{array}{r} 16 \\ 36 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$

$t^2-12t+576=0$

$D=144-576\cdot 4$

$t^2(t+12)-12t(t+12)+576(t+12)$

$t^3+12t^2-12t^2-144t+$

$+2^4\cdot 6^2\cdot t+6^3\cdot 2^5$

$t=-12$

$8y-x=-216$

$8y+x=32+2t$

$32-24=$

$=8$

$8y-x=-216$

$8y+x=8$

$576-12=$

$=564$

$564 \mid 216$

$-208 \mid 16$

$16 \quad 13$

-48

48

0

$16y=-208$

$y=-13$

80

$x=8y+216=216-104=112$

$x=112$

$y=-13$

$-104-112=-216$

$2^4\cdot 6^2\cdot t-2^2\cdot 6^2 t=$

$=2^2 6^2 t(4-1)=$

~~64·169~~

N2.

$\sqrt{\log_{2x^3} x^9} \leq \log_{2x}\frac{1}{x^3}$

$\log_2 3^2=2\log_2 3$

$\cancel{\log_{2x^3} x^9 \leq \left(\log_{2x}\frac{1}{x^3}\right)^2}$

$\sqrt{3\log_{2x} x} \leq$

$\sqrt{3\log_{2x} x} \leq -3\log_{2x} x$

$\log_{2x^3} x^9=$

$=\log_{2x^3} 8x^9-$

$-\log_{2x^3} 8$

$=3-\log_{2x^3} 8$

$\begin{cases} \cancel{t\geq 0} \\ \cancel{t\leq t^2} \end{cases}$

$t=3\log_{2x} x$

$\sqrt{t}\leq -t$

$t\geq 0$, если $t>0$, то

$-t<\sqrt{t}$

Значит $t=0$

$3\log_{2x} x=0$

$\log_{2x} x=0$

$x=1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = 124 \\ 8y - \sqrt[3]{64y^2 - x^2} = -92 \end{cases}$$

$t = -6\sqrt[3]{32+2t}$

$t = -12$

$\cancel{64y^2 - x^2 =}$

Замена: $t = \sqrt[3]{64y^2 - x^2}$

$t^3 = 64y^2 - x^2 = (8y - x)(8y + x)$

$x - t = 124$

$8y - t = -92$

$8y - \cancel{t} - x + t = -92 - 124$

$8y - x = -216$

$8y + t + x - t = 32$

$8y + x = 32 + 2t$

21

$36 \times 6 = 216$

$\cancel{t(t^2 +}$

$t^3 = -216(32 + 2t) = -6^3 \cdot 32 - 6^3 \cdot 2t$

$t^3 + 6^3 \cdot 2t + 6^3 \cdot 32 = 0$

$\cancel{t = -4}$

$\cancel{-32 \cdot 2 - 6^3 \cdot 8 + 6^3 \cdot 32 = 0}$

$= 32(6^3 - 2) - 6^3 \cdot 8 =$

$\cancel{= 8(4 \cdot 6^3 - 8 - 6^3) = 8(3 \cdot 6^3}$

$\cancel{t(t^2 + 2 \cdot 6^3 + 6^6 - 6^6) + 6^3 \cdot 32 = 0}$

$\cancel{t(t + 6^3)^2 - 6^6 t + 6^3 \cdot 32 = 0}$

$\left(\frac{t}{6}\right)^3 + 2t + 32 = 0$

$\cancel{-1 \quad -12}$

$t = -12$

$t =$

$\cancel{\frac{12}{6}}$ $\cancel{-8 - 24} + 32 = 0$

$-32 + 32 = 0$

$12 \cdot 16 \cdot 6^2 = 6^3 \cdot 32$

$12 \cdot 12 =$

$= 6 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 2 =$

$= 6^2 \cdot 4$

$$\begin{array}{l|l} t^3 + 6^3 \cdot 2t + 6^3 \cdot 32 = 0 & t + 12 \\ \hline t^3 + 12t^2 & t^2 - 12t + 16 \cdot 6^2 \\ \quad 6^3 \cdot 2t - 12t^2 & \\ \quad -12t^2 + 6^3 \cdot 2t & \\ \quad -12t^2 - 6^2 \cdot 4t & \\ \quad 16 \cdot 6^2 t + 6^3 \cdot 32 & \\ \quad 16 \cdot 6^2 t + 6^3 \cdot 32 & \\ \quad 0 & \end{array}$$

$6^3 \cdot 2t + 6^2 \cdot 4t =$

$= 2 \cdot 6^2(6 + 2) = 8$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)