МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~cos2x~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{17}.}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta) =$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta = -\frac{2}{17}.$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{17}.$

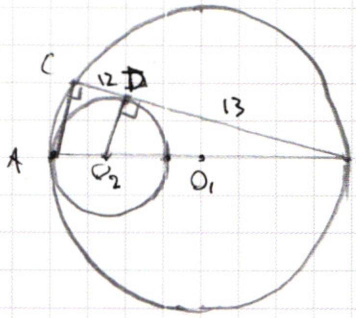
$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$3+2+5+5+5+5+6.$

33.

19.

$$\frac{AC}{DO_2} = \frac{25}{13}$$



$$(2R)^2 = (AC)^2 + 25^2.$$

$$\begin{cases} 4R^2 = \frac{25^2}{13^2} r^2 + 25^2 \\ (2R-r)^2 = r^2 + 13^2 \end{cases}$$

$$4R^2 = \left(\frac{25}{13} r\right)^2 + 25^2$$

$$4R^2 + \cancel{r^2} - 4Rr = \cancel{r^2} + 13^2$$

$$4R^2 - 4Rr - 169 = 0. \quad 4Rr = 4R^2 - 169$$

$$R - \frac{169}{4R} = r \qquad r = R - \frac{169}{4R}.$$

$$13^2 = 2R(2R - 2r).$$

$$\cancel{169 = 4R^2 - 4Rr \quad R - \frac{169}{4R} = r}.$$

$$\cancel{169 = 4R^2}$$

$$4R^2 = \left(\frac{25}{13} R - \frac{25 \cdot 13}{4R}\right)^2 + 25^2.$$

$$4R^2 = \frac{25^2}{169} R^2 + \frac{25^2 \cdot 169}{16R^2} - \frac{25^2}{2} + 25^2.$$

$$4R^2 = \frac{625}{169} R^2 + \frac{625 \cdot 169}{16 R^2} + \frac{625}{2} \quad \Big| R^2.$$

$$R^4\left(\frac{169 \cdot 4 + 625}{169}\right) - \frac{625}{2} R^2 - \frac{625 \cdot 169}{16} = 0.$$

$$169 \cdot 4 = 676, \quad 676 - 625 = 51 = 13 \cdot 3$$

$$r^2 = \frac{4R^2 \cdot 169}{625} - 169 = R^2 + \frac{169^2}{4R^2} - \frac{169}{2}.$$

$$\frac{4R^2 \cdot 169}{625} - R^2 - \frac{169^2}{4R^2} - \frac{169}{2} = 0.$$

$$\frac{13 \cdot 3 R^2}{625} - \frac{169}{2} - \frac{169^2}{4R^2} = 0 \qquad \Big| \frac{625 \cdot 4R^2}{13}.$$

$$38 \cdot 12 = 380 + 76 = 456$$

$$38 \cdot 12 - 169 = 456 - 169 = 287$$

$$12R^4 - 625 \cdot 2 \cdot 13 R^2 - 169 \cdot 13 \cdot 625 = 0.$$

$$\frac{D}{4} = (625 \cdot 13)^2 - 12 \cdot 13 \cdot 625 \cdot 169 = (5^4 \cdot 13)^2 - (5^2 \cdot 13^2)^2 + 13 \cdot 625 \cdot 169 =$$

$$= (5^4 \cdot 13 - 5^2 \cdot 13^2)(5^4 \cdot 13 + 5^2 \cdot 13^2) + 13 \cdot 625 \cdot 169 = 5^4(25 \cdot 13 - 13 \cdot 13)(25 \cdot 13 + 13 \cdot 13) + \ldots$$

$$= 5^4 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 38 - 169 \cdot 13 \cdot 5^4 = 5^4 \cdot 13(38 \cdot 12 - 169) = 5^4 \cdot 13 \cdot 287.$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2 > 0$

$\cancel{26x-x^2=y\geq 0}$

$y=\log_5(26x-x^2)$.

$y^{\log_5 12}+y \geqslant 13^{\log_5 y}$

$5^{\log_5 12\cdot\log_5|x^2-26x|}+5^{\log_5 26x-x^2}\geq 5^{\log_5 13\log_5(26x-x^2)}$

$y^{\log_5 12}+y \geqslant 5^{\log_5 13\log_5 y}$

$12^y+5^y\geqslant 13^y$

$y^{\log_5 12}+y \geqslant y^{\log_5 13}$

$y<0$

$y\leq 2$

$12^2+5^2=13^2$.

$\log_5(26x-x^2)\leq 2$.

$26x-x^2\leq 25$.

$x^2-26x+25\geqslant 0$

$(x-1)(x-25)\geqslant 0$

1 25

$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45.\end{cases}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$.

$x-1=a$

$y-6=b$. $b-6a=y-6-6x+6=y-6x$.

$9(x^2-2x+1)+(y^2-12y+36)=90$

$x-1=\pm1$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab}. \\ 9a^2+b^2=90\end{cases}$

$ab\geq 0$.

$b-6a=\sqrt{ab}$

$10-a^2\geq 0$.

$b^2+36a^2=13ab$

$b^2+36a^2-12ab=ab$.

$90-9a^2=13$

$b^2=90-9a^2=9(10-a^2)$

$5a^4-23a^2+18=0$.

$b=3\sqrt{10-a^2}$

$\left[\begin{array}{l} a^2=1 \\ a^2=\frac{18}{5}.\end{array}\right.$ $a=\pm1$

$9(10-a^2)+36a^2=13a\cdot3\sqrt{10-a^2}$

$b=9$.

$30+9a^2=13a\sqrt{10-a^2}$

$ab\geq 0 \Rightarrow a=1$.

$81a^4+900+540a^2=169a^2\cdot10-169a^4$

$x=2$
$y=15$.

$25a^4-115a^2+90=0$.

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left(\frac{2}{3};2\right]$ $\quad 28\cdot 8=160+64=$

$=224$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28.$ $\quad x_в=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$

$y_в=\frac{289\cdot 18}{12^2}-\frac{289\cdot 3}{12}+28=$ $\quad g\left(\frac{2}{3}\right)=8-34+28=$

$=\frac{17^2}{8}-\frac{17^2}{4}+28=$ $\quad =2$

$\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2}=\frac{4}{3x-2}-2=\frac{4}{3(x-\frac{2}{3})}-2$

$=-\frac{17^2}{8}+28=$

$\left(\frac{2}{3};2\right)$

$(2;-2)$

$=\frac{224-289}{8}=\frac{-65}{8}$

$D=51^2-4\cdot 28\cdot 18.$

51×51: 51, 255, 2601

228×18: 224, 28, 504

$g(2)=18\cdot 4-102+28=$

$=72-102+28=$

$=-2$

$-3x+4=\frac{8-6x}{3x-2}.$

$504\times 4=2016.$ $\quad \sqrt{65}>8$

$-(3x+4)(3x-2)=8-6x.$

$2691-2016$

$585=5\cdot 117=5\cdot 9\cdot 13$

$-(9x^2+6x-8)=8-6x$

$\sqrt{D}=3\sqrt{65}$

$-9x^2-6x+8=8-6x$

$-9x^2=0.$

$x=\frac{51\pm 3\sqrt{65}}{36}=\frac{17\pm\sqrt{65}}{12}$

$\frac{84}{12}=\frac{17}{6}$ ✓

17×17: 119, 17, 289.

$289-65=124$ $\quad \frac{124}{12^2}=\frac{124}{144}$

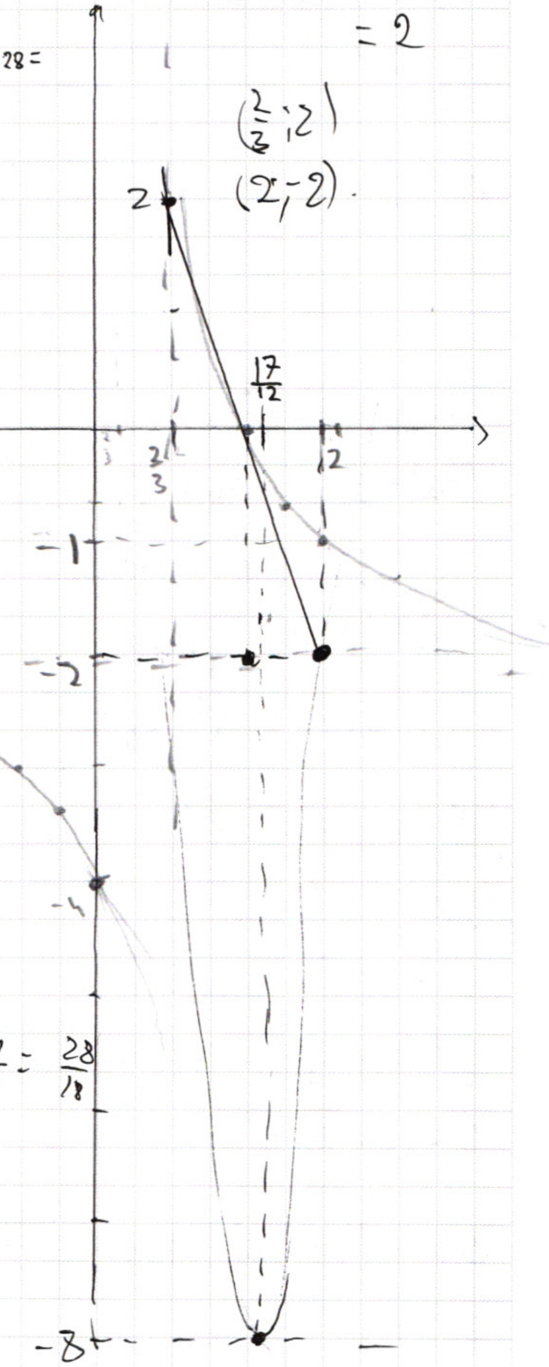
$289-65=224$

$\frac{(17+\sqrt{65})(17-\sqrt{65})}{144}=\frac{224}{144}=\frac{28}{18}$

$144=18\cdot 8$

$224=28\cdot 8$

17



$y=kx+b$ $\quad 2=\frac{2}{3}k+b$ $\quad 2=\frac{2}{3}k-2k-2.$

$y=kx+b.$ $\quad -2=2k+b.$ $\quad b=-2k-2.$ $\quad 12=-4k$ $\quad k=-3$ $\quad b=4$ $\quad y=-3x+4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y = -3x + 4$

$y = \dfrac{8-6x}{3x-2}$.

$\dfrac{4}{3(x-\frac{2}{3})} - 2 = \dfrac{4}{3x-2} - 2 = \dfrac{4 - 6x + \cancel{3}4}{3x-2} = \dfrac{\cancel{12}\,8 - 6x}{3x-2}$.

$8 - 6x = (-3x+4)(3x-2)$.

$8 - 6x = -9x^2 + 18x - 8$

$9x^2 - 24x + 16 = 0$.

$(3x-4)^2 = 0$

$x = \frac{4}{3}$

f опр. на $Q > 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ p - простое

$x, y \in N$

$4 \le x \le 28$

$4 \le y \le 28$.

$f(x/y) < 0$

$f(p) = f(p \cdot 1) = f(p) + f(1)$

$f(1) = 0$

$f(x/y) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(n) \cdot f(\frac{1}{n}) = 0$

$f(\frac{1}{n}) = -f(n)$.

$f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$.

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$.

$f(6) = f(3) + f(2) = 0$

$f(7) = 1$.

$f(8) = f(2) \cdot 3 = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$.

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$.

$f(15) = 1$

$f = 1$ для 5, 7, 10, 14, 15, 21, 20, 28, ~~25~~ } 8 вар.

$f = 2$ для 11, 22, 25. } 3

$f = 3$ для 13, 26 } 2

$f = 4$ для 17, 19 } 2

$f = 5$ для 23 } 1

$f = 0$ для 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, ~~20~~, 24, 27, } 9

~~$f = 6$ для~~

$2\cancel{8}^{4} + 2 \cdot 12 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 17 + 8 \cdot 9 \cancel{7}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\cancel{tg\alpha} = ?$ $\quad$ не меньше ~~за~~ трёх.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$\cos x \neq 0$

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi k.$ $k\in Z$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$\cancel{-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta + \sin 2\beta}$

$\sin(x+y)+\sin(x-y) = \sin x\cos y + \cancel{\sin y\cos x} + \sin x\cos y - \cancel{\sin y\cos x} = 2\sin x\cos y$.

$x+y=a$ $\quad x=\frac{a+b}{2}$

$x-y=b.$ $\quad y=\frac{a-b}{2}.$ $\quad \sin a+\sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}.$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17} = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}.$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}.$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} =$

$= \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}.$ $\quad \Big|\cdot\sqrt{17}.$

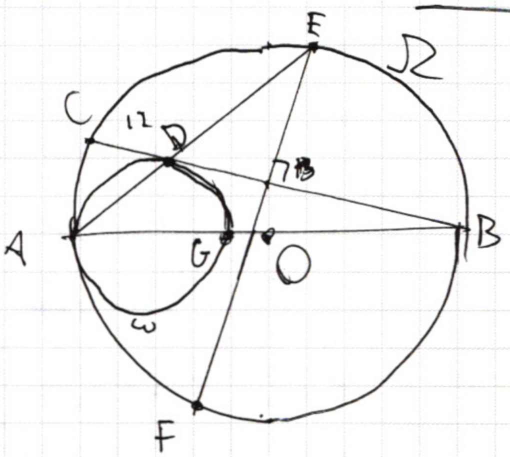
$\cos 2\alpha = \cancel{\sin^2\alpha}\ \cancel{\cos^2 x - \sin^2 x}$.

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha. = 1-2\sin^2\alpha.$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1.$

1) $\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1.$

$\sin$



$r=?$ $R=?$

$\angle AFE = ?$

$S_{\triangle AEF}$ $\quad BD=13$

$CD=12$

$BD^2 = BG\cdot BA$

$\cancel{169 = (2R-r)\cdot 2R = 4R^2-2Rr}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-1=a \\ y-6=b. \end{cases} \qquad \begin{cases} x=a+1 \\ y=b+6. \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \quad ① \; \cancel{\Rightarrow ab\geq 0} \\ 9a^2+b^2=90 \quad ② \end{cases} \qquad ab\geq 0$$

② $b^2=90-9a^2=9(10-a^2)$ $\qquad b-6a\geq 0$

$\cancel{b=\pm 3\sqrt{10-a^2}}$

① $b^2+36a^2-12ab=ab$. $\qquad \cancel{ab\geq 0}$

$b^2+36a^2=13ab$

$90-9a^2+36a^2=13ab$

$27a^2+90=13ab$.

$81(9a^4+100+60a^2)=169a^2b^2$

$81(9a^4+100+60a^2)=169a^2\cdot 9(10-a^2)$

$81a^4+900+540a^2=1690a^2-169a^4$

$25a^4+(54-169)a^2+90=0$

$25a^4-115a^2+90=0$

$5a^4-23a^2+18=0$

$$\left[\begin{array}{l} a^2 = 1 \\ a^2 = \frac{18}{5}. \end{array}\right.$$

~~Если $a^2 = \frac{18}{5}$, то $b^2 = 9(10 - \frac{18}{5})$~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 81 \end{cases} \\ \begin{cases} a^2 = \frac{18}{5} \\ b^2 = 9 \cdot \frac{32}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

$\sqrt{ab} > 0 \Rightarrow$ a и b одного знака.

1) $\begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 81 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} a^2 = \frac{18}{5} \\ b^2 = 9 \cdot \frac{32}{5}. \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1 \\ b = 9 \end{cases} \\ \cancel{\begin{cases} a = -1 \\ b = -9 \end{cases}} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases} \\ \cancel{\begin{cases} x = 0 \\ y = -3 \end{cases}} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cancel{\begin{cases} a = 3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ b = 12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}} \\ \begin{cases} a = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ b = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \cancel{\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{10}}{5} + 1 \\ y = \frac{12\sqrt{10}}{5} + 6 \end{cases}} \\ \begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{10}}{5} + 1 \\ y = -\frac{12\sqrt{10}}{5} + 6. \end{cases} \end{array}\right.$$

$b - 6a \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -9 \end{cases}$ и $\begin{cases} a = 3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ b = 12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$ не подходят.

Ответ: $(2;15)$; $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{5} + 1; -\frac{12\sqrt{10}}{5} + 6\right)$

Задача 3

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

ОДЗ: $26x - x^2 > 0$

$5^{\log_5 12 \log_5(26x - x^2)} + 5^{\log_5(26x - x^2)} \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$\Rightarrow |x^2 - 26x| = 26x - x^2$

$y = \log_5(26x - x^2)$

$12^y + 5^y \geq 13^y$

При $y < 0$ $12^y > 13^y$ и $5^y > 13^y \Rightarrow 12^y + 5^y > 13^y$

При $y = 0$ $12^y + 5^y = 2$, $13^y = 1$, $2 > 1$

При $y > 0$ ур-е $12^y + 5^y = 13^y$ имеет 1 корень $y = 2$, т.к. $12^2 + 5^2 = 13^2$, тогда:

При $y > 2$ $13^y > 12^y + 5^y$, при $0 < y \leq 2$ $12^y + 5^y \geq 13^y$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

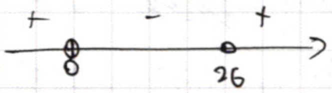
$y \in (-\infty; 2]$

$y = \log_5(26x - x^2)$

$0 < (26x - x^2) \leq 25$

1) $26x - x^2 > 0$

$x(x-26) < 0$

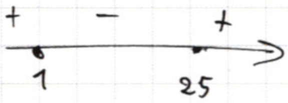


$x \in (0; 26)$

2) $26x - x^2 \leq 25$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$(x-1)(x-25) \geq 0$



$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

$x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$

№5

$f(p) = f(p\cdot 1) = f(p) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

Пусть $n \in \mathbb{N}$

$f(1) = f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(n) + f(\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = -f(n)$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

$f(x/y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

$f(23)=5$ — $f=5$ для одного числа

$f(17)=4$ $f(19)=4$ — $f=4$ для двух чисел

$f(13)=3$ $f(26)=f(2)+f(13)=3$ — $f=3$ для двух чисел

~~$f(11)=2$ $f(22)=2$ $f(25)=2$~~

$f(11)=2$ $f(22)=f(2)+f(11)=2$ $f(25)=f(5)+f(5)=2$ — $f=2$ для трёх чисел

Числа 5, 10, 15, 20, 7, 14, 21, 28 имеют в разложении на простые множители одну 5 или одну 7 и остальные множители 2 или 3, поэтому f от этих чисел равна 1, т.к. $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(2)=0$, $f(3)=0$.

$f=1$ для восьми чисел

Числа 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27 имеют в разложении только 2 и 3, поэтому f от этих чисел равна 0. ($f(2)=0$, $f(3)=0$)

$f=0$ для девяти чисел.

$f(y)>f(x)$ если:

1) $f(y)=5$, $f(x)\le 4$

1 вариант, 24 варианта $1\cdot 24=24$

2) $f(y)=4$, $f(x)\le 3$

2 вар., 22 вар. $2\cdot 22=44$

3) $f(y)=3$, $f(x)\le 2$

2 вар., 20 вар. $2\cdot 20=40$

~~$3\cdot 20=60$~~

4) $f(y)=2$, $f(x)\le 1$

3 вар., 17 вар. $3\cdot 17=51$

5) $f(y)=1$, $f(x)=0$

8 вар., 9 вар. $8\cdot 9=72$

Всего: $24+44+40+51+72=231$ Ответ: 231.

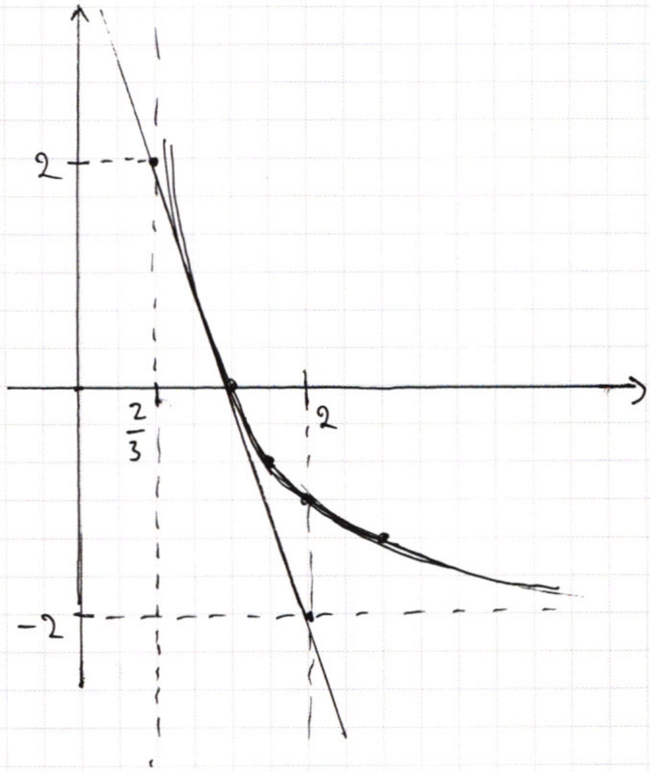
☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$y=\frac{8-6x}{3x-2}=\frac{4}{3x-2}-2=\frac{4}{3(x-\frac{2}{3})}-2$

гипербола



$f(x)=18x^2-51x+28$

$f(2)=$ ~~...~~ $18\cdot4-102+28=-2$

$f(\frac{2}{3})=18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28=2$

$y=f(x)$ – парабола, ветви вверх

$x_в=\frac{17}{12}\in(\frac{2}{3};2)$

$y=ax+b$ – прямая

$y=ax+b>f(x)$ на $(\frac{2}{3};2]$, значит $ax+b$ проходит ~~выше точки~~ не ниже точек $(\frac{2}{3};2)$ и $(2;-2)$

Пусть $y=ax+b$ проходит через эти точки

$\begin{cases}2=\frac{2}{3}a+b\\-2=2a+b.\end{cases}$

$b=-2-2a$

$2=\frac{2}{3}a-2-2a.$

$\frac{4}{3}a=-4.$

$a=-3$

$b=4$

$y=-3x+4$ Проверим, пересекает ли прямая гиперболу

$-3x+4=\frac{8-6x}{3x-2}$

$-9x^2+18x-8=8-6x$

$9x^2-24x+16=0$

$(3x-4)=0$

$x=\frac{4}{3}$ – 1 корень $\Rightarrow$ $y=-3x+4$ касается гиперболы

~~Еслиі~~ ~~В~~ Получается, что прямая зажата между точками $(\frac{2}{3};2)$, $(2;-2)$ и гиперболой, т.е. неравенство будет выполненно только при $a=-3$ и $b=4$

Ответ: $(-3;4)$