МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg^2\alpha + 4tg\alpha - 1 = -1 - tg^2\alpha$

$2tg^2\alpha + 4tg\alpha = 0$

$2tg\alpha(tg\alpha + 2) = 0$

$\boxed{\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.}$ – Мы получили при значения $tg\alpha$, если подставлять функции угла 2β; β или 4β в выражение $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$, мы получим эти же значения.

Ответ: $tg\alpha = 0$; $tg\alpha = -2$; $tg\alpha = -\frac{1}{2}$.

№2.

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} & (1) \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 & (2) \end{cases}$

$(2): x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 - 9 - 4 = 12$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$(1): \; x - 2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)}$

$-2(y-1) + x - 2 = \sqrt{(y-1)(x-2)}$

Замена: $y - 1 = b$; $x - 2 = a$

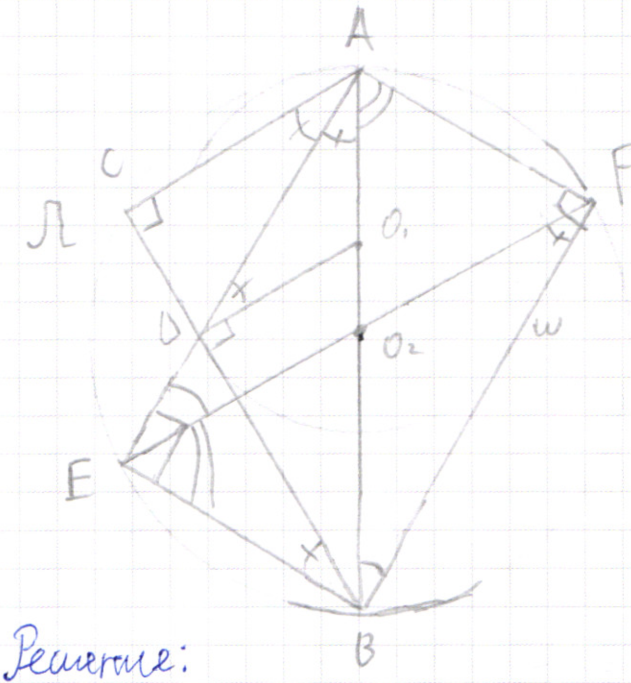
$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \; (3) \end{cases}$

$\begin{cases} a^2 - 4ba + 4b^2 = ab \\ a - 2b \geq 0 \; (4) \\ a^2 + 9b^2 = 25 \Rightarrow a^2 + 4b^2 = 25 - 5b^2 \end{cases}$

$25 - 5b^2 - 4ba - ba = 0$

$25 - 5b^2 - 5ba = 0 \; |:5 \Rightarrow -b^2 - ba + 5 = 0$

№4.



Дано:

Окружность Ω с радиусом R и центром в точке O_2

Окружность ω с радиусом r и центром в точке O_1.

AB-диаметр Ω, BC-хорда Ω

BC касается ω в точке D

$AD \cap \Omega = E$; $EF \perp BC$; $F \in \Omega$

$CD = 8$; $BD = 17$

r-? R-? $\angle AFE$-? $S_{\triangle AEF}$-?

Решение:

Проведём O_1D; $O_1D \perp BC$, так как это радиус, провед. к касательной

$90^\circ = \angle ACB = \angle AFB$, так как они опир. на диаметр AB., $\angle AEB$ опирается на диаметр AB, он равен 90°.

$\angle ABF$ опирается на $\smile AF$ и $\angle AEF$ опир. на $\smile AF \Rightarrow$ они равны

$\angle BAF$ опирается на $\smile BF$ и $\angle BEF$ опир. на $\smile BF \Rightarrow$ они равны.

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ (по общему углу и и углу равному 90°)

$\Rightarrow \frac{AC}{O_1D} = \frac{BC}{BD}$; $\frac{AC}{r} = \frac{CD+BD}{BD} = \frac{25}{17} \Rightarrow AC = \frac{25}{17} \cdot r$; $AB = 2R$;

$O_1B = 2R - r$, по теореме Пифагора-для $\triangle ACB$ и $\triangle BDO_1$ соответств.

$$\begin{cases} AC^2 + BC^2 = AB^2 \\ DO_1^2 + BD^2 = BO_1^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{25}{17}\right)^2 \cdot r^2 + 25^2 = 4R^2 \, \Big| \cdot \left(\frac{17}{25}\right)^2 \Rightarrow r^2 + 17^2 = \left(\frac{17}{25}\right)^2 \cdot 4R^2 \\ r^2 + 17^2 = (2R - r)^2 \end{cases}$$

$r^2 + 17^2 = (2R-r)^2 = \left(\frac{17}{25}\right)^2 \cdot 4R^2 \Rightarrow \frac{17}{25} \cdot 2R = 2R - r \Rightarrow r = \frac{8}{25} R \cdot 2$

$r = \frac{16}{25} R \Rightarrow \frac{16^2}{\cancel{25^2}} \cdot \frac{\cancel{25^2}}{17^2} \cdot R^2 + 25^2 = 4R^2 \Rightarrow 25^2 = R^2\left(4 - \frac{16^2}{17^2}\right)$

$25^2 = R^2 \cdot \frac{900}{289} \Rightarrow R = \frac{17}{30} \cdot 25 = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$; $r = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{136}{15}$

$\boxed{R = \frac{85}{6}}$; $\boxed{r = \frac{136}{15}}$

$\angle AFE = \angle EBA$ (они опираются на дугу AE)

$\triangle AEB$ - ~~равноб~~ прямоугольный $\Rightarrow tg \angle EBA = ctg \angle EAB$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\triangle CAB$: $\frac{CA}{BA} = \frac{CD}{DB} = \frac{8}{17} = \frac{\cancel{25r}\cdot 16}{17\cdot 2\cdot \cancel{25r}} = \frac{8}{17} \Rightarrow DA$ - биссектриса $\angle CAB$

$\angle CAD = \angle DAB$; $ctg\angle EAB = ctg\angle CAD = \frac{AC}{CD} = \frac{25\cdot r}{17\cdot 8} = \frac{136\cdot 25}{15\cdot 17\cdot 8} = \frac{5}{3}$

$ctg\angle EAB = tg\angle EBA = \frac{5}{3} \Rightarrow \boxed{\angle EBA = \angle AFE = arcctg\left(\frac{5}{3}\right)}$

DA - биссектриса $\triangle CAB \Rightarrow DA = \sqrt{AC\cdot AB - CD\cdot DB} = \sqrt{\frac{25}{17}r\cdot\frac{25r}{8} - 8\cdot 17} =$

$= \sqrt{\frac{136\cdot 25}{9} - \frac{8\cdot 17\cdot 9}{9}} = \sqrt{\frac{136}{9}\cdot 16} = \frac{4}{3}\cdot 2\sqrt{34} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

CB и AE - хорды $\Rightarrow AD\cdot DE = CD\cdot DB \Rightarrow \frac{8}{3}\sqrt{34}\cdot DE = 8\cdot 17 \Rightarrow DE = \frac{3\cdot 17}{\sqrt{34}}$

$DE = \frac{3\sqrt{34}}{2}$; $AE = ED + DA = \sqrt{34}\left(\frac{8}{3}+\frac{3}{2}\right) = \frac{25}{6}\sqrt{34}$

$\triangle AEB$ - прямоугольный $\Rightarrow$ по теореме Пифагора:

$AE^2 + EB^2 = AB^2 \Rightarrow \frac{25^2}{6^2}\cdot 34 + EB^2 = \frac{85^2}{9} \Rightarrow EB^2 = \frac{425}{2} \Rightarrow EB = 5\sqrt{\frac{17}{2}}$

$S_{\triangle AEB} = \frac{AE\cdot EB}{2} = \frac{5\sqrt{\frac{17}{2}}\cdot 25\sqrt{34}}{6\cdot 2} = \frac{125\cdot 17}{12} = \frac{2125}{12}$

Пусть $EF \cap AB = N$, тогда $EN\cdot NF = AN\cdot NB \Rightarrow$

$S_{\triangle ENB} = \frac{EN\cdot NB}{2}\sin\alpha$ $\quad S_{\triangle ANF} = \frac{AN\cdot NF\sin\alpha}{2}$

$S_{\triangle AEB} = S_{\triangle AEF} = \frac{2125}{2}$

Ответ: $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{85}{6}$; $\angle AFE = arcctg\left(\frac{5}{3}\right)$; $S_{\triangle AEF} = \frac{2125}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

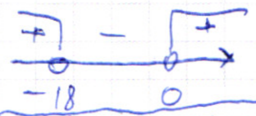
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$



ОДЗ: $\boxed{x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)} \Rightarrow |x^2+18x|=x^2+18x$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

$x^2+18x=t,\ t>0$

$$5^{\log_{12}t}+t-t^{\log_{12}13}\geq 0$$

$$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12}-t^{\log_{12}13}\geq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

все значения $tg\alpha$ — ? $tg\alpha$ определён и имеет не меньше трёх значений.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = \sin2\alpha\cdot\cos4\beta +$
$+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha + \sin2\alpha = \sin2\alpha(\cos4\beta+1)+$
$+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha = \sin2\alpha(2\cos^2 2\beta-1+1)+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha=$
$=2\cos^2 2\beta\cdot\sin2\alpha+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha = 2\cos2\beta(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+$
$+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha) = 2\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}\cdot2\cos2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos^2 2\beta+\sin^2 2\beta = 1 \Rightarrow \sin^2 2\beta = 1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}\Rightarrow \sin2\beta = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha$

1) $\sin2\beta>0$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}\ \Big|\cdot\sqrt5$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha-\sin^2\alpha = -1$

$\cos^2\alpha(1-tg^2\alpha+4tg\alpha) = -1$; $\quad 1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1-tg^2\alpha+4tg\alpha = -1-tg^2\alpha$

$4tg\alpha = -2$

$\boxed{tg\alpha = -\frac{1}{2}}$

2) $\sin2\beta<0$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha - \frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}\ \Big|\cdot\sqrt5$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - (\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -1$

$\cos^2\alpha(4tg\alpha-1+tg^2\alpha) = -1$

$-b^2 - ba + 5 = 0$ Пусть $b = 0 \Rightarrow 5 = 0$ – невозможно $\Rightarrow b \neq 0$

$a = \frac{5 - b^2}{b}$ – подставляем в равенство (3)

$\frac{(5-b^2)^2}{b^2} + 9b^2 = 25 \quad | \cdot b^2$

$25 - 10b^2 + b^4 + 9b^4 = 25b^2$

$10b^4 - 35b^2 + 25 = 0$

$b^2 = z,\ z > 0$

$10z^2 - 35z + 25 = 0$

$D = 1225 - 1000 = 225$

$z_{12} = \frac{35 \pm 15}{20}$; $z_1 = 1 \quad z_2 = 2{,}5$

$\left[\begin{array}{l} b^2 = 1 \\ b^2 = 2{,}5 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = 1 \Rightarrow a = 4 \\ b = -1 \Rightarrow a = -4 \\ b = 5 \cdot \sqrt{0{,}1} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ b = -5 \cdot \sqrt{0{,}1} \Rightarrow a = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$ пары $(a; b)$: $(4; 1); (-4; -1); \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; 5\sqrt{\frac{1}{10}}\right); \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; -5\sqrt{\frac{1}{10}}\right)$

проверяем полученные пары $(a; b)$ по неравенству (4).

$4 - 2 \geq 0$ – верно $\Rightarrow \boxed{(4; 1)}$ – подходит.

$-4 + 2 \geq 0$ – ложно $\Rightarrow (-4; -1)$ – не подходит.

$\frac{\sqrt{10}}{2} - 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} \geq 0$
$-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 0$ – ложно $\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{5}{\sqrt{10}}\right)$ – не подходит.

$-\frac{\sqrt{10}}{2} + 2 \cdot \frac{5}{\sqrt{10}} \geq 0$
$\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 0$ – верно $\Rightarrow \boxed{\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}$ – подходит

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 2 = 4 \\ y - 1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y - 1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1 - \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\{6; 2\}$; $\left\{2 - \frac{\sqrt{10}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad 2+2^{\log_{12}5} =$ $\quad tg\alpha - ?$

все, их немеренно много

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad 1+tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha(tg 2\alpha + tg 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1) + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2^{\log_{12}5} + 2^{\log_{12}2}$

$2\cos^2 2\beta\cdot\sin 2\alpha + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha$

$2\cos^2 2\beta\cdot\sin 2\alpha + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$2\cos 2\beta(\cos 2\beta\cdot\sin 2\alpha + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = 2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{4}{5}$ $\quad \frac{5}{3} = \frac{EA}{EB} = \frac{AC}{CD}$

$2\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt5}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}}$ $\quad \boxed{\cos 4\beta = 2\cdot\frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}}$

$\frac{4}{5} + \sin^2 2\beta = 1$

$\boxed{\sin^2 2\beta = \frac{1}{5}}$ $\quad \boxed{\sin^2 4\beta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}}$

~~$\sin 2\alpha =$~~ $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\left(\pm\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\boxed{+}$ $\quad \cancel{\frac{1}{\sqrt5}}(\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin^2\alpha) = -\cancel{\frac{1}{\sqrt5}}$

~~$\cos^2\alpha$~~ $= \cos^2\alpha(1+4tg\alpha - tg^2\alpha) = -1$

$1 + 4tg\alpha - \cancel{tg^2\alpha} = -1 - \cancel{tg^2\alpha}$ $\quad tg\alpha = -\frac{1}{2}$

$2)\boxed{=}\quad 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cdot\cos\alpha=-1$

$\cos^2\alpha(-1+tg^2\alpha+4tg\alpha)=-1$

$-\cancel{1}+tg^2\alpha+4tg\alpha=-\cancel{1}-tg^2\alpha$

$2tg^2\alpha+4tg\alpha=0$

$tg\alpha(2tg\alpha+4)=0$

$tg\alpha=-2\qquad tg\alpha=0$

$\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{5\cdot68}{3\cdot17\cdot4}=\frac{\cancel{17}\cdot5}{3\cdot\cancel{17}}$

$a=\frac{5-25\cdot0{,}1}{5\cdot\sqrt{0{,}1}}=\frac{5}{2\sqrt{0{,}1}\cdot5}$

$a=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=\sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha=$
$=\sin2\alpha(\cos4\beta+1)+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha=2\cos^2 2\beta\cdot\sin2\alpha+\sin4\beta\cdot\cos2\alpha=$
$=2\cos^2 2\beta\cdot\sin2\alpha+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha=2\cos2\beta\cdot(\cos2\beta\cdot\sin2\alpha+$
$+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha)=2\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=2\cos2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{4}{5}$

№2.

$\frac{AC}{AB}=\frac{8}{17}=\frac{25r}{17\cdot2R}=\frac{\cancel{25}\cdot\cancel{16}8}{17\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{25}}$

$\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}\ (1)\\x^2+9y^2-4x-18y=12\ (2)\end{cases}$

$35\cdot35$: 175, 105, 1225

$40\cdot20=800$

$(2):\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9-9-4=12$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$(1):\ x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x-2y=x-2-(y-1)\cdot2=-2(y-1)+x-2$

$x-2=a\qquad y-1=b$

$\begin{cases}a^2+(3b)^2=25\\-2b+a=\sqrt{ab}\end{cases}$

$a^2+9b^2=25$

$a^2+4b^2=25-5b^2$

~~$x-2=\frac{5-(y-1)^2}{y-1}$~~

$\frac{(5-b^2)^2}{b^2}+9b^2=25$

$25-10b^2+b^4+9b^4=25b^2$

$10b^4-35b^2+25=0$

$1225-1000=15^2$

$\frac{35\pm15}{20}$

$b=1\quad b=2{,}5$

$a=4\quad a=\frac{1-2{,}5}{2{,}5}=-\frac{1}{2}$

$\begin{cases}a\geq2b\\ab=a^2-4ab+4b^2\end{cases}$

$0=a^2-5ab+4b^2$

$0=\cancel{b^2}-5ab+25-5b^2$

$0=-b^2-ab+5$

~~$0=a^2+20$~~ $\qquad a=\frac{5-b^2}{b}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b=1$
$a=4$

$\cancel{b=2,5}$
$\cancel{a=\frac{1}{2}}$

$t\frac{1}{2} \geq 5$-нет подх.

$y=2 \quad x=6$

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$+ \quad - \quad +$
$-18 \quad 0$

$\cancel{x\in(-18;}\ x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$$5^{\cancel{\log_{12}(x^2+18x)}}+5^{\log_5 x^2} \geq 13^{\cancel{\log_{12}(x^2+18x)}}-5^{\log_5 18x}$$

$\cancel{5^{\log_5 x^2}}$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+5^{\log_5(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$$

$x^2+18x=t$

$$5^{\log_{12}t}+5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_{12}t}$$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$2^{\log_{12}5}-2^{\log_{12}8}$

$$t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}+t \geq 0$$

$$t^{\log_{12}13}\left(\frac{t^{\log_{12}15}}{t^{\log_{12}13}}-1\right)+t \geq 0$$

$$t^{\log_{12}13}\left(t^{\log_{12}15-\log_{12}13}-1\right)+t \geq 0$$

$$t^{\log_{12}13}\cdot t^{\log_{12}\frac{15}{13}}-t^{\log_{12}13}+t \geq 0$$

$$t^{\log_{12}13+\log_{12}\frac{15}{13}}-t^{\log_{12}13}+t \geq 0 \qquad t^{\log_{12}15}-t^{\log_{12}13}+t \geq 0$$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$ $\quad \begin{array}{r} \times 125 \\ 17 \\ \hline 875 \\ 125 \\ \hline 2125 \end{array}$

$t = x^2 + 18x \geq 0$ - ООЗ $, t > 0$

$x^2 + 18x > 0$

$16^2 = 256$

$17^2 = 289$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ $\quad \begin{array}{r} \times 125 \\ 17 \\ \hline 75 \end{array}$

$\frac{289 \cdot 4}{289} - \frac{256}{289} = \frac{900}{289}$

$t^{\log_{12} 5} - t^{\log_{12} 13} + t^{\log_{12} 12} \geq 0 \ldots$

$180 - \cancel{\gamma} - \beta = 90 - \cancel{\gamma} + \alpha$

$\begin{array}{r} \times 16 \\ 16 \\ \hline 96 \\ 16 \\ \hline 256 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$ $\quad \frac{16}{6} + \frac{9}{6}$

№4.

Дано: $CD = 8$

~~BD~~

$BD = 17$

R - ?

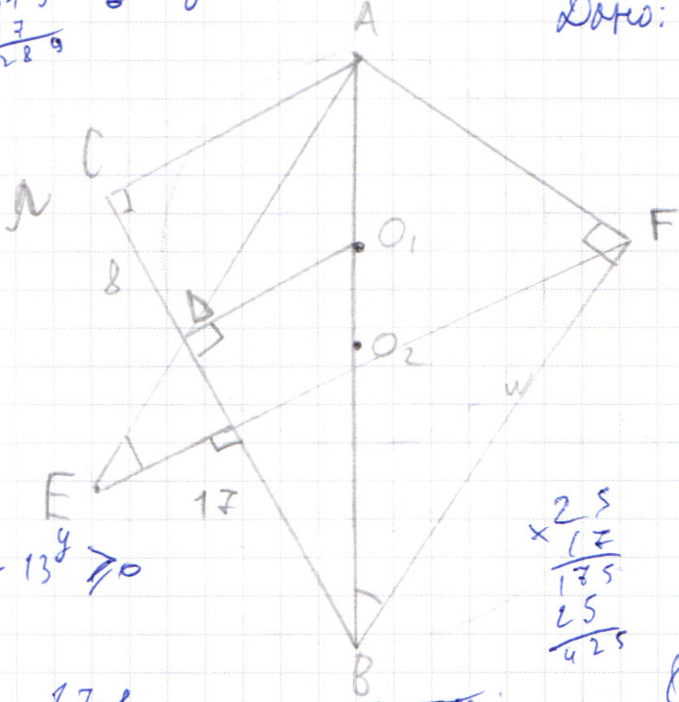
r - ?

~~AFE~~ $\angle AFE$ - ?

$S_{\triangle AEF}$ - ?

$180 - \alpha - \beta - \cancel{\gamma} + \cancel{\gamma} = 90$

$\begin{array}{r} \times 289 \\ 4 \\ \hline 1156 \\ -256 \\ \hline 900 \end{array}$



$\begin{array}{r} \times 17 \\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$

$\frac{CB}{BD} = \frac{AC}{O_1 D} = \frac{25}{17}$

$\frac{AC}{r} = \frac{25}{17}$

$5^y + 12^y - 13^y \geq 0$

$\begin{array}{r} \times 25 \\ 17 \\ \hline 175 \\ 25 \\ \hline 425 \end{array}$

$AC^2 + 25^2 = 4R^2$

$O_1O_2 = 2R - R - r = R - r$

$\frac{17 \cdot 16}{30} = \frac{17 \cdot 8}{15}$

~~$180 = 90$~~

$\begin{array}{r} \times 17 \\ 8 \\ \hline 136 \end{array}$

$\log_{12} t = y$

$180^\circ = \cancel{\gamma} + \beta + \alpha + 90 - \cancel{\gamma}$

$$\begin{cases} r^2 + 17^2 = (2R - r)^2 \\ \frac{25^2}{17^2} \cdot r^2 + 25^2 = 4R^2 \end{cases}$$

$4R^2\left(1 - \frac{\sqrt{17}}{5}\right)^2 \cdot \frac{25^2}{17^2} + 25^2 = 4R^2$

$r^2 + 17^2 = (2R - r)^2$

$4R^2\left(\left(1 - \frac{\sqrt{17}}{5}\right)^2 \cdot \frac{25^2}{17^2} - 1\right) = -25^2$ $\quad 17 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{9}{2} = \boxed{12{,}5 \cdot 17}$

$r^2 + 17^2 = \left(\frac{17}{25}\right)^2 4R^2$

$(2R - r)^2 = \frac{17}{25} \cdot 4R^2$

$4R^2\left(\left(1 - \frac{\sqrt{17}}{5}\right) \cdot \frac{25}{17} - 1\right)\left(\left(1 - \frac{\sqrt{17}}{5}\right) \cdot \frac{25}{17} + 1\right) = -25^2$

$2R - r = \frac{\sqrt{17}}{5} \cdot 2R$

$r = 2R\left(1 - \frac{\sqrt{17}}{5}\right)$

$2^{\log_2 5} + 2^{\log_2 2}$

$\frac{136^2}{15^2} \cdot \frac{25^2}{17 \cdot 8} = 17\left(\frac{5}{3}\right)^2(17 - 12{,}5)$

$1 > \frac{\sqrt{17}}{5} \quad | \cdot 5$

$2^1 + 2^3 + 2^4 \geq 0$

$\left(\frac{5}{3}\right)^2\left(17^2 - \frac{25}{2} \cdot 34\right)$

$5 > \sqrt{17}$

$\log_2 2 + \log_2 2^3 + \log_2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)