МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{7}{\sqrt{17}}$ ~~$\alpha \neq \frac{\pi}{2} \pi n, n \in Z$~~

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z$

по формуле суммы синусов преобразуем 2-ое равенство

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{-4\beta}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{4}{17\sin(2\alpha+2\beta)}$

$\cos 2\beta = -\frac{4}{17}\cdot\frac{-\sqrt{17}}{7}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ - Рассмотрим два случая

I $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \cos 2\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta \\ 2\alpha+2\beta = -2\beta \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 0, \ \mathrm{tg}\alpha = 0 \\ 2\alpha = -4\beta \end{array}\right.$

$\alpha = -2\beta$

$\cos\alpha = \cos 2\beta$

$\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\mathrm{tg}\alpha = \pm\frac{1}{4}$

II $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(2\alpha+2\beta+\pi)=\frac{4}{\sqrt{17}}=\cos 2\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2\alpha+2\beta+\pi=2\beta\\ 2\alpha+2\beta+\pi=-2\beta\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\alpha=-\frac{\pi}{2}, \text{ не удовл. ОДЗ}\\ 2\alpha=-4\beta-\pi\end{array}\right.$

$\alpha=-2\beta-\frac{\pi}{2}$

$\cos\alpha=\cos(2\beta+\frac{\pi}{2})$

$\cos\alpha=\sin -2\beta$

$\cos\alpha=-\sin 2\beta$

$\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos\alpha=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$tg\alpha=\pm 4$

Ответ: $tg\alpha=0$; $tg\alpha=\pm\frac{7}{4}$; $tg\alpha\pm 4$

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$|x^2+6x|=x^2+6x$, т.к. $x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$ (т.к. $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$)

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x)^{\log_4 4}\geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)}\geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$, Проводим замену $\log_4(x^2+6x)=t$

уравнение примет ~~в у~~ вид:

$3^t + 4^t \geq 5^t$

Из геометрии мы знаем, что $3^2+4^2=5^2$

$\cancel{t=2}$

$t \in (-\infty; 2]$, $t=2$ - единственное значение, при котором достигается равенство

Проведём обратную замену

$\cancel{\log_4(x^2+6)}$ $\log_4(x^2+6x) \in (-\infty; 2]$

$\Rightarrow x^2+6x \in (0; 16]$

построим $y=x^2+6x$

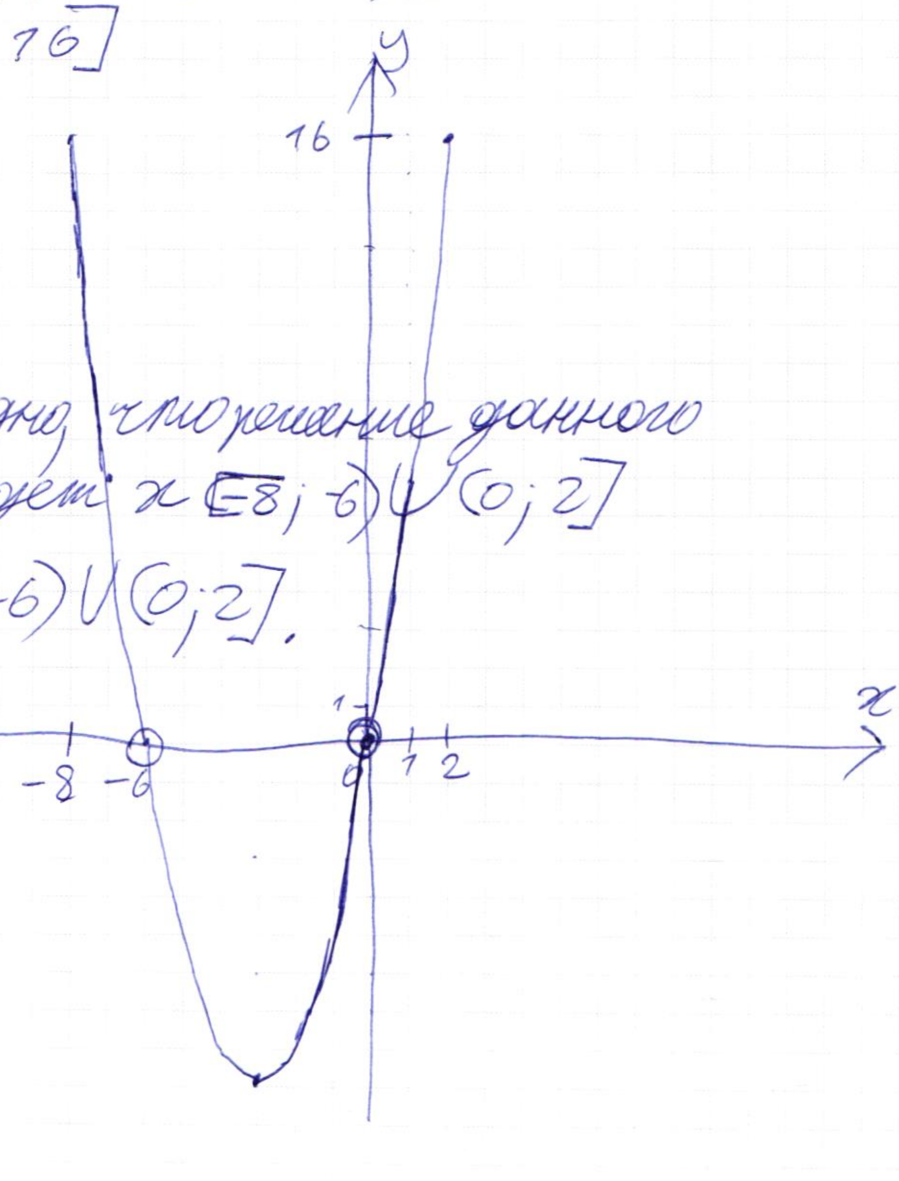
$x^2+6x=16$

$x^2+6x-16=0$

$(x-2)(x+8)=0$

Из графика видно, что решение данного неравенства будет $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$

Ответ: $x \in [-8;-6) \cup (0;2]$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \mid \cdot 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{3y^2-2x}\; 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 9x^2-18x+9+9y^2-12y+4=25 \end{cases}$$

, ~~это~~ Пусть

$a=3y-2$

$b=x-1$, подставим это в ~~исходные~~ исходную систему

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

, заметим что

$a-2b>0$ ~~$a\ ab>0$, значит~~

т.к. $\sqrt{ab}>0$; также $ab>0$

$$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

~~$a^2-5ab+4b$~~

$$\begin{cases} a^2+9b^2=25 \\ a^2-5ab+4b^2=0 \end{cases}$$

$=$

$5b^2+5ab=25$

$b^2+ab=5$

$b(a+b)=5$

$a+b=\frac{5}{b}$

$a=\frac{5}{b}-b$, тогда $a^2=\frac{25}{b^2}-10+b^2$, подставим

в равенство $a^2+9b^2=25$

$\frac{25}{b^2}-10+b^2+9b^2=25 \mid \cdot b^2$

$b^2\neq 0$, докажем от противного

$\begin{cases} a-2\cdot 0=\sqrt{a\cdot 0} \\ a^2+9\cdot 0=25 \end{cases}$

$\begin{cases} a=0 \\ a=\pm 5 \end{cases}$, решений нет

$10b^4-35b^2+25=0 \mid :5$

$2b^4-7b^2+5=0$, решим биквадратное уравн.

~~$D=49-40$~~ $b^2=t\geq 0$

~~$b_1=\frac{-7+3}{2}=2$~~

$2t^2-7t+5=0$

$D=49-40=9$

$t_1=\frac{7-3}{4}=1$

$t_2=\frac{7+3}{4}=2,5$

$b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1$

$b^2=2,5 \Rightarrow b\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

проверим все эти решения

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b=1$ $a=4$

$\cancel{a-2}$ $4-2\cdot 1=\sqrt{4\cdot 1}$

$16+9\cdot 1^2=25$

является решением

$b=\sqrt{\frac{5}{2}}$; $a=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$a-2b<0$, не является решением

$b=-1$ $a=-4$

$-4+2\cdot(-1)=\sqrt{-1\cdot -4}$

не являенся решением

т. к. $a-2b<0$

$b=\sqrt{\frac{5}{2}}$ $a=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\cancel{a}-\sqrt{\frac{5}{2}}+2\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\frac{5}{2}+9\cdot\frac{5}{2}=25$

являенся решением.

проведём обратную замену

$\begin{cases}3y-2=4\\x-1=1\end{cases}$

$\begin{cases}y=2\\x=2\end{cases}$

$3y-2=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x-1=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=\frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}$

$x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

Ответ: $(2;2)$; $\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3}\right)$

N5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(b^2)=f(b)+f(b)\Rightarrow f(b^2)=2f(b)$

$f(b)=f(b^2)+f(\frac{1}{b})\Rightarrow -f(b)=f(\frac{1}{b})$

$\Rightarrow f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$

Найдём все значения $f(x)$ для x от 3 до 27, $x\in N$

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
$f(x)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

10 значений, которые равны 0

7 знач, котор равны 1

3 знач, котор равны 2

2 знач, котор равны 3

2 знач, котор равны 4

1 знач, котор равно 5

Таким образом, для всех x, у котор $f(x)=0$, подходит 15 y; $10 \cdot 15 = 150$

для x, у ком $f(x)=1$, подх. 8 y; $7 \cdot 8 = 56$

для x, у ком. $f(x)=2$, подходит 5 y; $3 \cdot 5 = 15$

$f(x)=3$, 3 y $\quad 2 \cdot 3 = 6$

$f(x)=4$, 1 y $\quad$ ~~$2 \cdot 4 = 4$~~ $2 \cdot 1 = 2$

$f(x)=5$, 0 y

Итого 229 пар значений

Ответ: 229.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
0 0 0 7 0 7 0 0 7 2 0 3 7 7 0 4 0 4 7 7

$f(17)=2$ $f(5)=7$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{7}{\sqrt{17}}$

$(-3y+2)(-x+7)=$

$3xy-2x-3y+2$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$f(3)=0$

$tg\,2\alpha-?$

$(3y-2x+2)(x+y-2)=$

$=$ $f(6)=0$

$f(4)=$

$2f(2)=$

0

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$f(7)=7$

$\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$(x+y+2)(-3x+3y-2)=$

$=-3x^2-3y^2$ $f(9)=0$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha$

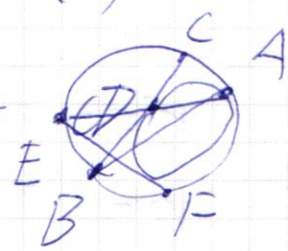
$f(8)=0$

$\sin 30^\circ+\sin 30^\circ=2\sin 30^\circ\cdot\cos 0^\circ$

$\sin t$

$3x^2-3x$ $f(10)=7$

$\sin(t+y)=-\frac{7}{\sqrt{17}}$



$\sin(t+2y)$

$\cos(t+y)=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$1)\cos(t+y)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$tg\frac{t}{2}$

$a)\ t+y=y$

$t=0$

$\sin t+\sin(t+2y)=-\frac{8}{17}$

$t+y=-y$

$t=-2y$

$f(a^2)=$

$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$f(a)+f(a)=2f(a)$

$2\sin\frac{t+y}{\ }\cos y=-\frac{8}{17}$

$f(\frac{7}{a})$

$2\cos y=-\frac{8}{17}:\sin(t+y)$

$f(a)=f(a^2)+f(\frac{7}{a})$

$2\cos y=-\frac{8}{17}\cdot\frac{-\sqrt{17}}{7}$

$f(a)=2f(a)+f(\frac{7}{a})$

$2\cos y=\frac{8}{\sqrt{17}}$

$f(\frac{7}{a})=-f(a)$

$\cos y=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$f(x/y)=f(x)-f(y)$

$x^2+6x>0$

$3^{\log} 3^{\log_4(x^2+\dots}$

$(x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)^{\log_4 3}$

$t=2$

$x^2+6x\geq(x^2+6x)$

$3^t+4^t\geq 5^t$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$625-50b^2+10b^4=25b^2$

$10b^4-75b^2+625=0$

$2b^4-75b^2+725=0$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$D=225$

$3y-2x\geq 0$

$\frac{5}{\sqrt{2,5}}-\sqrt{2,5}=$

$(3y-2x)^2=(x-1)(3y-2)$

$3y-2=a \qquad a^2=9y^2-12y+4$

$= \frac{5-2,5}{\sqrt{2,5}} = \sqrt{2,5}$

$x-1=b \qquad b^2=x^2-2x+1$

$a-2b=3y-2-2x+2=3y-2x$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$\frac{a^2}{3}=3y^2-4y+\frac{4}{3}$

$\frac{625}{b^2}-50+b^2+9b^2=25$

$\cancel{\frac{625}{b^2}}$

$3b^2=3x^2-6x+3$

$\left(\frac{25}{b}-b\right)^2=\frac{625}{b^2}-50+b^2$

$9b^2=9x^2-18x+9$

$9x^2+9y^2-18x-12y=12$

$9x^2-18x+9+9y^2-12y+4=25$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$a-2b>0$

$a+b=\frac{\cancel{25}\,5}{b}$

$a=\frac{25}{b}-b$

$$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$b(a+b)=25$

$5b^2+4ab=25-ab$

$5b^2+5ab=25$

$b^2+ab=25$

$ab=25-b^2$

$a^2+8b^2=25-b^2$

$a^2+8b^2=a^2-4ab+4b^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)