МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right);$$

$(x, y > 0)$

$$f(y) = f\left(\frac{y^2}{y}\right)$$

$$f(y) = f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y^2) = f\left(\frac{1}{y}\right) + 2f(y);$$

$$f\left(\frac{1}{y}\right) = -f(y);$$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) \Rightarrow f(x) < f(y)$;

$x = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$, $\alpha_1 - \alpha_n$ — натуральные простые числа;

$y = \beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \ldots \cdot \beta_q$, $\beta_1 - \beta_q$ — натуральные простые числа;

$$f(x) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2) + \ldots + f(\alpha_n) < f(\beta_1) + f(\beta_2) \ldots + f(\beta_q);$$

$\left(f(x) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdot \ldots \cdot \alpha_n) = f(\alpha_2) + f(\alpha_1) + f(\alpha_3 \cdot \alpha_4 \cdot \ldots \cdot \alpha_n)\right.$ и т.д.$)$ $\overset{\shortparallel}{f(y)}$;

Для простых чисел, $\in [1; 24]$: (другие простые числа (натуральные) при умножении на другое простое натуральное число или 1 дает число, > 24);

$\left[\frac{1}{4}\right] = 0$, $\left[\frac{3}{4}\right] = 0$, $\left[\frac{5}{4}\right] = \left[\frac{4+1}{4}\right] = 1$, $\left[\frac{7}{4}\right] = \left[\frac{4+3}{4}\right] = 1$, $\left[\frac{11}{4}\right] = \left[\frac{8+3}{4}\right] = 2$, $\left[\frac{13}{4}\right] = \left[3 + \frac{1}{4}\right] = 3$, $\left[\frac{17}{4}\right] = \left[\frac{16+1}{4}\right] = 4$; $\left[\frac{19}{4}\right] = \left[\frac{16+3}{4}\right] = 4$, $\left[\frac{23}{4}\right] = \left[\frac{20+3}{4}\right] = 5$;

~~f(x)~~ ? $f(1\cdot b) = f(1) + f(b) = f(b) \Rightarrow f(1) = 0;$

$f(1) = 0;$

$f(2) = 0;$

$f(3) = 0;$

$4 = 2\cdot 2 \Rightarrow f(4) = f(2) + f(2) = 0;$

$f(5) = 1;$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0;$

$f(7) = 1;$

$f(8) = 3f(2) = 0;$

$f(9) = 2f(3) = 0;$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1;$

$f(11) = 2;$

$f(12) = f(3) + f(4) = 0;$

$f(13) = 3;$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1;$

$f(15) = f(5) + f(3) = 1;$

$f(16) = 4f(2) = 0;$

$f(17) = 4;$

$f(18) = 2f(3) + f(2) = 0;$

$f(19) = 4;$

$f(20) = 2f(2) + f(5) = 1;$

$f(21) = f(7) + f(3) = 1;$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2;$

$f(23) = 5;$

$f(24) = 3f(2) + f(3) = 0;$

~~$f(25) = 2f(5) = 2$~~;

Разобьём все числа $\in [1;24]$ на 6 групп:
(натуральные)

I
$f(x) = 0$:

$x = 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24$

II
$f(x) = 1$:

$x = 5, 7, 10, 14, 15, 20, 21$

III
$f(x) = 2$:

$x = 11, 22$

IV
$f(x) = 3$:

$x = 13$;

V
$f(x) = 4$:

$x = 19, 17$;

VI
$f(x) = 5$:

$x = 23$

В группе номера k
n_k чисел;

$f(y) > f(x) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ При $y \in$ группе VI:

Подходят $n_5 + n_4 + n_3 + n_2 + n_1$ различных x;

При $y \in$ группе V:

Подходят $n_4 + n_3 + n_2 + n_1$ разл. x;

Продолжая эту колонку, придём к такому результату:

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Всего пар: $n_6(n_5+n_4+n_3+n_2+n_1)+n_5(n_4+n_3+n_2+n_1)+$

$+n_4(n_3+n_2+n_1)+n_3(n_2+n_1)+n_2\cdot n_1=$

$=1\cdot 23+2\cdot 21+1\cdot 20+2\cdot 18+7\cdot 11=$

$=23+42+20+36+77=\cancel{78}\ 198;$

Ответ: 198 пар;

ОДЗ: $x^2+18x>0;$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-12x;$$

$k=x^2+18x;$ ~~>0~~ учитывая, что $x^2+18x>0,$

можно утверждать: $|x^2+18x|=k;$

$$\cancel{5^{\log_{12}k}}^{=k^{\log_{12}5}}+k\geq k^{\log_{12}13};$$

$$\cancel{k(k^{\log_{12}5-1}+1-k^{\log_{12}13-1})\geq 0};$$

$\log_{12}x=q;\ k=k^{\log_{12}12}=12^{\log_{12}k};$

$5^q+12^q\geq 13^q;$

$f(q)=5^q+12^q-13^q\geq 0;$

Нули: $q=2\ (25+144-169=0);$ Докажем, что нулей больше нет;

$$\cancel{f(q)=e^q\ln(5)+e^q\ln(12)-e^q\ln(13)=\underset{\geq 0}{e^q}\cdot(\ln(5)+\ln(12)-\ln(13))}$$

$=e^q\cdot\ln\frac{5\cdot 12}{13}=e^q\cdot\ln\left(4+\frac{8}{13}\right);$ ~~$e<3,\ 4+\frac{8}{13}>3\Rightarrow\ 4+\frac{8}{13}>e\Rightarrow$~~

~~$\ln\left(4+\frac{8}{13}\right)>0$~~

~~$(\ln(e)=0,\ g(x)=\ln(x),\ g(x)\uparrow);$~~

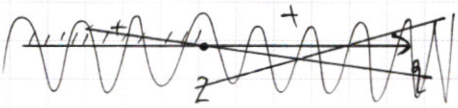
~~$e^{q} \cdot \ln\left(4+\frac{8}{13}\right) > 0 \Rightarrow f'(q) > 0$ при $q \in R \Rightarrow$ для $q = 2$:~~

~~$f(q') > f(2) > f(q'')$,~~

~~$q'' < 2$~~
~~$q' > 2$~~

~~$\Rightarrow f(q') > 0 > f(q'') \Rightarrow f(q) = 0$ только при $q = 2$;~~

~~$f(1) = 5 + 12 - 13 > 0$;~~



~~$(a^x = b^x + c^x)$ только при $x \leq 2$~~

~~$q \leq 2$;~~

Пусть $\exists \alpha$, $13^{2-\alpha} = 12^{2-\alpha} + 5^{2-\alpha}$

$\alpha \in R$; $\alpha \neq 0$;

1) $\alpha > 0$;

$$\frac{13^2}{13^\alpha} = \frac{12^2}{12^\alpha} + \frac{5^2}{5^\alpha};$$

$$\frac{5^2}{13^\alpha} + \frac{12^2}{13^\alpha} = \frac{5^2}{5^\alpha} + \frac{12^2}{12^\alpha};$$

$$\frac{12^2}{12^\alpha} \wedge \frac{12^2}{13^\alpha}$$

$13^\alpha > 12^\alpha$ * $\Rightarrow \frac{12^2}{12^\alpha} > \frac{12^2}{13^\alpha}$;

Аналогично: $\frac{5^2}{5^\alpha} > \frac{5^2}{13^\alpha}$; $\Bigg\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{13^2}{13^\alpha} < \frac{12^2}{12^\alpha} + \frac{5^2}{5^\alpha};$$

*: $\left(\frac{13}{12}\right)^\alpha \wedge 1$ (для похожих неравенств реш. также)

$\log_{\frac{13}{12}} \left(\frac{13}{12}\right)^\alpha \wedge \log_{\frac{13}{12}} 1$;

α $\quad$ $1 < \frac{13}{12} \Rightarrow \log_{\frac{13}{12}} 1 < 0$;

$\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > \log_{\frac{13}{12}} 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 13^\alpha > 12^\alpha$

2) $\alpha < 0$: $(\beta = -\alpha)$

$13^2 \cdot 13^\beta = 12^2 \cdot 12^\beta + 5^{2+\beta}$;

$(12^2 + 5^2) 13^\beta = 12^2 \cdot 12^\beta + 5^2 \cdot 5^\beta$; $\qquad 12^2 \cdot 13^\beta \wedge 12^2 \cdot 12^\beta$;

$13^\beta > 12^\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 12^2 \cdot 13^\beta > 12^2 \cdot 12^\beta$;
Аналогично: $5^2 \cdot 5^\beta < 5^2 \cdot 13^\beta$; $\Bigg\} \Rightarrow 13^2 \cdot 13^\beta > 12^2 \cdot 12^\beta + 5^2 \cdot 5^\beta \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Такого α $\nexists \Rightarrow$ у уравнения 1 корень;
$(5^q + 12^q = 13^q)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(q)=5^q+12^q-13^q$, $f(q)=0$ в ∞ при $!\,q$,

$f(q)$ - непрерывная функция =)

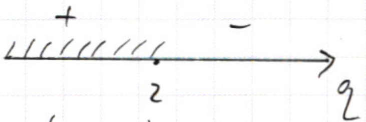
$(5^q=h(q)$, $12^q=g(q)$, $13^q=r(q)$; $h(q)$, $g(q)$ и $r(q)$ непрерывны)

=) При $q \gtrless q_0$ ~~функция сохр.~~ $\cancel{f(q)\leq 0}$; $f(q)$ либо строго >0, либо строго <0;

~~корень~~ $f(q_0)=0$

$f(1)=5^1+12^1-13^1=4$ =) $f(q)>0$, $q<2$; $\cancel{f(q)<0,\ q>2}$;

$f(3)=125+1728-2197=125-469=-344<0$;



$\log_{12} k \leq 2$; $k \leq 144$;

$0 \leq x^2+18x \leq 144$;

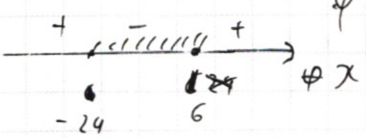
1) $\varphi(x)=x^2+18x-144=0$;

$D=324+144\cdot 4=4(81+144)=4\cdot 225=$

$=(2\cdot 15)^2$;

$x=\dfrac{-18\pm 30}{2}$; $\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-24 \end{array}\right.$;

$\cancel{\varphi(7)=}$ $\varphi(x)=(x-6)(x+24) \geq 0$; $\varphi(7)=1\cdot 31=31>0$;

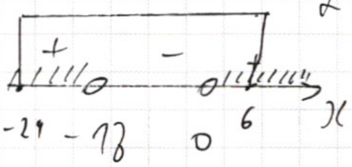


$x\in[-24;6]$;

2) $\alpha(x) = x^2 + 18x = x(x+18)$;

Нули: $x = 0$, $x = -18$;

$\alpha(1) = 19 > 0$;



$x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$;

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$;

№ 1

$2\alpha = a$; $2\beta = b$;

$\sin(a+b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin^2(a+b) = \frac{1}{5}$;

$-4\sin^2(a+b) = \sin a + \sin(a+2b)$;

~~$-4(\sin a\cos b + \cos a \sin b)^2 = \sin a + \sin a \cdot (\cos^2 b - \sin^2 b) + \cos a (2\sin b\cos b)$~~

$-4\sin^2(a+b) = 2\sin\frac{a+a+2b}{2} \cdot \cos\frac{a-a-2b}{2}$;

$-4\sin(a+b) = 2\cos(-b)$;

$\cos(-b) = -2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$\cos(b) = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$\sin(a+b) =$

$= \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

1) $\sin b = \sqrt{1 - \cos^2(b)}$;

$\sin b = \frac{1}{\sqrt{5}}$;

$$\begin{cases} 2\sin a + \cos a = -1; \\ \sin^2 a + \cos^2 a = 1; \end{cases}$$

$4\sin^2 a + \cos^2 a = \sin^2 a + \cos^2 a$;

$4\sin a + \cos a$

$3\sin^2 a = -4\sin a\cos a$;

1) $\sin a \neq 0$: $3\sin a = -4\cos a$;

2) $\sin a = 0$; $\cos a = \pm 1$;

$2\sin a + \left(-\frac{3}{4}\right)\sin a = -1$; ~~$\sin a = 1{,}5$ $\sin a \in (-1; 1) \Rightarrow \varnothing$~~

$\Rightarrow \sin a = -\frac{4}{5}$; $\cos a = \frac{3}{5}$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\sin b = -\sqrt{1-\cos^2 b}$;

$\sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$$\begin{cases} 2\sin a - \cos a = \cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}} \cdot -1 \\ \sin^2 a + \cos^2 a = +1 \end{cases}$$

$\cancel{\sin^2\alpha} +$ $\sin^2 a + \cos^2 a = 4\sin^2 a - 4\sin a\cos a + \cos^2 a$;

$3\sin^2 a = 4\cos a \cdot \sin a$;

1) $\sin a = 0$;

$\cos a = \pm 1 \neq -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\varnothing$

2) $\sin a \neq 0$;

$\frac{3}{4}\sin a = \cos a$;

$2\sin a - \left(+\frac{3}{4}\right)\sin a = -1$; $\sin a = -\frac{4}{5}$;

$\cos a = -\frac{3}{5}$;

$\cancel{\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{a}{2}} = \sin a}$

$\cos \underset{2\alpha}{a} = 2\cos^2\alpha - 1$; $\cos^2_1 \alpha = \frac{1}{5}$;

$\cos^2_2 \alpha = \frac{4}{5}$;

$$\left[\begin{array}{l} \sin^2_1 \alpha = \frac{4}{5} \\ \sin^2_2 \alpha = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

$\underbrace{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}_{<0 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}<0} = \sin 2\alpha < 0$;

Ответ: $\{-\frac{1}{2}; -2\}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\cancel{\operatorname{tg}_1\alpha = \pm\sqrt{\frac{\sin^2_1\alpha}{\cos^2_1\alpha}}}$, $\cancel{\operatorname{tg}_1\alpha = \pm 2}$; ~~Ответ: $\{-2; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 2\}$~~

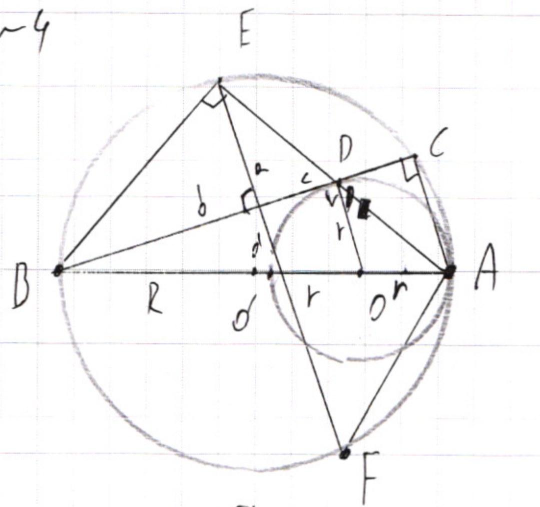
$\operatorname{tg}_1\alpha = \pm\sqrt{\frac{\sin^2_1\alpha}{\cos^2_1\alpha}} = -2$, $\operatorname{tg}_2\alpha = -\frac{1}{2}$; ~~Аналогично:~~ $\operatorname{tg}_2\alpha = \pm\frac{1}{2}$;

№4

$BD = 17$, $CD = 8$;

Найти: r, R, $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$;

Реш.:



По т. о касательной и секущей:

1) $\begin{cases} BD^2 = (2R - 2r) \cdot 2R; \\ \text{~~По т. Пифагора:~~} \\ \cancel{BD^2 + r^2 = (2R - r)^2} \end{cases}$

BD^2 $\cancel{4R^2 - 4rR = 4R^2 + r^2 - 4rR - r^2};$

$\cancel{4rR = 3r^2};$

$\cancel{4R = 3r};$

$\triangle CDA$ и $\triangle DBO$:

$\angle CDA$ – общ.

$\angle BDO = \angle BCA = 90°$ (впис. $\angle$ опир. на диаметр) $\Rightarrow$ $\triangle CBA \sim \triangle DBO \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2R}{R+r} = \dfrac{17+8}{17};$

$\cancel{25 \cdot 2R + 25r = 34R + 34r}$

$25R + 25r = 34R$; $25r = 9R$; $\cancel{16R = 8r;\ 2R = r;}$

$r = \dfrac{9}{25}R;$

$289 = 4R^2 - 4Rr = 4R^2\left(1 - \dfrac{9}{25}\right) = \dfrac{16 \cdot 4}{25}R^2;$ $R = \dfrac{17 \cdot 5}{4 \cdot 2} =$

$= \dfrac{85}{8};$ $r = \dfrac{153}{40}$ Ответ: $R = \dfrac{85}{8};$ $r = \dfrac{153}{40};$

2) $\triangle CBA \sim \triangle DBO \Rightarrow \dfrac{AC}{r} = \dfrac{2R}{R+r} = \dfrac{25}{17};$ $AC = r \cdot \dfrac{25}{17} = \dfrac{45}{8};$

$\angle CAE$ и $\angle$ ~~EFA впис. в одну окр., опир. на~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle EFA = \frac{1}{2}\breve{EA} = \frac{1}{2}\breve{EC} + \frac{1}{2}\breve{CA} =$

$= \angle CAD + \angle CBA;$

$\angle EFA = \arcsin\left(\frac{\frac{45}{2}}{2\cdot\frac{85}{6}}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{8}{45/2}\right) =$

$= \arcsin\left(\frac{9}{34}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{64}{45}\right);$

Ответ: $\arcsin\left(\frac{9}{34}\right) + \operatorname{arctg}\left(\frac{64}{45}\right);$

$\cancel{\triangle BED \sim \triangle DCA \Rightarrow}$

$\cancel{\Rightarrow BE \cdot CA = \frac{BD}{DC} = \frac{45}{8}\cdot\frac{17}{8}}$

$\cancel{\begin{cases} ad = bc \\ a^2 + b^2 = \left(\frac{45\cdot 17}{8^2}\right)^2 \\ b + c = 25 \end{cases}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x^2+4y^2-3xy+x+7y=2 \\ x^2+9y^2-4x-22y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+4y^2-8xy = xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-12y=12 \end{cases}$$

$5y^2+9xy-5x-20y=10$

$x = \dfrac{10-5y^2+20y}{9y-5}$

$5(-y^2+4y-2)$

$9y-5$

y^2-4y+2

$D=16-8=8$

$y=\dfrac{4\pm\sqrt{8}}{2}=2\pm\sqrt{2}$

$\sqrt{12}+\sqrt{5} \wedge \sqrt{13}$

$12+5+2\sqrt{12\cdot5} \wedge 13$

$\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{5} \wedge \dfrac{1}{13}$

$\dfrac{5+12}{12\cdot5} \wedge \dfrac{1}{13}$

$12\cdot5 \wedge 5\cdot13+12\cdot13$

$x\in[0;-18]$

~~$5^A+x^2 \geq 13^A-12x$~~

~~$x^2+12x+5^A-13^A\geq0$~~

~~$D=12^2-4\cdot5^A-4\cdot13^A<0$~~

$71-5^A-13^A<0$

$5^{\log_{12}k}+k\geq13^{\log_{12}k}$

$k\left(1+k^{\log_{12}5-1}\right)\geq k\left(k^{\log_{12}13-1}\right)$

$1+k^{\log_{12}\frac{5}{12}}\geq k^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$\log_{12}k=2$

$1+\left(\frac{5}{12}\right)^2\geq\left(\frac{13}{12}\right)^2$

$12^2+5^2\geq13^2$

$\log_{12}k\leq2$

$0<k\leq12^2$

~~$f(0)=f(0)+f(x)$~~

~~$f(x)=0\ x\in\mathbb{R}$~~

~~$f(4)+f\left(\frac{P}{4}\right)\cdot\left[\frac{P}{4}\right]$~~

$2=2$

$\sin(45^\circ-\alpha)=2\cdot\sin45^\circ\cos\alpha$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}$

$(e^x)'=e^x$

$f(e^x)$

$(f(g(x)))'=f'(x)\cdot g'(x)$

$\log_{12}k=2$, $k=144$

$25+144=169$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(4) = 2f(2) = 2(f(1)+f(2)) = 2f(1)+2f(2);$

$f(1)=0$

$f(4) + f(p/4) = [p/4];$

$f(p/4) = [p/4] - f(4)$

$f(1)+f(\frac{1}{y});$ $f(\frac{1}{4}) = f(1 \cdot 2);$ $f(4 \cdot 0{,}5) = f(1) + f(0{,}5) = 2f(2);$

$f(\frac{y^2}{y}) = f(y)$ $2f(y)+f(\frac{1}{y}) = f(y);$ $f(\frac{1}{y}) = -f(y);$

$f(x) - f(y);$ $f(0{,}5) = -f(2);$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{5}$

$2\alpha = a,\ 2\beta = b;$

$\sin a \cdot \cos 2b + \sin 2b \cdot \cos a + \sin a = \frac{4}{5};$

$2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 4 \cdot 4 \cdot 3$

$\cos\varphi = \frac{25/2}{\sqrt{17}/3} = \frac{25}{\sqrt{17}} \cdot \frac{2}{3}$

$17 = (2r-2r) \cdot 2 \cdot 4 \cdot r =$

$6 \cdot 4$

$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$r^2 = \frac{289}{48};$

$r = \frac{17}{4\sqrt{3}}$

$R = \frac{17}{\sqrt{3}}$

$4R^2 - 4Rr =$

$4rR = 5r^2;$

$4R = r$

$a=1,\ b=3;\ x=3,\ y=2;$

$(a-b)(x \cdot y) ; 10;$

1 – 0, 2 – 0, 3 – 0, 4 – 0, 5 – 1, 6 – 0, 7 – 1, 8 – 0, 9 – 0, 10 – 1, 11 – 3

$\begin{cases} BD^2 = (2R-2r) \cdot 2R; \\ BD^2 = r^2 + (2R-2r)^2 \end{cases}$

$CD = 8$ $BP = 17$

$\angle AFE - ?$

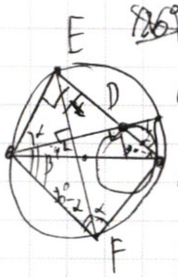
$r, R - ?$

$f(x) < f(y);$

$\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \alpha_3 \cdots$ $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \beta_3 \cdots$

$\left[\frac{\alpha_1}{4}\right] + \left[\frac{\alpha_2}{4}\right] + \ldots \leq \left[\frac{\beta_1}{4}\right] + \left[\frac{\beta_2}{4}\right] \ldots$

$\sin = \frac{2r}{2R-2r} = \frac{2}{2 \cdot 4 - 2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3};$



$\beta = \frac{90^\circ + \alpha}{2};$

$90^\circ - \alpha + 90^\circ + \frac{90^\circ + \alpha}{2} = 120^\circ;$

$2\alpha = 30^\circ + \alpha;$ $\alpha = 30^\circ;$

$FC + FC + BE = 120^\circ;$

$FC = 90^\circ + \alpha$

$\alpha = 45^\circ;$

1	2	3	5	7	11	13	17	19	23
0	0	0	1	1	2	3	4	4	5

$90^\circ - \alpha + \beta = 90^\circ;$

$\beta = \alpha;$

$9 + 7 + 7 + 6 + 5 + 3 + 3;$

$(25 \cdot 12^d + 144 \cdot 5^d) \cdot 13^d = 13^k \cdot 5^d \cdot 12^d$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{13}{12}\right)^2 > 1;$

$\log_2 \left(\frac{12^2}{13}\right) > 0;$ $13^{2+\alpha} = 12^{2+\alpha} + 5^{2+2};$

$169 \cdot 13^{\alpha} = 144 \cdot 12^{\alpha} + 25 \cdot 5^{\alpha};$

$\cancel{\alpha^2}$

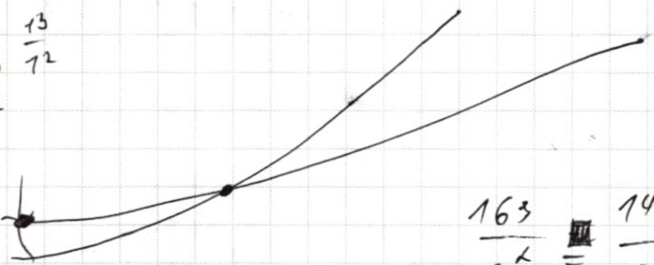
~~$5^2 \ln 5 + 12^2 \ln 12 = 13^2 \ln 13;$~~

$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ 288 \\ 144 \\ 1728 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ 507 \\ 169 \\ 2197 \end{array}$$

$\left(\frac{13}{12}\right)^2 \quad 1 \quad 1$

$\frac{144+25}{13^2} + \frac{}{13^2} = \frac{144}{12^2} + \frac{25}{5^2};$

$\log_{\frac{13}{12}} \frac{13}{12}$



$$\begin{array}{r} 2197 \\ -\ 1728 \\ 469 \\ -\ 125 \\ 344 \end{array}$$

$\frac{163}{13^2} = \frac{144}{12^2} + \frac{25}{25^2}$

$f(a) = f(b)$

$f(a') = f(b')$

$13^d = 12^d + 5^d;$

$13^{d-2} = 12^{d-2} + 5^{d-2};$

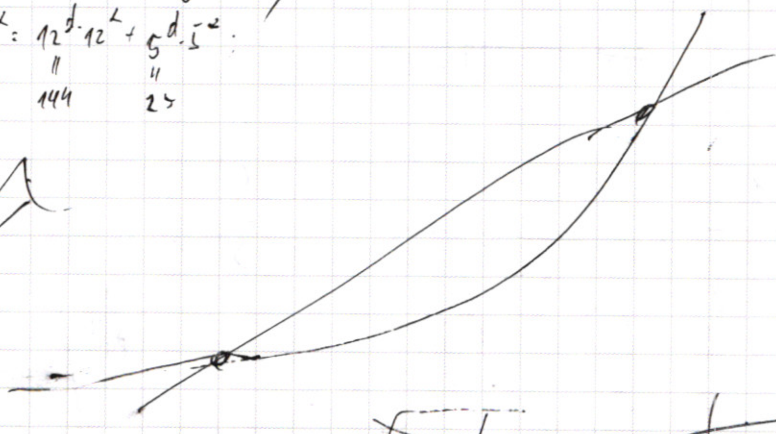
$13^d \cdot 13^{-2} = 12^d \cdot 12^{-2} + 5^d \cdot 5^{-2}.$

$\quad 163 \qquad 144 \qquad 25$

$q \leq 1;$

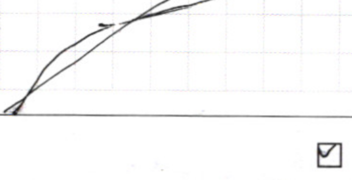
~~$\log_{12} 16x^2 + 12x \leq 2$~~

$5^q + 12^q \geq 13^q;$



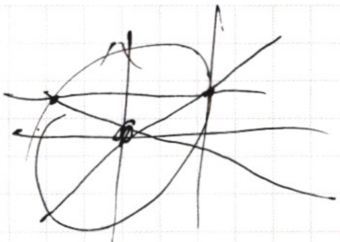
~~$\alpha x + b = \alpha x + b;$~~

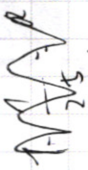
~~$\alpha x + b = \alpha x^2 + \ldots$~~



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)





$-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) = 1 - \frac{3}{5};$

$-\frac{4}{5}\cdot 2 + \frac{3}{5} = \frac{3-8}{5} = -\frac{5}{5} = -1;$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{5};$

$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5};$

$-\frac{6}{5} + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right) =$

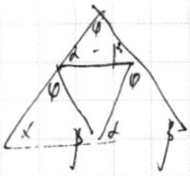
$\sin =$

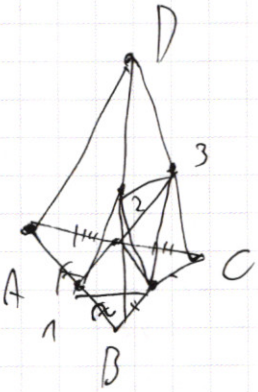
160/2 = 80

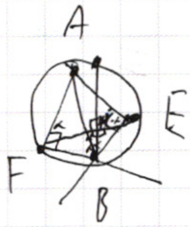
0/2 = 0;

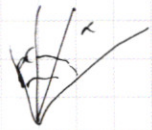
$x^2+4y^2-4xy = xy\cdot x - x - 2y + 2$

$x^2+9y^2-4x-16y = 12>$









~~$180^0 - \alpha - \beta = \beta$~~

$\beta < ...!$

$\cos = -\frac{3}{4}$ $\sin = \frac{1}{\frac{3}{4} - 2} = \frac{4}{3-8} = -\frac{4}{5};$

$\sin < 0, \cos > 0$

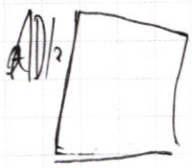
$\cos > 0; \sin > 0;$

-5

$(-5)\cdot(-5)$

-5

$\frac{3\cdot 5}{4\cdot 2}$



$\frac{3}{2} \cdot \frac{17\cdot 5}{4\cdot 2} = \frac{85}{27}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)