# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина $P$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $PQ$. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра $RS$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

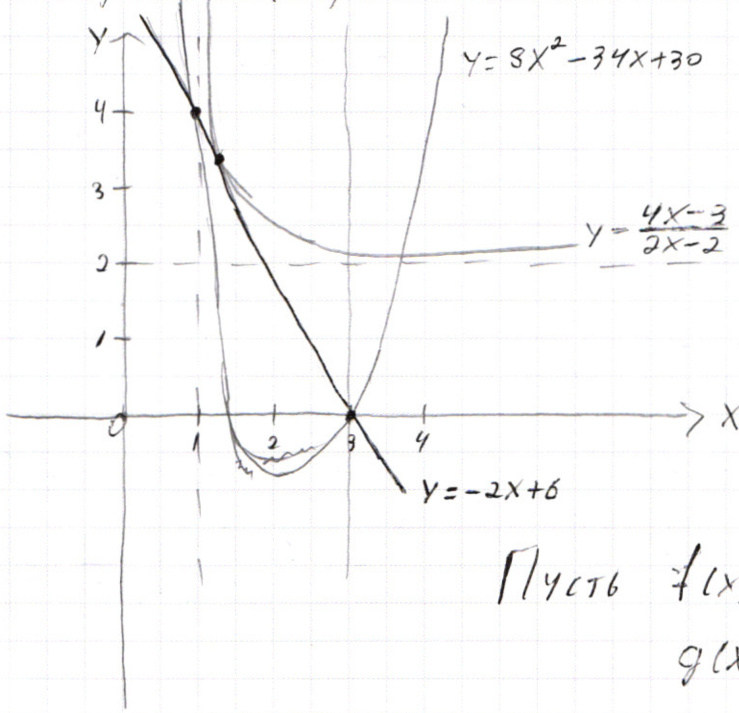
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

Построим графики функций $y=\frac{4x-3}{2x-2}$ и $y=8x^2-34x+30$




Пусть $f(x)=8x^2-34x+30$

$g(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$

$8x^2-34x+30=8(x-3)(x-\frac{5}{4})$ — видно где график пересекает ось OX

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-3}{2x-2}=\cancel{\frac{4-\frac{3}{x}}{}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}}{2-\frac{2}{x}}=\frac{4}{2}=2$

Найдем, в каких точках прямая $ax+b$ может пересекать прямую $x=1$ (на рисунке обозначена пунктиром)

Чтобы соблюдались условия задачи, каждая точка нашей прямой должна лежать выше $f(x)$ и ниже $g(x)$

$f(1)=8-34+30=4$, значит, наша прямая пересекает $x=1$ в точке с ординатой $\geq 4$

Найдем максимальную ординату точки пересечения нашей прямой и $x=1$. ~~Это условие выполнено, если та~~ Ордината будет максимальной, если наша прямая касается графика $g(x)$ и проходит через точку $(3;0)$ (если поднять точку пересечения ещё выше, наша прямая окажется меньше $f(x)$ ~~в~~ при $x=3$ или больше $g(x)$ в интервале между точками пересечения с $g(x)$)

$$\cancel{ax+} \begin{cases} 3a+b=0 \\ ax+b=g(x) \end{cases}$$

Т.к. $ax+b$ касается $g(x)$ в т. $x \Rightarrow a=g'(x)$

$$a=\left[\frac{4x-3}{2x-2}\right]'=\frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{(2x-2)^2}=\frac{8x-8-8x+6}{4(x-1)^2}=$$

$$=-\frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$3a+b=0 \Rightarrow b=-3a$$

$$ax-3a=g(x)$$

$$a(x-3)=g(x)$$

$$-\frac{x-3}{2(x-1)^2}=\frac{4x-3}{2x-2}$$

По графику видно, что есть всего один $x$, удовлетворяющий всем условиям

Подставим ~~в~~ в уравнение $\frac{3}{2}$

$$\frac{3-\frac{3}{2}}{2\cdot\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{4\cdot\frac{3}{2}-3}{2\cdot\frac{3}{2}-2}$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3=3$

$x=\frac{3}{2}$

$a=-\frac{1}{2(\frac{3}{2}-1)^2}=-2$

$-6+b=0$

$b=6$

Наша прямая: $-2x+6$

$-2\cdot1+6=4$

Таким образом, мы нашли максимальную ординату точки пересечения $ax+b$ и $x=1$. Но ранее мы доказали, что она $\geq 4$ $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ наша прямая всегда проходит через точку $(1;4)$

Докажем, что условиям задачи удовлетворяет только прямая $y=-2x+6$: ~~(на рисунке~~

Если повернуть прямую по часовой стрелке (прямая вращается вокруг $(1;4)$), её значение при $x=3$ станет меньше $f(3)$ и условие будет нарушено.

Если повернуть прямую против часовой стрелки, прямая окажется выше $g(x)$ на интервале между точками пересечения с

$g(x)$.

Таким образом, подходит ~~в~~сего одна пара чисел.

Ответ: $(-2; 6)$

№5

$f(1\cdot 1) = f(1) + f(1)$

$f(1) = 2f(1)$

$f(1) = 0$

$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right) = f(1) = 0 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$

Найдём значения $f(x)$ для ~~н~~ натур. $x \in [1; 27]$

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 2 | 0 |
| 3 | 0 |
| 4 | 0 |
| 5 | 1 |
| 6 | 0 |
| 7 | 1 |
| 8 | 0 |
| 9 | 0 |
| 10 | 1 |
| 11 | 2 |
| 12 | 0 |
| 13 | 3 |
| 14 | 1 |
| 15 | 1 |
| 16 | 0 |
| 17 | 4 |
| 18 | 0 |
| 19 | 4 |
| 20 | 1 |
| 21 | 1 |
| 22 | 2 |
| 23 | 5 |
| 24 | 0 |
| 25 | 2 |
| 26 | 3 |
| 27 | 0 |

Для простых чисел сразу найдём $f(x)$ из условия $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

Остальные числа являются ~~про-~~ ~~тыми~~, ~~значит мы~~ произведениями простых, и мы сможем их вычислить, ведь $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

Вопрос задачи в том, сколько из второго столбика можно выбрать чисел, одно из которых больше другого

Посчитаем частотность каждого числа во втором столбике

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

0 x 10

1 x 7

2 x 3

3 x 2

4 x 2

5 x 1

$10 \cdot 15 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 = 150 + 56 + 15 + 6 + 2 =$

$= 150 + 79 = 229$

Мы считали, сколькими спос. можно выбрать каждый x и сколькими y для него

Ответ: 229

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

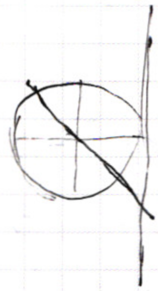
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$



$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$ $\qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - ?$

Не меньше 3 $\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\alpha$ – не одно число

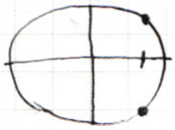
$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(4\beta) = -\frac{8}{17}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 4\beta = -\frac{8}{17} \qquad \frac{\sqrt{17}}{17} \qquad \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 4\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \sin 4\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\cos 2\beta - 1 = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{2} + \frac{2}{\sqrt{17}}$$



I $\quad \sin 4\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin(2\alpha+2\beta)$

$4\beta = 2\alpha + 2\beta + 2\pi n \qquad \pi - 4\beta = 2\alpha + 2\beta + 2\pi n$

$2\beta = 2\alpha + 2\pi n \qquad -6\beta = 2\alpha - \pi + 2\pi n$

$\alpha = \beta + \pi n \qquad \alpha = -3\beta + \frac{\pi}{2} + \pi n$

$$\sin 4\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\sin 2\alpha\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$\boxed{3y-2x\geq 0}$

$3y\geq 2x$

$a=2x \quad b=3y$

$$\begin{cases} b-a=\sqrt{\frac{1}{2}ab-a-b+2} \\ \frac{3}{4}a^2+\frac{1}{3}b^2-3a-\frac{4}{3}b=4 \end{cases}$$

$4=18y^2+6y+8x^2+4x-30xy$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+3y+4x^2+2x=15xy+2$

$(3y+1)^2+(2x+1)^2=15xy+4$

$3x(x-2)+y(3y-4)=4$

$3x^2+3y^2-6x-4y=8x^2+4x+18y^2+6y-30xy$

$5x^2+10x-30xy+15y^2+10y=0$

$x^2+(2-6y)x+3y^2+2y=0$

$x^2+2x-6xy+3y^2+2y=0$

$\frac{D}{4}=(1-3y)^2-3y^2-2y=1+9y^2-6y-3y^2-2y=6y^2-8y+1$

$\cancel{x^2-6xy+3y^2=0 \quad 4y^2-6y^2=0}$

$\cancel{2x+2y=0 \quad x=-y}$

$6y^2-8y+1$

$\frac{D}{4}=16-6=10$

$D=40 \quad y=\frac{8\pm 2\sqrt{10}}{12}$

$x=\frac{6y-2\pm 2\sqrt{6y^2-8y+1}}{2}=$ $3y-2x$ $\quad y\in(-\infty;$

$0 \quad \begin{matrix}1\\-1\end{matrix}$

$x=3y-1\pm\sqrt{6y^2-8y+1}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\frac{2}{(2x-2)^2}(x-3)=\frac{4x-3}{2x-2}$$

$$-\frac{2(x-3)}{4x^2+4-8x}=\frac{4x-3}{2(x-1)}$$

$$-\frac{\cancel{2}(x-3)}{\cancel{4}(x-1)^2}=\frac{4x-3}{\cancel{2}(x-1)}$$

$$-\frac{x-3}{(x-1)^2}=\frac{4x-3}{x-1} \quad x\neq 1$$

$$(3-x)(x-1)=(4x-3)(x-1)^2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2} \quad 3\cdot\frac{1}{4}$$

$$\cancel{k=\frac{3-\frac{3}{2}}{2\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=3} \quad k=-\frac{2}{(2x-2)^2} \quad k=-2$$

$$\cancel{b=-4} \qquad b=6$$

ура

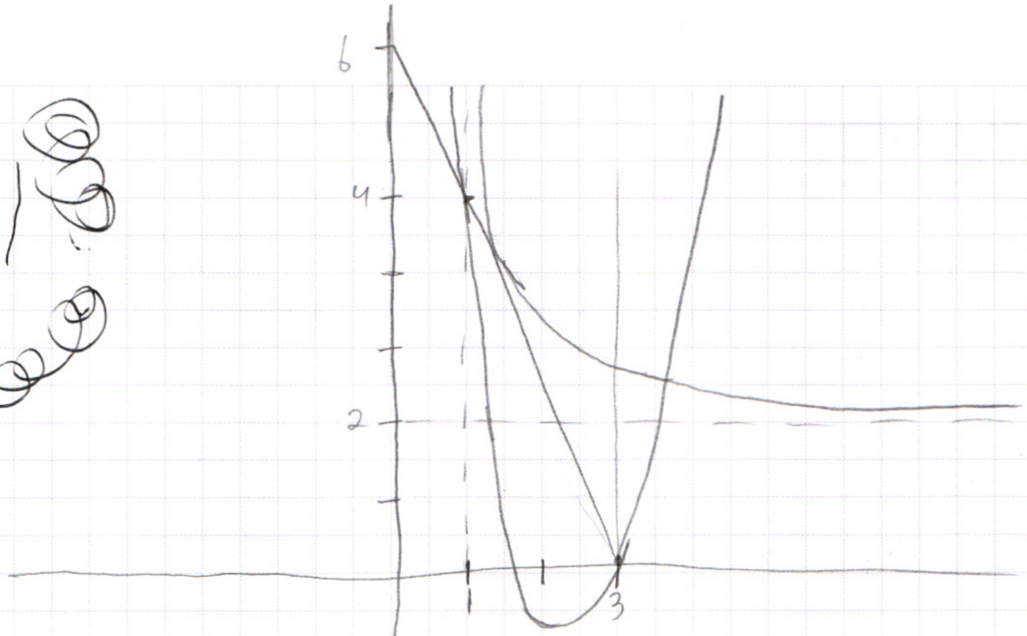
$b\in[6;$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)




$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(\text{четн.})=0$

$3 \le x \le 27$

$3 \le y \le 27$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(5)=1$

$f(7)=1$

$f(11)=2$

$f(13)=3$

$f(17)=4$

$f(19)=4$

$f(23)=5$

$f(35)=2$

$f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)$

$= 0$

$f(1 \cdot 1)=$

$=f(1)+f(1)$

$f(1)=2f(1)$

$f(1)=0$

$$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~1~~ | ~~0~~ | ~~1~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~2~~ | ~~0~~ | ~~3~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~4~~ | ~~0~~ | ~~2~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~0~~ | ~~5~~ | ~~0~~ | ~~2~~ | ~~0~~ | ~~0~~ |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 4 | 1 | 1 | 2 | 5 | 0 | 1 | 3 | 0 |

$8 \cdot 25$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

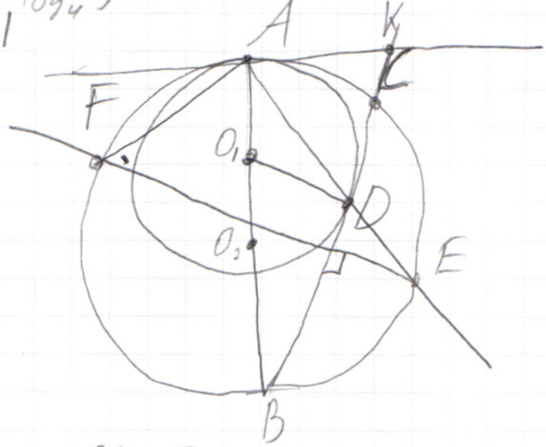
$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$$

$$x^2+6x=t$$

$$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$$

$$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5}$$




$CD=\frac{5}{2}$

$BD=\frac{13}{2}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$8 \cdot 3 - 34 + 10$

$8 \cdot 9 - 34 \cdot 3 + 30$

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 6xy + 3y^2 + 2y = 0 \\ 3y - 2x \geq 0 \quad 3y \geq 2x \\ 3x^2 + 3y^2 - 5x - 4y = 4 \end{cases}$$

$9y^2 + 3y + 4x^2 + 2x - 15xy = 2$

17 · 17 = 119, 17; 289 − 240 = 49

$\frac{48}{16} = 3$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

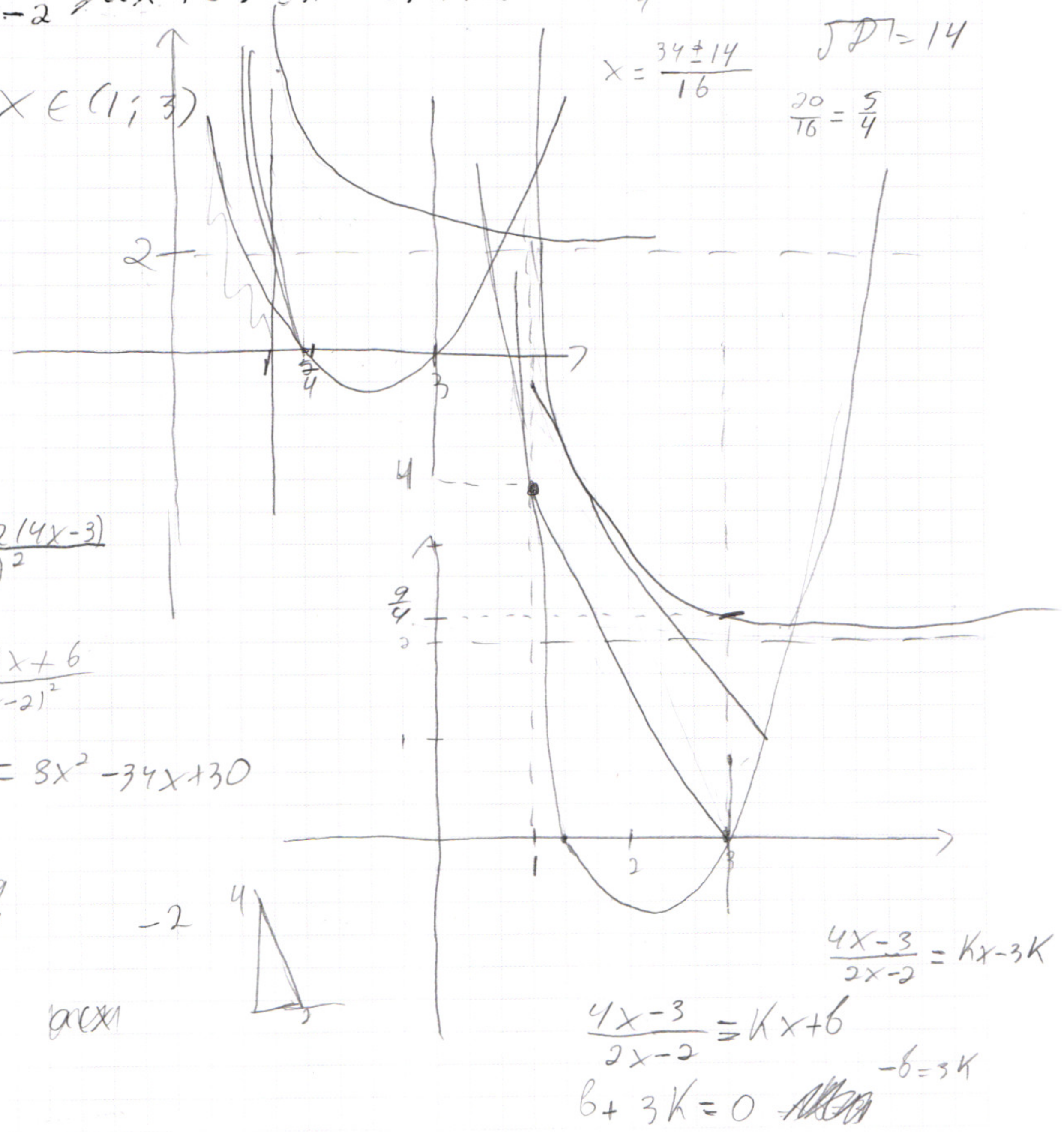
$\frac{D}{4} = 17^2 - 8 \cdot 30 = 49$

$\sqrt{D} = 14$

$x = \frac{34 \pm 14}{16}$

$\frac{20}{16} = \frac{5}{4}$

$x \in (1; 3)$



$\frac{4x-3}{2x-2}$

$\frac{4(2x-2) - 2(4x-3)}{(2x-2)^2}$

$\frac{8x - 8 - 3x + 6}{(2x-2)^2}$

$\frac{4x-3}{2x-2} = 8x^2 - 34x + 30$

$\frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4}$

$-2$

$\frac{4x-3}{2x-2} = kx - 3k$

$\frac{4x-3}{2x-2} = kx + b$

$-6 = 3k$

$b + 3k = 0$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)