МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

Все возм. знач. $tg\alpha$ - ?
их не менее трёх

$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot 2\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\sin(2\beta)$ *

$\cos^2 2\beta = \frac{16}{17}$

$\sin^2 2\beta = \frac{1}{17}$

$\sin 2\beta = \cancel{\frac{4}{\sqrt{17}}} \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} \pm \cos(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}\left(4\sin(2\alpha)\pm\cos(2\alpha)\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin(2\alpha)\pm\cos(2\alpha) = -1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} 4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1 \\ 4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \\ 8\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{|l} :\cos^2\alpha \\ :\cos^2\alpha \end{array}$$

Мы можем делить на $\cos^2\alpha$, поскольку $tg\,\alpha$ определён, значит $\cos\alpha \neq 0$

$$\left[\begin{array}{l} 8\,tg\alpha + 2 = 0 \\ 8\,tg\alpha + 2\,tg^2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{1}{4} \\ \cancel{4tg\alpha}\ tg\alpha(4 + tg\alpha) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{1}{4} \\ tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -4 \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\alpha = -\frac{1}{4}$

$tg\alpha = 0$

$tg\alpha = -4$

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

Пусть $t = x^2+6x$

$$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$$

ОДЗ: $x^2+6x > 0$

$t > 0$

$|t| = t$

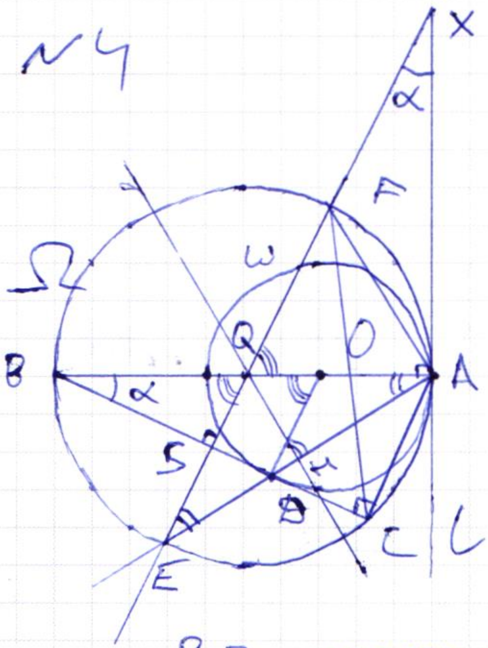
$$3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 4}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Дано: Ω, ω

AB - диаметр Ω

$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$

R_Ω - ? r_ω - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

R_Ω - радиус Ω; r_ω - радиус ω

~~[illegible]~~ $L \perp AB$

$A \in L$

$L \cap EF = X$; $AB \cap EF = Q$

Пусть $\angle AXE = \alpha$

$\angle ABC = \alpha$ ($\angle XQA = \angle BQE = 90° - \alpha$)

Пусть O - центр ω

$OD \perp BC$

$\angle BOD = 90° - \alpha$

$\angle AOD = 90° + \alpha$

$\angle OAD = \angle ODA = \frac{90° - \alpha}{2}$

~~[illegible]~~ $OD \parallel QE$

$\triangle AOD \sim \triangle AQE$

$\triangle AQE$ - р/б

Проведём $QH \perp AE$

$\begin{cases} AH = HE \text{ (из того, что } \triangle AQE \text{ - р/б)} \\ QH \perp AE \end{cases}$

$\Downarrow$

QH - диаметр Ω

$Q = AB \cap QH$

Q - центр Ω

FE - диаметр

$\angle\alpha = \dfrac{\overset{\frown}{AE} - \overset{\frown}{AF}}{2} = \dfrac{2\angle AFE - 2\angle AEF}{2} =$

$= \angle AFE - \angle AEF$

$\angle AFE = \angle\alpha + \angle AEF = \alpha + \dfrac{90-\alpha}{2} = \dfrac{90+\alpha}{2}$

$\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AO}{AQ} = \dfrac{r_\omega}{R_\Omega}$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$

~~Проведём AC~~ $\angle ACB$ опирается на диаметр AB

$\angle ACB = 90°$

$AC \parallel OD \parallel QE$

$\dfrac{OD}{BD} = \dfrac{AC}{BC}$

$BC = \dfrac{5+13}{2} = \dfrac{18}{2} = 9$

$BC \cap FE = S$

$BS = 4,5$

$SD = \dfrac{13}{2} - \dfrac{9}{2} = \dfrac{4}{2} = 2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} BS(1+tg^2\alpha) = BD^2 \\ BD^2 + OD^2 = (AB - OA)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} BS\left(1+\frac{r_\omega^2}{BD^2}\right) = R_\Omega^2 \\ BD^2 = (2R_\Omega - r_\omega)^2 - r_\omega^2 \end{cases}$$

$$BD^2 = 4R_\Omega^2 - 4R_\Omega r_\omega + r_\omega^2 - r_\omega^2$$

$$BD^2 = 4R_\Omega(R_\Omega - r_\omega)$$

$$\begin{cases} \frac{9}{2} + \frac{9\cdot 2\cdot 2}{2\cdot 13\cdot 13} r_\omega^2 = R_\Omega^2 & \Big| \cdot (13)^2 : 2 \\ \frac{13\cdot 13}{2\cdot 2} = 4R_\Omega(R_\Omega - r_\omega) & \Big| \cdot 9 \end{cases}$$

$$AD \cdot DE = BD \cdot DC$$

$$AD \cdot (AE - AD) = BD \cdot DC$$

$$\begin{cases} \frac{(13)^2\cdot 9}{4} + 9r_\omega^2 = \frac{13^2}{2}R_\Omega^2 \\ \frac{13^2\cdot 9}{4} = 4R_\Omega^2 - 4R_\Omega r_\omega \end{cases} \quad -$$

$$9r_\omega^2 = \frac{13^2}{2}R_\Omega^2 - 4R_\Omega^2 + 4R_\Omega r_\omega$$

$$\left(\frac{169-8}{2}\right)R_\Omega^2 + 4R_\Omega r_\omega - 9r_\omega^2 = 0 \quad \Big| : r_\omega^2$$

Пусть $\frac{R_\Omega}{r_\omega} = t$

$\frac{161}{2}t^2+4t-9=0$

$D=16+\frac{4\cdot 9\cdot 161}{2}=16+2\cdot 9\cdot 161=$

$\frac{DE}{AD}=\frac{SD}{DC}=\frac{2\cdot 2}{5}=\frac{4}{5}$

$DE\cdot AD=\cancel{\frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2}}A\ BD\ DC=\frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2}=\frac{65}{4}$

$\frac{DE}{AD}\cdot DE\cdot AD=\frac{4}{5}\cdot\frac{65}{4}=13$

$DE^2=13$

$DE=\sqrt{13}$

$AD=\frac{65}{4\cdot\sqrt{13}}=\frac{5\sqrt{13}}{4}$

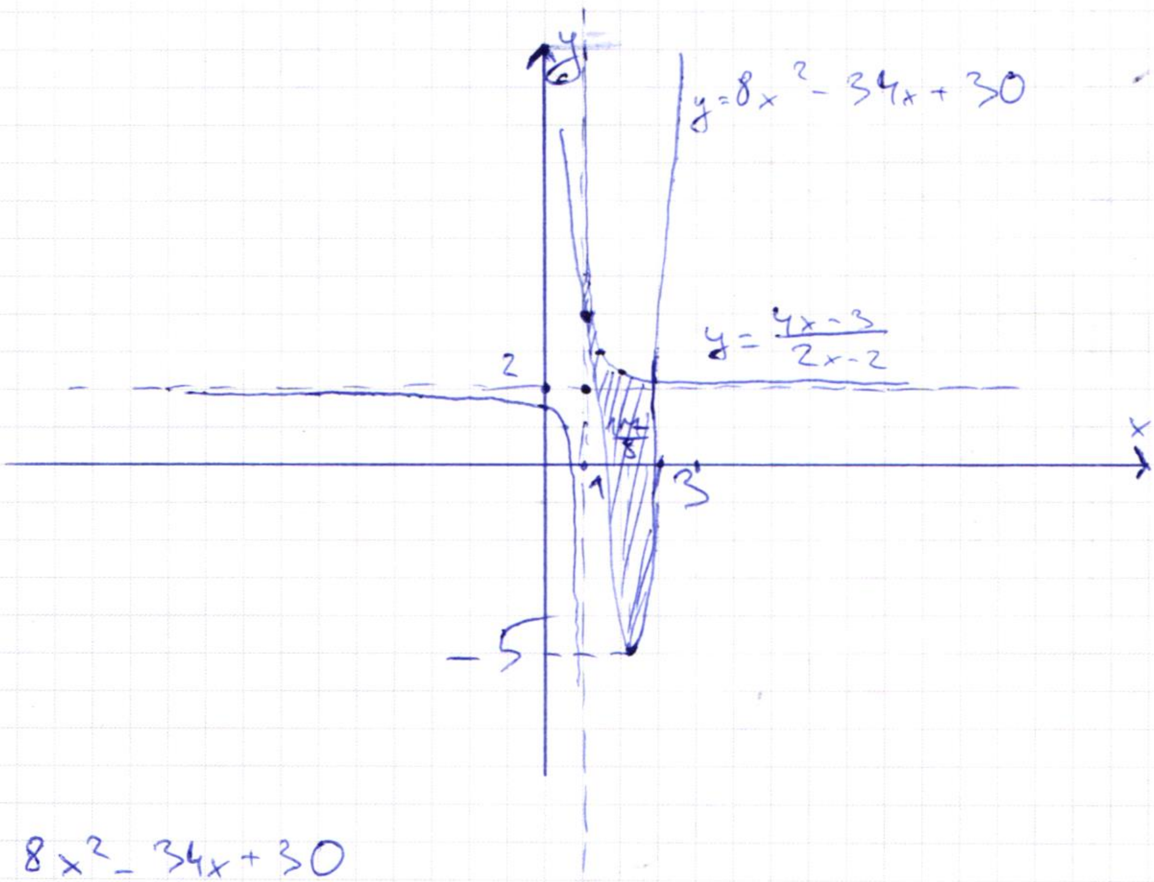
$\frac{R\Omega}{r\omega}=\frac{AE}{AD}=\frac{SC}{CD}=\cancel{\frac{4,5}{5,5}=\frac{9}{11}}\ \frac{4,5}{2,5}=\frac{9}{5}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{2x-1{,}5}{x-1} = \frac{2x-2}{x-1} + \frac{0{,}5}{x-1} = 2 + \frac{0{,}5}{x-1}$$



$$y = 8x^2 - 34x + 30$$

$$x_в = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$$

$$y_в = y(x_в) = \frac{8\cdot 17^2}{8^2} - \frac{34\cdot 17}{8} + 30 = \frac{17^2}{8} - \frac{2\cdot 17^2}{8} + 30 =$$

$$= -\frac{289}{8} + \frac{240}{8} = \cancel{\frac{867+240}{8}} = \cancel{\frac{1007}{8}} = \cancel{125{,}8750}$$

$$= -\frac{40}{8} = -5$$

$$\cancel{\lim_{x\to 1 \text{ справа}} \frac{4x-3}{2x-2} = \infty}$$

~~Возьмём значение x = 2~~

~~$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$~~

~~$g(x) = 8x^2 - 34x + 30$~~

~~$f(x) \geq ax + b \geq g(x)$~~

~~$f(2) = \frac{2\cdot 4-3}{2\cdot 2-2} = \frac{5}{2} = 2{,}5$~~

~~$g(x=2) = 8\cdot 4 - 34\cdot 2 + 30 = 32 - 68 + 30 = $~~

$$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$$

$$g(x) = 8x^2 - 34x + 30$$

$$g(1) = 8 - 34 + 30 = 4$$

$$g(3) = 8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 = 0$$

$A(1; g(1))$

$B(3; g(3))$

Найдём ур-е прямой, содержащей AB

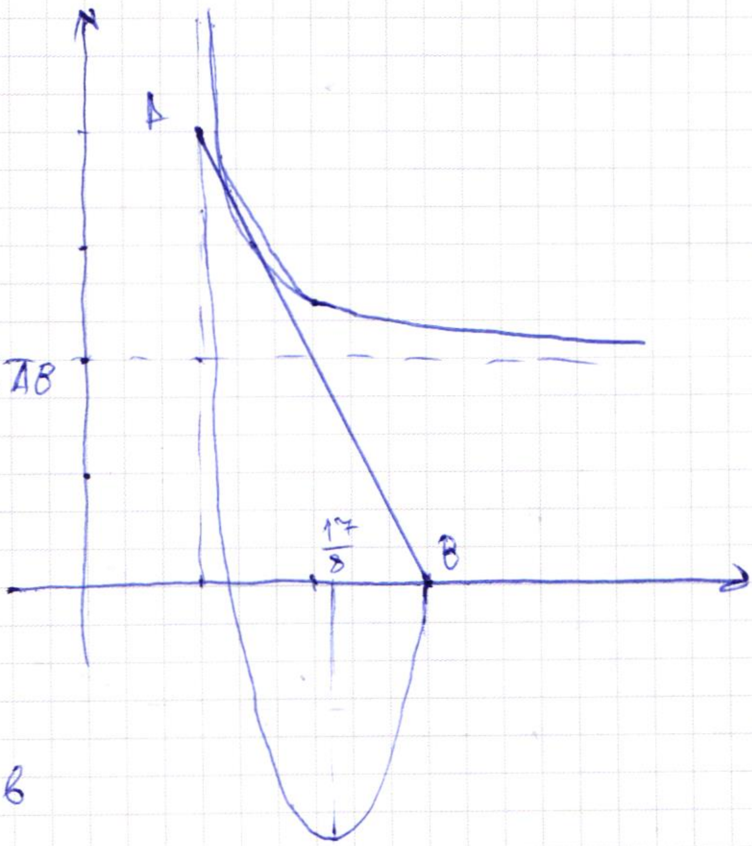
$A(1; 4)$

$B(3; 0)$

~~$y = kx$~~

$y = ax + b$

$$\begin{cases} 4 = a + b \\ 0 = 3a + b \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-4 = 2a$

$a = -2$

$y = -2x + b$

$b = 6$

$y = -2x + 6$

~~Пров Таким св-вами дол~~

$L(x) = ax + b$

$\begin{cases} L(1) \geq 4 \\ L(3) \geq 0 \end{cases}$ – таким св-вом должна обладать ф-я, чтобы она была больше g на всех x $(1; 3]$

~~Найдём точку~~

$\frac{4x-3}{2x-2} - ax - b \geq 0$

$\frac{4x-3-(ax+b)(2x-2)}{2x-2} \geq 0$

$\frac{-2ax^2+4x-2bx+2ax+2b-3}{2x-2} \geq 0$

$\left(\frac{-2ax^2+2(a-b+2)x+2b-3}{2x-2}\right) \geq 0$

выражение 1

Проверим значение выражения при значениях $a = -2$; $b = 6$

$$\frac{4x^2 + \cancel{2a}\; 2\cdot(-6)x + 12\cancel{ab} - 3}{2x-2} = \frac{4x^2 - 12x + 9}{2x-2} =$$

$$= \frac{(2x-3)^2}{2x-2} \geq 0$$

~~Ку бези~~ Это значит, Дискриминант выражения 1 равен 0

График $y = -2x+6$ касается графика $y = \frac{4x-3}{2x-2}$ снизу

При этом график $y = -2x+6$ касается графика $y = 8x^2 - 34x + 30$ на $(1; 3]$ сверху

Делаем вывод, это единственные значения a и b, при которых неравенство выполняется на $(1; 3]$ при всех x

Ответ: $(-2; 6)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$3(x^2-2x+1)-3+3\left(y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}\right)-\frac{4}{3}=4$$

$$3(x-1)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=7\frac{1}{3}$$

$$3(x-1)^2+3\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{3}$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

График второго ур- окружность с центром $O\left(1;\frac{2}{3}\right)$ и радиусом $\frac{5}{3}$

$$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$$

$$3y-2-2x+2=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}$$

$$(3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$$

$3y-2=t$

$x-1=u$

ОДЗ: $t-2u\geq 0$

$$t-2u=\sqrt{tu}$$

$$t^2-4ut+4u^2=tu$$

$$t^2-5ut+4u^2=0$$

рассмотрим выр. как кв. ур-е от t

$t^2 - 5ut + 4u^2 = 0$

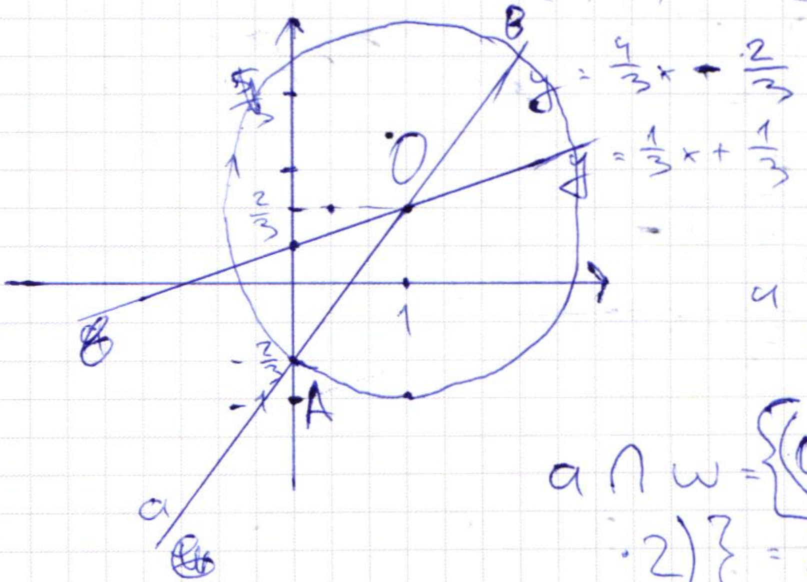
~~$t_1 + t_2 = -5t$~~ $D = 25u^2 - 16u^2 = 9u^2$

$t = \frac{5u \pm 3u}{2}$

$\left[\begin{array}{l} t_1 = 4u \\ t_2 = u \end{array}\right.$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3y - 2 = 4x - 4 \\ 3y - 2 = x - 1 \end{array}\right. \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \end{cases}$

$\begin{array}{l} a \\ b \\ \omega \end{array} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3} \end{array}\right. \\ (x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \end{cases}$



и $O = a \cap b$

O - центр ω

$a \cap \omega = \left\{ \overset{A}{\left(0; -\frac{2}{3}\right)}; \overset{B}{\left(1-0\right) \cdot 2; \frac{f(1) - f(0)}{1} \cdot 2\right)} \right\} = \left\{ \overset{A}{\left(0; -\frac{2}{3}\right)}; \overset{B}{(2; 2)} \right\}$

$AO = OB \Rightarrow \vec{AB} = 2\vec{AO}$

$b \cap \omega$

$(x-1)^2 + \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

$(x-1)^2 + \frac{1}{9}(x-1)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 12
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(x-1)^2\left(1+\frac{1}{9}\right)=\frac{25}{9}$$

$$(x-1)^2\,\frac{10}{9}=\frac{25}{9}$$

$$(x-1)^2=2{,}5$$

$$x-1=\pm\sqrt{2{,}5}$$

$$x=1\pm\sqrt{2{,}5}$$

$$x_1=1+\sqrt{2{,}5}$$

$$x_2=1-\sqrt{2{,}5}$$

$$y_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2{,}5}}{3}+\frac{1}{3}=\frac{\sqrt{2{,}5}+2}{3}$$

$$y_2=\frac{2-\sqrt{2{,}5}}{3}$$

Ответ: $\left(0;-\frac{2}{3}\right)$; $(2;2)$; $\left(1+\sqrt{2{,}5};\frac{\sqrt{2{,}5}+2}{3}\right)$; $\left(1-\sqrt{2{,}5};\frac{2-\sqrt{2{,}5}}{3}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\cancel{+\frac{1}{\sqrt{17}}}$ $\cos(2\beta) = +\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad$ $\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2$ $\quad$ $\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4}{2x-2} + \frac{1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$\sin 30^\circ + \sin 60^\circ = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} =$ $\quad$ $4x$

$= 2 \cdot \cos 45^\circ \cdot \cos 15^\circ$

$\sin 45^\circ + \sin 45^\circ =$ $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

$2 \cdot \overset{\sin}{\cancel{\cos}} 45^\circ \cdot \cos 0^\circ = \sqrt{2}$

$\sin 90^\circ + \sin 0^\circ = 2 \cdot \overset{\sin}{\cancel{\cos}} 45^\circ \cdot \cos 45^\circ =$

$= 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1$

cos полуразности

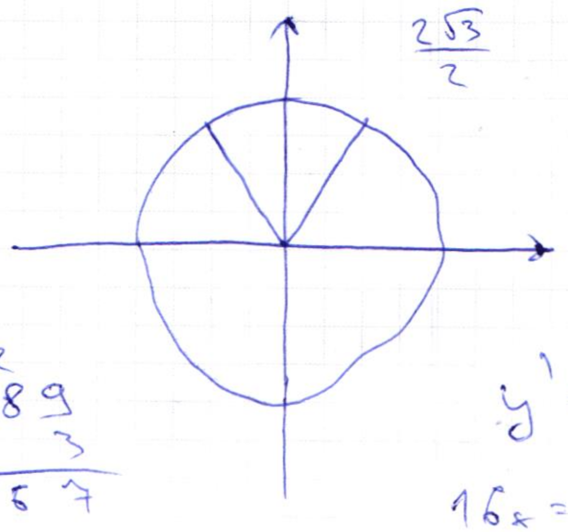
$\sin 60^\circ + \sin 120^\circ = 2 \cdot \cos 90^\circ \cdot \cos 30^\circ =$ полусуммы

$= 2 \cdot 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ sin cos

$\frac{2\sqrt{3}}{2}$

$2 \cdot \sin 90 \cdot \cos 30^\circ =$

$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $17^2 =$



$\sin 2\alpha$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ \hline 119 \\ +\ 17 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 289 \\ \times\ 3 \\ \hline 867 \end{array}$$

$y' = 16x - 34$

$16x = 34$

$x = \frac{34}{16}$

☑ черновик ☐ чистовик

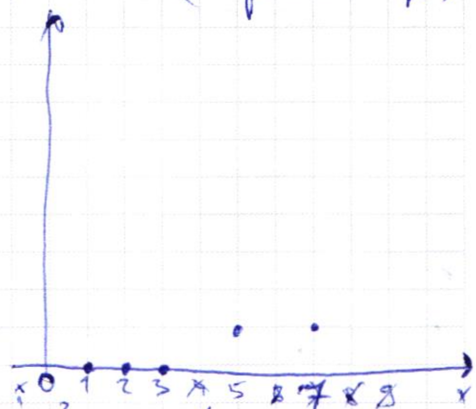
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = 2\sin\alpha\cos\alpha\cdot(\cos^2\beta - \sin^2\beta) +$

$+ (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot 2\sin\beta\cos\beta$



$\cos^2 2\beta = \frac{16}{17}$

$\alpha \quad \sin^2 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -1$

$2\cos^2\alpha - 1$

$4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad \Big| : \cos^2\alpha$

$8\,tg\,\alpha + 2 = 0$

$4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1$

$4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \quad \Big| : \cos^2\alpha$

$8\,tg\alpha - 2 + 2tg^2\alpha + 2 = 0$

$4\sin(2\alpha) \pm \cos(2\alpha) = -1$

$8\,tg\alpha + 2 = 0$

$f(p^2) = f(p) + f(p) =$

$f(3) = \frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$

$tg\alpha = -\frac{2}{8}$

$= 2[p/4]$

для любого простого p

$8\,tg\alpha + 2tg^2\alpha = 0$

$g(3) =$

$8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 = 72 - 102 + 10 = 0$

$2tg\alpha(4 + tg\alpha) = 0$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$4 + tg\alpha = 0$

$tg\alpha = -4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

1 ✓

$3^{\log_4 x + \log_4 x+6} + 6x \geq |x|^{\log_4 5} |x+6|^{\log_4 5} - x^2$

2 ✓

3 ?

$3^{\log_4 x} \cdot 3^{\log_4 x+6} + x(x+6) \geq$

4 ?

$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 4} = t^{\log_4 4}(t^{\log_4 5 - \log_4 4} - 1) =$

5 ×

$= t^{\log_4 4}(t^{\log_4(\frac{5}{4})} - 1) = t$

6 ✓

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

7 ×

$3y - 2x = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)}$

$3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3y - 2x > 0$

$\cancel{(3y)^2}$ $9y^2 - 12xy + 4x^2 =$

$3y^2 - 4y =$

$= 3(y^2 - \frac{4}{3}y) =$

$3(y^2 - 2\cdot\frac{2}{3}y) =$

$= 3(y^2 - 2\cdot\frac{2}{3}y + \frac{4}{9}) - \frac{4}{3}$

$\cancel{3x^2}$ $(\sqrt{3}x)^2 - 2(\sqrt{3}x)\cdot\sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 -$

$3x^2 - 6x + 3 - 3 + 3y^2 - 4y = 4$

$3(x-1)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - 2\cdot(\sqrt{3}y)\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\cdot 3}{3\cdot 3} = 7 + \frac{4}{3}$

$3(x-1)^2 + 3(y - \frac{2}{3})^2 = 7 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

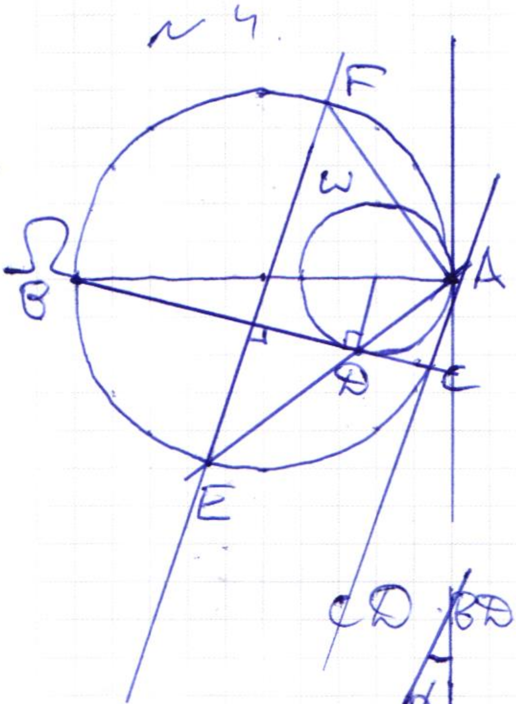
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}=\left(\frac{5}{3}\right)^2$$

ур-е - окружность

№4.



$CD=\frac{5}{2}$

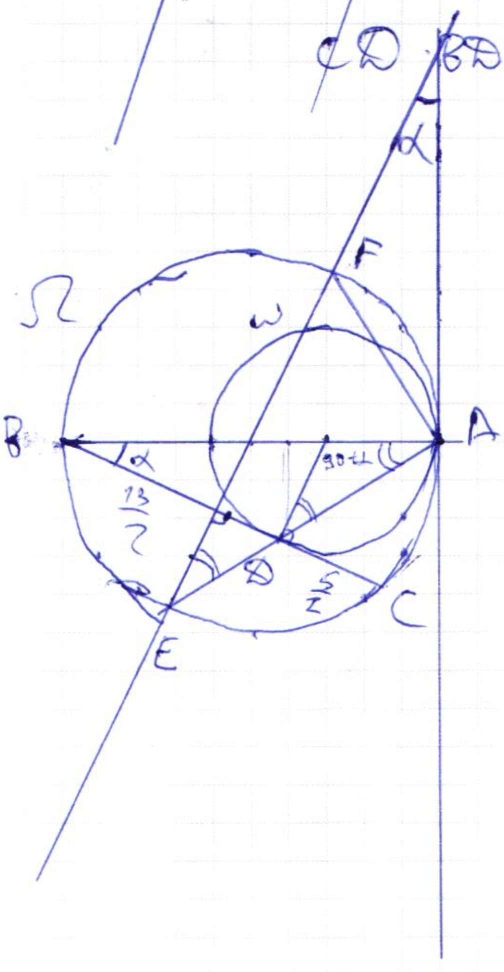
$BD=\frac{13}{2}$

$R_\Omega,\ r_\omega-?$ 58

$\angle AFE-?$

$S\ AEF-?$

$CD\cdot BD=AD\cdot DE$



$$\begin{array}{r} 52 \\ \times\ 52 \\ \hline 104 \\ +\ 260\ \ \\ \hline 2604 \end{array}$$

$180-90-\alpha \quad \frac{90-\alpha}{2}=\beta$

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{AE}-\overset{\frown}{AF}}{2}=\frac{2\angle AFE-2\beta}{2}$$

$2\cdot 9\cdot 161$

$$\begin{array}{r} 161 \\ \times\ 18 \\ \hline 1288 \\ +\ 161\ \ \\ \hline 2898 \\ +\ 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2898 \\ +\ 16 \\ \hline 2914 \end{array}$$

1457