МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1 задача

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \qquad tg\,\alpha - ? \ (\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n\in\mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi n \quad (1) \\ 2\beta = -\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi k \quad (2) \end{array}\right. \quad n,k\in\mathbb{Z}.$$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha+\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+2\pi n) =$

$= \sin(2\alpha+\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$

$2\alpha+\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} = (-1)^n\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}})+\pi n, n\in\mathbb{Z}.$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}})+2\pi n \quad (1.) \\ 2\alpha = -\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\pi-\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}})+2\pi k \quad (2.) \end{array}\right. \quad n,k\in\mathbb{Z}.$$

1. $tg\,\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} \left(= \frac{2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right).$

$\cos 2\alpha = \cos(-\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}})) =$

$= \cos(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})) =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}})$

($\cos(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) = A$

$\gamma = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}.$ $\gamma\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}) \Rightarrow \cos\gamma > 0$

$\sin\gamma = \frac{1}{\sqrt{17}}.$ $A = \cos\gamma = \pm\sqrt{1-\sin^2\gamma} = +\sqrt{1-\sin^2\gamma} =$

$= \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$)

$(\sin(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) = B.$

$\gamma = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \gamma \in (0;\pi) \Rightarrow \sin\gamma > 0$

$\cos\gamma = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad A = \sin\gamma = +\sqrt{1-\cos^2\gamma} = \sqrt{1-\frac{16}{17}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}$)

$\Rightarrow \cos 2L = \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{16}{17} - \frac{1}{17} = \frac{15}{17}.$

$\sin 2L = \sin(-\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) =$

$= -\sin(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) =$

$= -\sin(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) \cdot \cos(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) -$

$- \sin(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) \cdot \cos(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) =$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}.$

$tg\, L = \frac{1-\cos 2L}{\sin 2L} = \frac{1-\frac{15}{17}}{-\frac{8}{17}} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}.$

2. $2L = \pi - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}}) + 2\pi k =$

$\sin 2L = \sin(\pi - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})) =$

$= \sin(\pi - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) \cdot \cos(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) + \cos(\pi - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) \cdot$

$\cdot \sin(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) = \sin(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} =$

$= \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 0.$

$tg\, L = \frac{1-\cos 2L}{\sin 2L}$ $\quad \sin 2L = 0$. Т.е. тангенс не определён.

2) $\sin(2L + 2\beta) = \sin(2L - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi k) =$

$= \sin(2L - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2L - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} = (-1)^n \cdot \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

$\left[\begin{array}{l} 2L = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + 2\pi n \quad (1.) \\ 2L = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi - \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + 2\pi k \quad (2.) \end{array}\right.$ $n, k \in \mathbb{Z}.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\cos 2h = \cos\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) =$

$= \cos\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) + \sin\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cdot$

$\cdot\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} =$

$= \frac{16}{17} + \frac{1}{17} = \frac{17}{17} = 1.$

$\operatorname{tg} h = \frac{1-\cos 2h}{\sin 2h} = \frac{1-1}{\sin 2h} = \underline{0}.$

2. $\cos 2h = \cos\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) =$

$= \cos\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos\left(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) -$

$- \sin\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cdot\sin\left(\pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\left(-\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right)\right) + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) =$

$= -\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{16}{17} + \frac{1}{17} = \underline{-\frac{15}{17}}.$

~~Таким образом tg h ∈ {~~

$\sin 2h = \sin\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) =$

$= \sin\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos\left(\pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) +$

$+ \sin\left(\pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos\left(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right) =$

$= \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\left(-\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) - \sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} =$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}$

$\operatorname{tg} h = \frac{1-\cos 2h}{\sin 2h} = \frac{1+\frac{15}{17}}{-\frac{8}{17}} = -\frac{32}{8} = \underline{-4}.$

Таким образом $\operatorname{tg} h = \left\{-4; -\frac{1}{4}; 0\right\}$.

Ответ: $-4; -\frac{1}{4}; 0$.

2 задача.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2-2x+2=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3(x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)^2-3-\frac{4}{3}=4 \end{cases}$$

Пусть $u=3y-2$, а $v=x-1$.

$$\begin{cases} u-2v=\sqrt{uv} \\ 3v^2+\frac{1}{3}u^2-\frac{13}{3}=4 \quad | \cdot 3 \end{cases} \qquad (ООЗ: uv \geq 0)$$

$$\begin{cases} u-2v=\sqrt{uv} \quad (1) \\ 9v^2+u^2-13=12 \end{cases}$$

(1) $u-2v=\sqrt{uv}$

$$\begin{cases} u-2v \geq 0 \\ uv=u^2-4uv+4v^2 \end{cases} \quad (\text{Выполняется ООЗ})$$

$$\begin{cases} u \geq 2v \\ u^2-5uv+4v^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \geq 2v \\ (u-4v)(u-v)=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u \geq 2v \\ u=v \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} u \geq 2v \\ u=4v \end{cases} \quad (3) \end{array} \right.$$

(2)
$$\begin{cases} u \geq 2v \\ u=v \\ 9v^2+u^2-25=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} v \leq 0 \\ 9v^2+v^2-25=0 \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} v \le 0 \\ 2v^2 - 5 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v \le 0 \\ v^2 = \frac{5}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} v \le 0 \\ \left[\begin{array}{l} v = \sqrt{\frac{5}{2}} \\ v = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right. \end{cases}$

$v = -\sqrt{\frac{5}{2}} = u.$

$\begin{cases} x-1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 3y-2 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = \frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3} \end{cases}$ $\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right)$ – корень

③ $\begin{cases} u \ge 2v \\ u = 4v \\ 9v^2 + u^2 - 25 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} v \ge 0 \\ 9v^2 + 16v^2 - 25 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} v \ge 0 \\ v^2 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} v \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} v = 1 \\ v = -1 \end{array}\right. \end{cases}$ $v = 1 \Rightarrow u = 4.$

$\begin{cases} x-1 = 1 \\ 3y-2 = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ $(2;2)$ – корен

Ответ: $(2;2)$ и $\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}}; \frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right)$.

3 задача

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$\left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right.$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$$

$\cancel{(x^2+6x)^{\log_4 3}+x^2+6x}$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}-5^{\log_4(x^2+6x)} \geq 0$$

Решим с помощью метода интервалов.

$f(x)=3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}-5^{\log_4(x^2+6x)}$

$D(f)$: $\left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right.$ $\quad f(x)\geq 0$.

$f(x)=0$, когда:

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}=5^{\log_4(x^2+6x)}$

Т.е. когда $\log_4(x^2+6x)=2$ (из теоремы Пифагора)

$x^2+6x=16$

$x^2+6x-16=0$

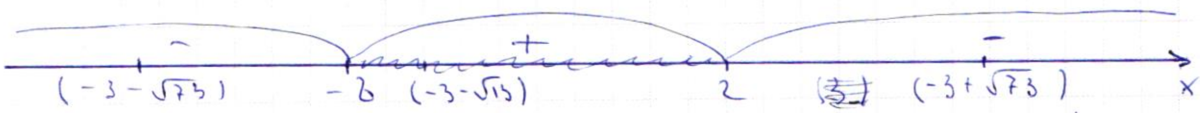
$(x+8)(x-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=-8 \end{array}\right.$ – проходит по $D(f)$.

$(-3+\sqrt{73})^2+6(-3+\sqrt{73})=9+73-6\sqrt{73}+6\sqrt{73}-18=64$

$(-3-\sqrt{73})^2+6(-3-\sqrt{73})=9+73+6\sqrt{73}-6\sqrt{73}-18=64$

$(-3-\sqrt{13})^2+6(-3-\sqrt{13})=9+13+6\sqrt{13}-18-6\sqrt{13}=4$



$\cancel{f(3)=3^{\log_4 27}+27-5^{\log_4 27}=27^{\log_4 3}-27^{\log_4 5}+27}$

$f(-3+\sqrt{73})=3^{\log_4 64}+4^{\log_4 64}-5^{\log_4 64}=27+64-125<0$

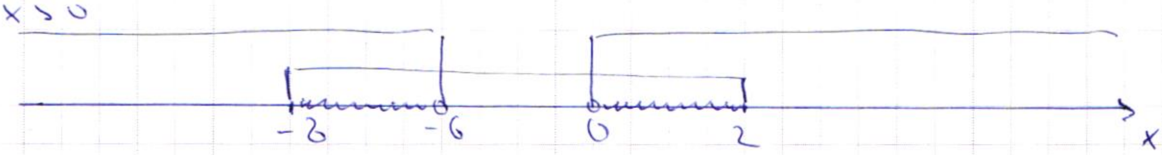
$f(-3-\sqrt{73})=3^{\log_4 64}+4^{\log_4 64}-5^{\log_4 64}<0$

$f(-3-\sqrt{13})=3^{\log_4 4}+4^{\log_4 4}-5^{\log_4 4}=3+4-5>0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

С учётом ОДЗ:

$$\begin{cases} -8 \le x \le 2 \\ \left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

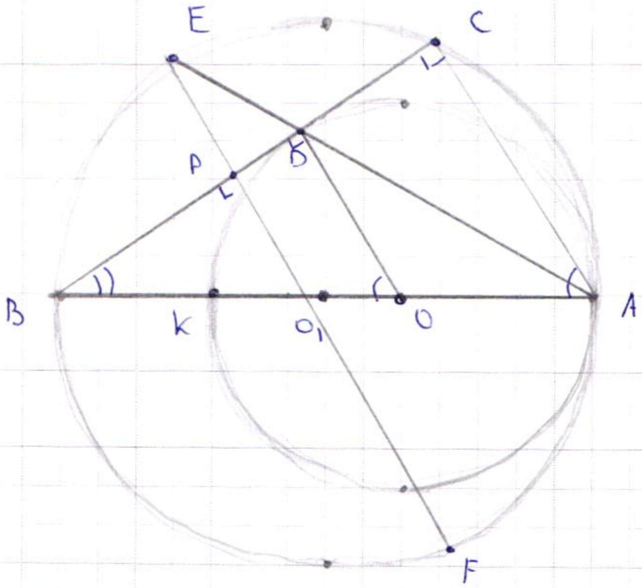


$x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$.

Ответ: $[-8; -6) \cup (0; 2]$.

4 задача

Дано:
Ω и ω касаются в A.
AB - диаметр Ω
BC - хорда Ω кас. ω в D
$AD \cap \Omega = E$
$EF \perp BC$; $EF \cap \Omega = F$
Найти:
$R; r$ - ?
$\angle AFE$ - ?
S_{AEF} - ?
$(CD = \frac{5}{2}; BD = \frac{13}{2})$



1) $\Omega\ (O_1; R)$; $\omega\ (O; r)$.

2) По теореме об отрезке касательной: (Для ω) $BD^2 = BK \cdot BA$.

$BK = AB - KA = 2R - 2r$.

$BA = 2R$

$\Rightarrow \frac{169}{4} = (2R - 2r)2R$. ($\angle ACB = 90°$, т.к. $C \in \Omega$, а AB - диаметр)

3) $\triangle DBO \sim \triangle CBA$ по 2-ём углам. ($DO \parallel CA$, т.к. равны соответствующ. углы)

$\Rightarrow \frac{CB}{DB} = \frac{AB}{OB} \rightarrow \frac{\frac{13}{2} + \frac{5}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{2R}{2R - r} = \frac{18}{13}$.

$$\begin{cases} \dfrac{169}{4} = (2R-2r)2R \\ 26R = 36R - 18r \Rightarrow 10R = 18r \quad R = \dfrac{18}{10}r \end{cases}$$

$$\frac{169}{4} = \left(\frac{18}{5}r - 2r\right)\frac{18}{5}r = \frac{8}{5}r \cdot \frac{18}{5}r$$

$$r^2 = \frac{169 \cdot 25}{8 \cdot 8 \cdot 9} \to r = \frac{13 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \underline{\frac{65}{24}}.$$

$$R = \frac{18}{10} \cdot \frac{65}{24} = \frac{3 \cdot 13}{2 \cdot 4} = \underline{\frac{39}{8}}.$$

4) Тогда $AB = 2R = \frac{39}{4}$.

По т. Пифагора для $\triangle ABC$:

$$AC^2 = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{\frac{39^2}{16} - 81} = \sqrt{\frac{225}{16}}$$

5) По т. Пифагора для $\triangle ACD$:

$$AD^2 = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{325}{16}} = \left(\frac{5\sqrt{13}}{4}\right)^2$$

$$AD = \frac{5\sqrt{13}}{4}.$$

6) BC и AE — хорды Ω, $BC \cap AE = D$.

Тогда по свойству пересекающихся хорд окр-и:

$$ED \cdot DA = BD \cdot DC. \Rightarrow ED = \frac{BD \cdot DC}{DA} = \frac{\frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \frac{13}{\sqrt{13}} =$$

$$= \sqrt{13} \Rightarrow AE = ED + DA = \sqrt{13} + \frac{5\sqrt{13}}{4} =$$

$$= \frac{9\sqrt{13}}{4}.$$

7) $\triangle AFE$ вписан в Ω. Тогда, по теореме синусов:

$$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R. \quad \underline{\sin\angle AFE} = \frac{AE}{2R} = \frac{\frac{9\sqrt{13}}{4}}{\frac{39}{4}} = \frac{9\sqrt{13}}{39} =$$

$$= \underline{\frac{3\sqrt{13}}{13}} \qquad \angle AFE = \arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

8) $CA \parallel EF$ (т.к. $\angle ACP = \angle EPC$, внутр. накр. лежащие)

$\Rightarrow \angle CAD = \angle PED$, как внутренние накрест лежащие

Из прямоугольного $\triangle ACD$:

$$\sin\angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5\sqrt{13}}{4}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

$$\angle CAD = \arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13} = \angle AEF.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

9) Аналогично пункту 7):

$\frac{AF}{\sin\angle AEF} = 2R$

$\cancel{\sin\angle AEF = \frac{AF}{2R}} \Rightarrow AF = 2R\cdot\sin\angle AEF = \frac{15}{4}\cdot\frac{2\sqrt{13}}{13} =$

$= \frac{3\sqrt{13}}{2}$.

10) По теореме о сумме углов $\triangle$:

$\angle AEF + \angle EAF + \angle EFA = 180^\circ$

$\angle EAF = 180^\circ - \arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13} - \arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13}$

$\sin\angle EAF = \sin(180^\circ - \arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13} - \arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13}) =$

$= \sin(\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13} + \arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13}) =$

$= \sin(\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13})\cdot\cos(\arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13}) + \sin(\arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13})\cdot$

$\cdot\cos(\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13})$ $=$

$($ $\cos(\arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13}) = A$

$\alpha = \arcsin\frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\quad \alpha\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2})$, $\cos\alpha>0$

$\sin\alpha = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ $\quad \cos\alpha = +\sqrt{1-\frac{4}{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$\cos(\arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}) = B$

$\beta = \arcsin\frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\quad (\beta\in(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}); \cos\beta>0$

$\sin\beta = \frac{3\sqrt{13}}{13}$ $\quad \cos\beta\ \sqrt{1-\frac{9}{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13})$

$=$ $\frac{3\sqrt{13}}{13}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{13} + \frac{2\sqrt{13}}{13}\cdot\frac{2\sqrt{13}}{13} = 1$.

$\sin\angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$.

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\sin\angle EAF\cdot EA\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot\frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{2} = \frac{27\cdot 13}{16} =$

$= \frac{351}{16}$.

Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$.

$\angle AFE = \arcsin \frac{3\sqrt{13}}{13}$

$S_{AEF} = \frac{351}{16}$

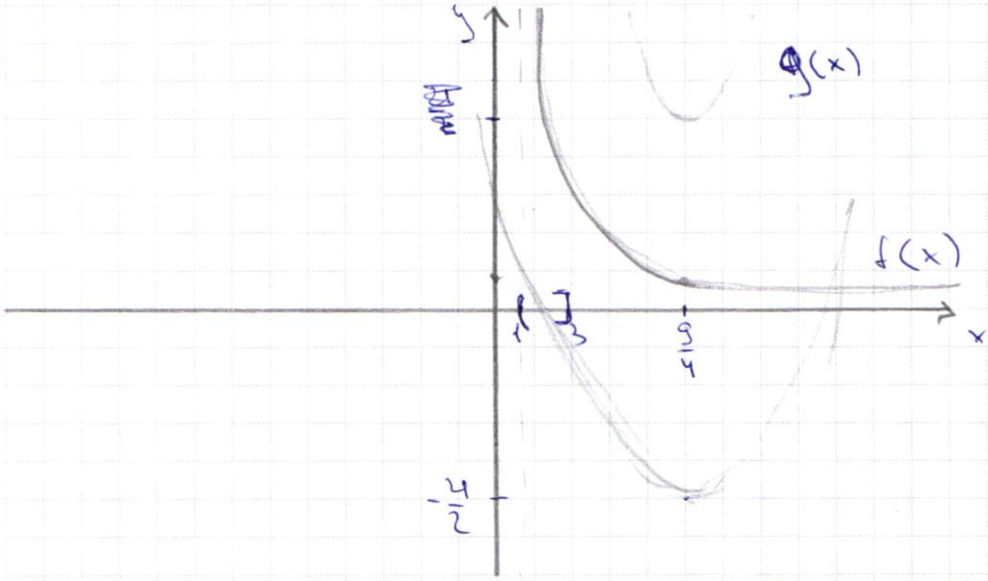
6

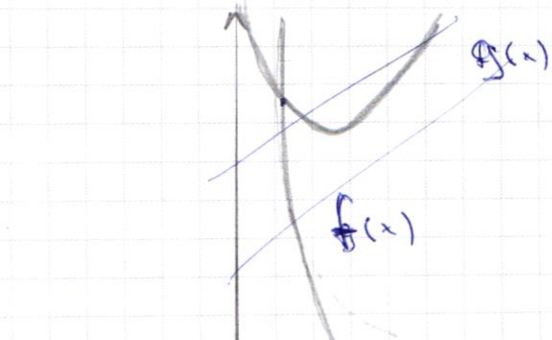
$$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2}.$$

$D(f): x \neq 1$

$$g(x) = 8x^2 - 34x + 30 = \left(2\sqrt{2}x - \frac{9\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \frac{21}{2} =$$

$$= 8\left(x - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{21}{2}.$$





Таким образом условие выполняется только до пересечения графиков f(x) и g(x).

Они пересекаются в ~~x → 1, т. е. в точке.~~

~~$(1; g(1)) \to (1; 4)$~~

$4x - 3 = 16x^3 - 78x^2 + 60x -$

$-16x^2 + 68x - 60.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0$. $x(x+6)>0$

$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + x^2 + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$(x^2+6x)(x^2+6x^{\log_4 3 - 1} + 1 - (x^2+6x)^{\log_4 5 - 1}) \geq 0$

$t = x^2+6x$

$9 + 12 \geq (25) - 4$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}(t^0 - t^{\log_4 \frac{5}{3}}) + t \geq 0$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$\log_4 t = 2$ $\qquad$ ~~$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$~~

~~$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$~~

16 3

4 12

2 24

$\log_4 t = 2 \Rightarrow t = 16$

$x^2+6x-16=0$

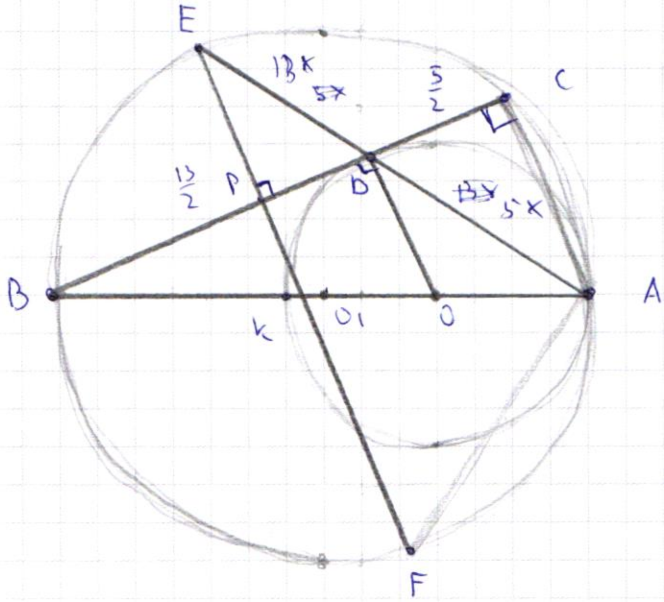
~~$D = 36 + 192 = 228$~~

~~$x = \frac{-6 \pm 2\sqrt{57}}{6} = -1 \pm \frac{\sqrt{57}}{3}$~~

$(x+8)(x-2)=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$BK = 2R - 2r$.

$$\begin{cases} \frac{13^2}{2^2} = (2R-2r)\cdot 2R \\ (2R-r)^2 = \frac{13^2}{2^2} + r^2 \end{cases}$$

$\frac{169}{4} = 4R^2 - 4Rr$

$4R^2 + r^2 - 4Rr = \frac{169}{4} + r^2$

$\frac{9}{\frac{13}{2}} = \frac{2R}{2R-r}$ $\quad \frac{18}{13} = \frac{2R}{2R-r}$. $\quad 36R - 18r = 26R$.

$10R = 18r$

$R = \frac{18}{10} r$.

$\frac{169}{4} = \left(\frac{18}{5} r - 2r\right) \cdot \frac{18}{5} r$

$\frac{169}{4} = \frac{8}{5} r \cdot \frac{18}{5} r$.

$r^2 \cdot \frac{8 \cdot 18}{25} = \frac{169}{4}$ $\quad r^2 = \frac{169 \cdot 25}{4 \cdot 8 \cdot 18} = \frac{169 \cdot 25}{8^2 \cdot 3^2}$

$r = \frac{13 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \frac{65}{24}$ $\quad R = \frac{18}{10} \cdot \frac{65}{24} = \frac{3 \cdot 65}{10 \cdot 4} = \frac{39}{8}$

$\times$ 81
16
486
$+$ 81
1296.

$\times$ 39
39
351
$+$ 117
1521
$-$ 1296
225

$\times$ 27
13
81
27
351

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2L+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2L+4\beta) + \sin 2L = -\frac{8}{17} \end{cases} \qquad tg\,L - ?$$

$x^4+6x-64=0$

$D = 36+256 = 292$

$\Downarrow$

$2\sin(2L+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \qquad 2\beta = \pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi n$

$x = \frac{-6\pm 2\sqrt{73}}{2} = -3\pm\sqrt{73}$

$\sin 2L\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2L = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2L\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2L\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2L + \cos 2L = -1$

$\cancel{8\sin L\cos L + 1 - 2\sin^2 L = -1}$

$x^2+6x-4=0$

$D = 36+16=52$

$x = \frac{-6\pm 2\sqrt{13}}{2} = -3\pm\sqrt{13}$

$\sin(2L+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2L+\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \cancel{2\pi n}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2L + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} = (-1)^n\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + \pi n$

2) $\sin(2L - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2L - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} = (-1)^n\cdot\arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + \pi n$

$$\left[\begin{aligned} &2L = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + 2\pi n \\ &2L = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi - \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + 2\pi k \end{aligned}\right.$$

$tg\,L = \frac{1-\cos 2L}{\sin 2L} = \frac{2\sin^2 L}{2\sin L\cdot\cos L} = tg\,L$

$1-\cos 2L = 1-\cos(\arccos(\frac{4}{\sqrt{17}}) + \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}})) =$

$=$

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3xy-2x-3y+2 = x(3y-2)-1(3y-2) =$

$= (\underbrace{x-1}_{v})(\underbrace{3y-2}_{u})$

$u-2v = 3y-2-2x+2$

$3x^2-6x+3y^2-4y=4$

$3x^2-6x+3$

$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2-3-\frac{4}{3}=4.$

$3(x-1)^2+\frac{1}{3}(3y-2)^2-3-\frac{4}{3}=4$

$u=3y-2 \quad v=x-1.$

$$\begin{cases} u-2v = \sqrt{uv} \\ 3v^2+\frac{1}{3}u^2-\frac{13}{4}=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u-2v = \sqrt{uv} \\ 36v^2+4u^2-39=48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u-2v = \sqrt{uv} \quad (1) \\ 36v^2+4u^2=87 \end{cases}$$

(1) $$\begin{cases} u-2v \geq 0 \\ uv = u^2+4v^2-4uv \end{cases}$$

$$\begin{cases} u \geq 2v \\ u^2-5uv+4v^2=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (u-4v)(u-v)=0 \\ u \geq 2v \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u \geq 2v \\ u=4v \end{cases} \\ \begin{cases} u \geq 2v \\ u=v \end{cases} \end{array}\right.$$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq 8x+6$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq 8x^2-34x+3$

$36 = 2\cdot 2\sqrt{3}\cdot 6$