МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

номер 1 (продолжение).

2.1). $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\left(2 \cdot \frac{4}{5} - 1\right) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{3}{5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$3\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -4$

$4\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -4$

$\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha$

$\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha + \cos^2 2\alpha - \cos 2\alpha = 0$

2.2). $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\left(2 \cdot \frac{4}{5} - 1\right) + \cos 2\alpha \cdot 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$3\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 5\sin 2\alpha = -4$

$8\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = \cancel{4}\ -4$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -4$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} - 13^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq 0$

$5^{\log_{12} t} - 13^{\log_{12} t} + \cancel{5}^{\log_5 t} \geq 0$

$t^{\log_{12} 5} - t^{\log_{12} 13} + t^{\log_{12} t} \geq 0$

$-18 \quad 6$

$\sin(2(\alpha+2\beta)) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)$

$5^{\log_{12} t} - 13^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 0$

$5^y - 13^y + 12^y \geq 0$

$5^y + 12^y \geq 13^y$

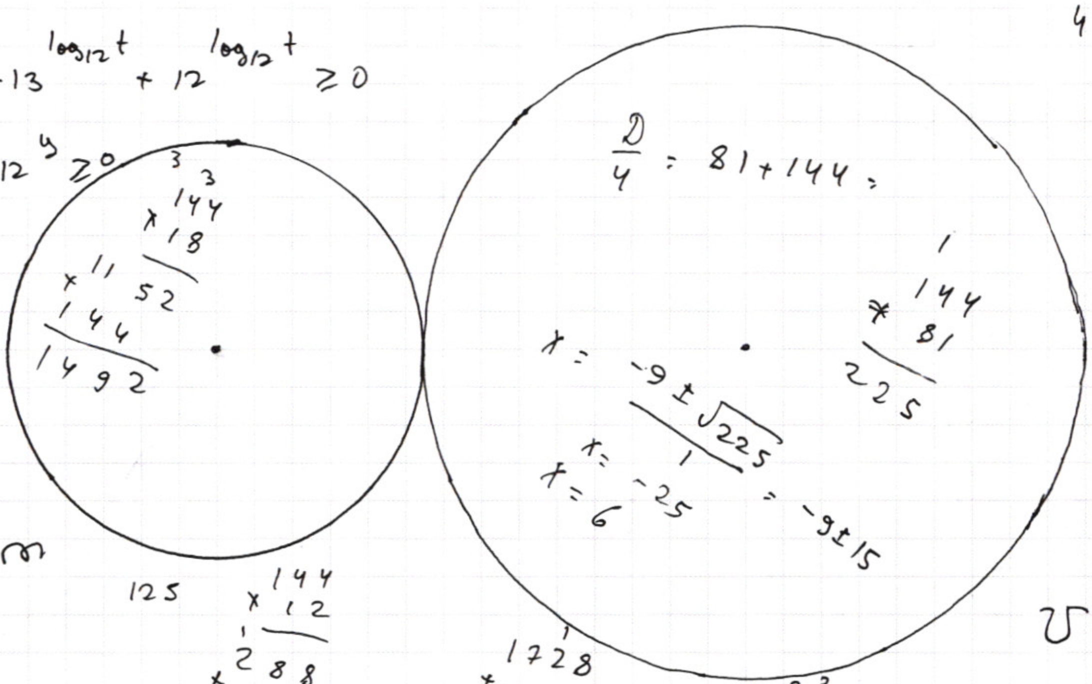
$\frac{1}{5}+\frac{1}{12}$

$-8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 =$

$= -\frac{9}{2} + \frac{15 \cdot 3}{2} - 17 =$

$= \frac{36}{2} - 17 = 1.$

$45 - 9 = 36$



$144 \times 18 = 1152 + 144 = 1492$

$\frac{D}{4} = 81 + 144 =$

$144 + 81 = 225$

$x = \frac{-9 \pm \sqrt{225}}{1} = -9 \pm 15$

$x = -25$

$x = 6$

$125 + 144 = 289$

125

$144 \times 12 = 288 + 144 = 1728$

$1728 + 125 = 1853$

$169 \times 13 = 507 + 169 = 2197$

$\frac{36}{9} - \frac{86}{9}$

$10+15 =$

$-25 + t = -18$

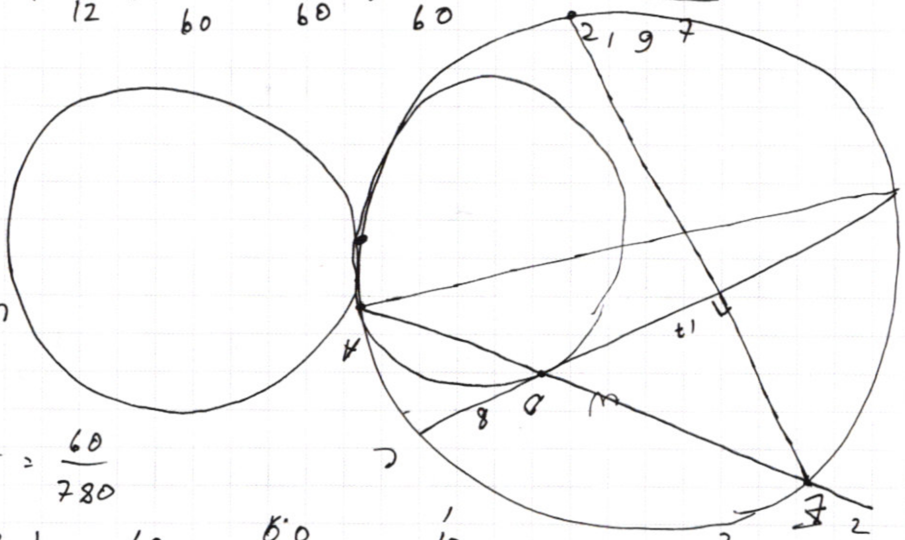
$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} = \frac{12}{60} + \frac{5}{60} = \frac{17}{60}$

$17 + 8 =$

52

$5 + 12 = 17$

$1 + 1 \geq 1$



$8 \times 34 = 272$

$\frac{17}{60} \vee \frac{1}{13} = \frac{60}{780}$

$\frac{221}{780} \vee \frac{60}{780}$

60

$13 \times 60 = 780$

$17 \times 13 = 51 + 17 = 221$

$17 \times 13 = 51 + 17 = 221$

$S\ AEF$

$R\omega,\ R\Omega - ?,\ \angle AFE - ?$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$225 + 450 = 675$ $\quad 675 + 136 = 811$ $\quad 17 \cdot 8 = 136$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$ $\quad x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$y = -8x^2-30x-17$

$ax+b \ge \frac{12x+11}{4x+3}$

$ax+b \le -8x^2-30x-17$ - парабола

$\frac{30}{16} = \frac{15}{8}$

$y \ge \frac{12x+11}{4x+3}$

$0 \ge \frac{-24+11}{-8+3} = \frac{13}{5}$

$-8 \cdot \frac{15^2}{8^2} - 30 \cdot \frac{15}{8} - 17 = = \frac{13}{5}$

$= -\frac{225}{8} - \frac{450}{8} - \frac{136}{8} = -\frac{811}{8}$

$x = -\frac{11}{4}$:

$3 + \frac{2}{-11+3} = 3 + \frac{2}{-8} = 3 - \frac{1}{4} = 2{,}75$

вершина $(\frac{15}{8}; -\frac{881}{8})$

$2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ $\quad$ в точке $-\frac{3}{4}$:

$24 - 11 = 13$

$x = -\frac{3}{4}$:

$-8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 =$

$3 + \frac{2}{-3+3}$

$= -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - 17 =$

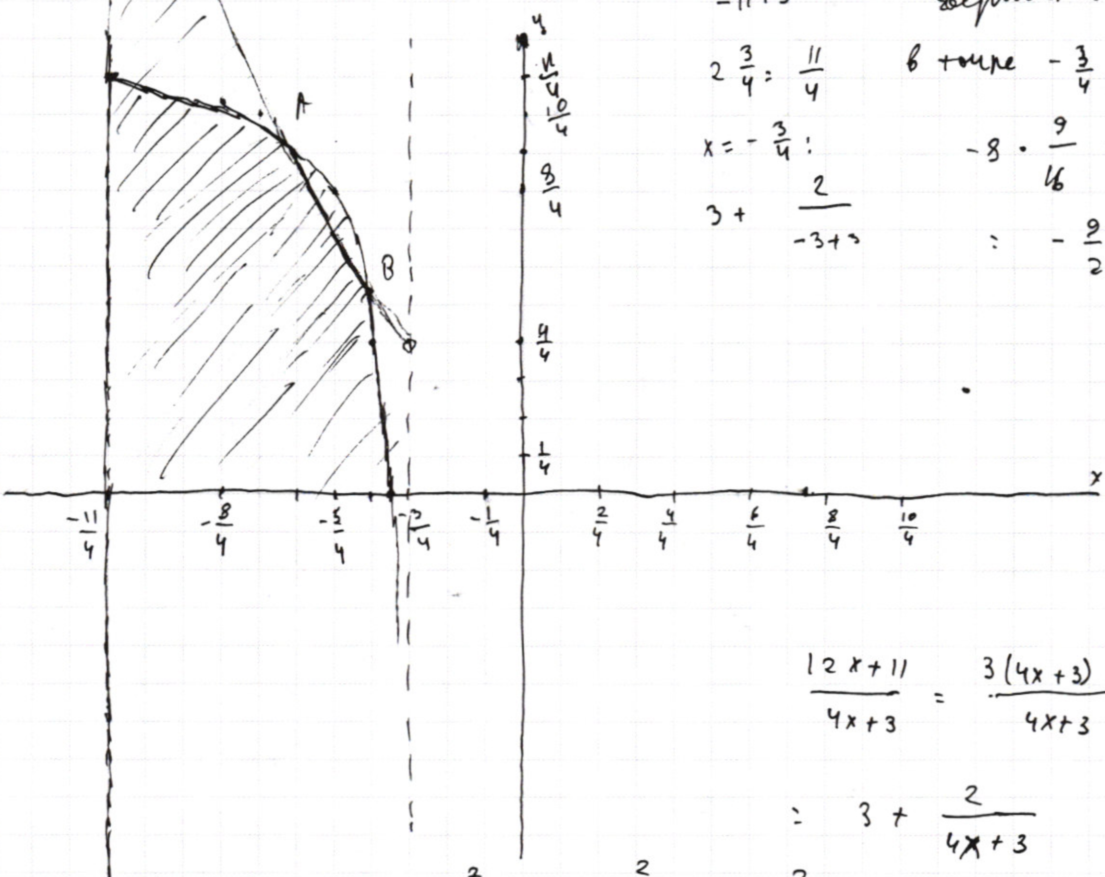
$= \frac{36}{2} - 17 = 18 - 17 = 1$

в точке $-\frac{11}{4}$

$-8 \cdot \frac{121}{16} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 =$

$= -\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - 17 =$

$= 22 - 17 = 5$



$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$3 + -2 = 1$

$15 \cdot 11 = 165$ $\quad 165 - 121 = 44$

$x = -\frac{7}{4}$: $\quad 3 + \frac{2}{-7+3} = 3 + \frac{2}{-4}$ $\quad x = 0$: $\quad 3 + \frac{2}{3}$

$x = -\frac{5}{4}$:

$3 + \frac{2}{-5+3} = 3 + \frac{2}{-2} = 3 - 1 = 2$

$3 - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = \frac{10}{4}$

$x \ne -\frac{3}{4}$

$3 + \frac{2}{-8+3} = 3 - \frac{2}{5} = \frac{15}{5} - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} =$

$= 2\frac{3}{5} = 2{,}6$

$x = -\frac{9}{4}$: $\quad 3 + \frac{2}{-9+3} = 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3} \approx 2,$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

отсюда $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$$\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \qquad \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{2}{\sqrt5}} + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

1). $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \text{ – невозможно т.к. } \operatorname{tg}\alpha \text{ определён} \\ 2\sin\alpha = -\cos\alpha \quad |:\cos\alpha\neq 0 \qquad 2\operatorname{tg}\alpha = -1 \end{array}\right.$$

$$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}}$$

2). $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$$

$$\cancel{4\sin\alpha\cos\alpha = 2\sin^2\alpha}$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha = -2$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha - (1-\sin^2\alpha) = -1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha \cancel{-1} + \sin^2\alpha = \cancel{-1}$$

$$\sin\alpha(2\cos\alpha - \sin\alpha) = 0$$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \quad \Rightarrow \boxed{tg\,\alpha = 0} \\ 2\cos\alpha = \sin\alpha \ \Big| : \cos\alpha \qquad \boxed{2 = tg\,\alpha} \end{array}\right.$$

(N1 продолжение)

Ответ: $-\frac{1}{2}$; 0 ; 2

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2 $\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2). \end{cases}$

(1): $*\ x-2y \geq 0$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0$

$D=(5y-1)^2-4(4y^2+2y-2)=$

$=9y^2-18y+9 = (3y-3)^2$

$x_{1,2} = \dfrac{5y-1 \pm |3y-3|}{2}$

т.к. ± перед модулем, то его можно убрать

$\left[\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{5y-1+3y-3}{2} = 4y-2 \quad (1.1) \\ x = \dfrac{5y-1-3y+3}{2} = y+1 \quad (1.2) \end{array}\right.$

подставим (1.2) в (2):

$(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y=12$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y=12$

$10y^2-20y-3=12$

$2y^2-4y-3=0$

$\left[\begin{array}{ll} y = \dfrac{2+\sqrt{10}}{2} & x = \dfrac{4+\sqrt{10}}{2} \\ y = \dfrac{2-\sqrt{10}}{2} & x = \dfrac{4-\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$

проверим $*$:

$\dfrac{4+\sqrt{10}}{2} - 2\left(\dfrac{2+\sqrt{10}}{2}\right) \geq 0$

$\dfrac{4+\sqrt{10}}{2} - 2 - \sqrt{10} \geq 0$

$4+\sqrt{10}-4-2\sqrt{10} \geq 0$

$-\sqrt{10} \geq 0$ ложь

$\dfrac{4-\sqrt{10}}{2} - 2\left(\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\right) \geq 0$

$\dfrac{4-\sqrt{10}}{2} - 2 + \sqrt{10} \geq 0$

$4-\sqrt{10}-4+2\sqrt{10} \geq 0$

$\sqrt{10} \geq 0$ верно

подставим (1.1) в (2):

$(4y-2)^2+9y^2-4x-18y=12$

$16y^2-8y+4+9y^2-4(4y-2)-18y = 12$

$25y^2-42y=0$

$y(25y-42)=0$

$\left[\begin{array}{ll} y=0 & x = 4y-2 = -2 \\ y = \dfrac{42}{25} & x = 4y-2 = \dfrac{168}{25} - \dfrac{50}{25} = \dfrac{118}{25} \end{array}\right.$

проверим $*$:

$(-2;0)$ $\quad -2-2\cdot 0 \geq 0$ ложь

$\left(\dfrac{118}{25};\dfrac{42}{25}\right)$ $\quad \dfrac{118}{25} - 2\cdot\dfrac{42}{25} \geq 0$ верно

Ответ: $\left(\dfrac{118}{25};\dfrac{42}{25}\right)$; $\left(\dfrac{4-\sqrt{10}}{2};\dfrac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

№3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

замена: $t = x^2 + 18x$ $\qquad$ * $x^2+18x > 0$

$x(x+18) > 0 \Rightarrow$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} - 13^{\log_{12}|x^2+18x|} + x^2 + 18x \geq 0$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$5^{\log_{12} t} - 13^{\log_{12}|t|} + t \geq 0$

т.к $t > 0$, то модуль можно убрать

$5^{\log_{12} t} - 13^{\log_{12} t} + t \geq 0$

$5^{\log_{12} t} - 13^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 0$ $\qquad$ замена $\log_{12} t = y$

$5^y - 13^y + 12^y \geq 0 \iff 5^y + 12^y \geq 13^y$

~~$12^y + 12^y \geq 13^y$~~

~~$y \in [-2; 2]$~~

$\begin{cases} \log_{12} t \leq 2 \\ \cancel{\log_{12} t \geq -2} \end{cases} \iff \begin{cases} \log_{12} t \leq \log_{12} 144 \\ \cancel{\log_{12} t \geq \log_{12} \frac{1}{144}} \end{cases}$

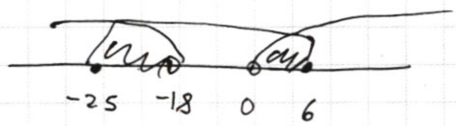
$t \leq 144$ $\qquad$ ~~$t \in [\frac{1}{144}; 144]$~~

~~$t \geq \frac{1}{144}$~~

$\begin{cases} x^2 + 18x \leq 144 \\ \cancel{x^2 + 18x \geq \frac{1}{144}} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 18x - 144 \leq 0 \iff x \in [-25; 6] \ (1) \\ \cancel{x^2 + 18x - \frac{1}{144} \geq 0 \ (2)} \ \cancel{(2)\ 144x^2 + 144x \geq 0} \end{cases}$

(1) пересечем со *

$x \in [-25; -18) \cup (0; 6]$.



(2). пересечем со *

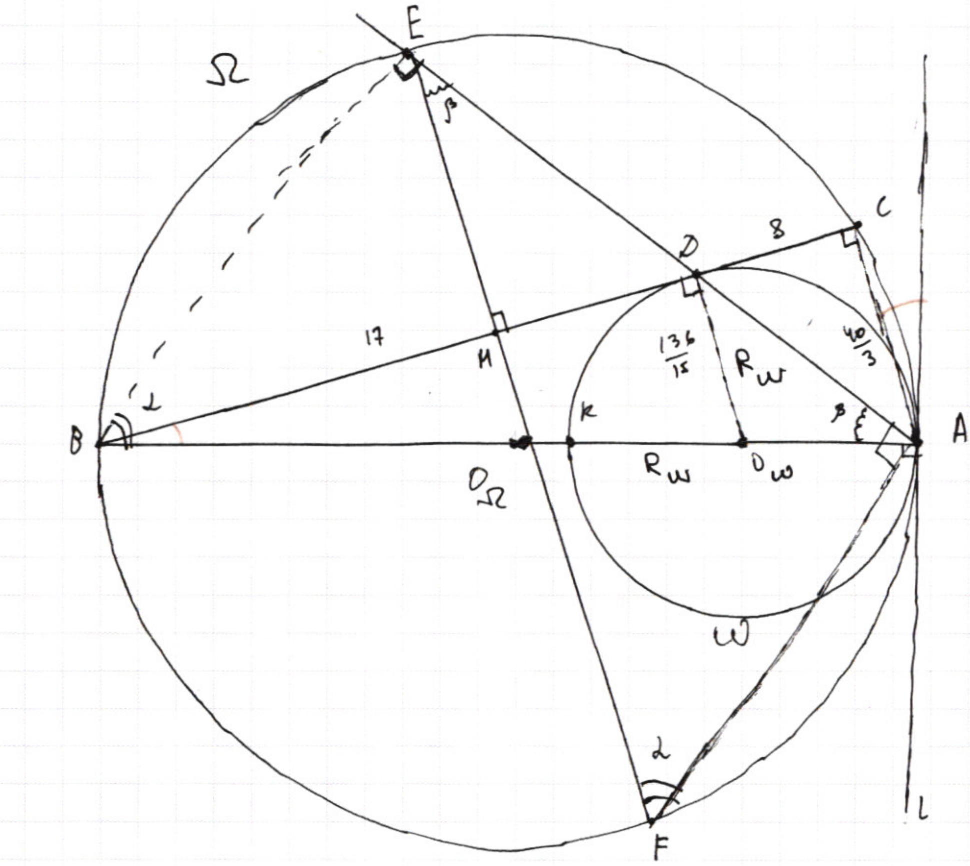
$144x^2 + 2592x - 1 \geq 0$

~~часть~~ ответ:

$x \in [-25; -18) \cup (0; 6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4



$CD = 8$

$BD = 17.$

$\triangle BDO_\omega \sim \triangle BCA$

$\frac{BD}{BC} = \frac{17}{25} = \frac{2R_\Omega - R_\omega}{R_\Omega - R_\omega}$

$7R_\Omega - 7R_\omega = 50R_\Omega - 25R_\omega$

$-43R_\Omega = -18R_\omega$

$43R_\Omega = 18R_\omega.$

$R_\omega = \frac{43}{18}R\Omega$

$BD \cdot DC = ED \cdot DA = 17 \cdot 8$

$BK = 2R_\Omega - 2R_\omega$

$DO_\omega = R_\omega$

по т. Пифагора

$17^2 + R_\omega^2 = BO_\omega^2$

$BO_\omega = 2R_\Omega - R_\omega$ $\quad \underbrace{17^2}_{289} + \cancel{R_\omega^2} = 4R_\Omega^2 - 4R_\Omega \cdot R_\omega + \cancel{R_\omega^2}$

~~$289 + \left(\frac{43}{18}R_\Omega\right)^2 = 4 \cdot R_\Omega^2 - 4 \cdot R_\Omega \cdot \frac{43}{18} \cdot R_\Omega + \frac{43}{18}R$~~

$289 = 4R_\Omega^2 - 4 \cdot R_\Omega \cdot \frac{43}{18}R_\Omega$ $\quad \boxed{R_\Omega = x}$

$289 = 4x^2 - \overset{2}{4}x \cdot \frac{43}{\underset{9}{18}}x$ $\quad 289 = 4x^2 - 2x^2 \cdot \frac{43}{9}$

$289 = 4x^2 - x^2 \cdot \frac{86}{9}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4). продолжение $\frac{BD}{BC} = \frac{17}{25}$ $\frac{BO_\omega}{BA} = \frac{17}{25}$ $\frac{2R_\Omega - R_\omega}{2R_\Omega} = \frac{17}{25}$

$17^2 + R_\omega^2 = (BO_\omega)^2$ (по т. Пифагора).

$17^2 + \cancel{R_\omega^2} = 4R_\Omega^2 - 4R_\Omega \cdot R_\omega + \cancel{R_\omega^2}$ $50R_\Omega - 25R_\omega = 34R_\Omega$

$289 = 4R_\Omega^2 - 4R_\Omega \cdot R_\omega$ $16R_\Omega = 25R_\omega$

$R_\Omega = \frac{25}{16} R_\omega$ $17 \times 8 = 136$

$289 = 4(R_\Omega)^2 - 4 \cdot \frac{16}{25}(R_\Omega)^2$

$R_\Omega = x$ $R_\omega = \frac{16}{25} R_\Omega$

$289 = 4x^2 - \frac{64}{25} \cdot x^2$ $16 \times 4 = 64$ $17 \times 5 = 85$

$289 = \frac{100}{25}x^2 - \frac{64}{25}x^2$ $289 = \frac{36}{25}x^2$

$17 = \frac{6}{5}x$ $\boxed{x = \frac{85}{6} = R_\Omega}$

$R_\omega = \frac{16}{25}R_\Omega = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{8 \cdot 17}{5 \cdot 3} = \frac{136}{15}$

Ответ: $R_\Omega = \frac{85}{6}$ $R_\omega = \frac{136}{15}$

$\angle AFE = \angle EBA$.

$AB = 2R_\Omega = \frac{85}{3}$. $DO_\omega = R_\omega = \frac{136}{15}$

$\frac{DO_\omega}{CA} = \frac{17}{25}$ $\frac{\frac{136}{15}}{CA} = \frac{17}{25}$

$17CA = \frac{25 \cdot 136}{15}$

$17CA = \frac{5 \cdot 136}{3}$ $CA = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3}$

N4 (продолжение).

$ED \cdot DA = 17 \cdot 8$

$\angle BEA = 90^\circ$ (опирается на диаметр).

$\angle BAE = \beta = 90 - \alpha$.

$\angle \beta = \frac{1}{2} \angle KO_\omega D$ (вписанный угол).

$\angle BO_\omega D$: $tg \angle BO_\omega D = \frac{17 \cdot 15}{136} = \frac{15}{8}$

$\angle BO_\omega D = arctg \frac{15}{8}$

$\angle \beta = \frac{1}{2} arctg \frac{15}{8}$

$\angle EBA = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} arctg \frac{15}{8} = \angle EFA$ (опираются на равные дуги).

$EF \perp BC \Rightarrow EF$ проходит через O_Ω

$EF = AB = 2R_\Omega = \frac{85}{3}$

$\angle FAE = 90^\circ$ (опирается на диаметр).

$\triangle BEA = \triangle FEA$ (~~по гипотенузе и углу~~)

$S_{\triangle FEA} = S_{\triangle BEA}$.

по т. синусов в $\triangle BEA$: $\frac{BE}{\sin\beta} = \frac{EA}{\sin\alpha} = \frac{BA}{\sin 90^\circ} = BA$

$\frac{EB}{\sin\beta} = BA = 2R_\Omega$

$\frac{EB}{\sin\left(\frac{1}{2} arctg \frac{15}{8}\right)} = \frac{2 \cdot 136}{15}$ $\qquad EB = \frac{2 \cdot 136 \cdot \sin\left(\frac{1}{2} arctg \frac{15}{8}\right)}{15} =$

$= \frac{272 \sin\left(\frac{1}{2} arctg \frac{15}{8}\right)}{15}$

$136 \cdot 2 = 272$

$S_{\triangle EBA} = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot BA \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{272 \sin\left(\frac{1}{2} arctg \frac{15}{8}\right)}{15} \cdot \frac{272}{15} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} arctg \frac{15}{8}\right)$

$=$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4 (продолжение).

$$S_{\triangle EBA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{272^2}{15^2} \cdot \sin\left(\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{15}{8}}_{\alpha}\right) \cdot \cos\left(\underbrace{\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{15}{8}}_{\alpha}\right)$$

$\sin\frac{\alpha}{2}$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$

$tg\,\alpha = \frac{15}{8}$

$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos 2\alpha$

$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \cos\alpha > 0$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Big| : \cos^2\alpha$

$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{225}{64} + \frac{64}{64} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$$\begin{array}{r} 225 \\ +\ 64 \\ \hline 289 \end{array}$$

$\frac{289}{64} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \frac{64}{289}$

$\cos\alpha = \frac{8}{17}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 2 \cdot \frac{64}{289} - 1 = \frac{128}{289} - \frac{289}{289} = -\frac{161}{289}$

$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\frac{289}{289} + \frac{161}{289}}{2}} = \sqrt{\frac{442}{289 \cdot 2}} =$

$$\begin{array}{r} 289 \\ -\ 128 \\ \hline 161 \end{array}$$

$= \sqrt{\frac{221}{289}} = \frac{\sqrt{221}}{17}$

$$\begin{array}{r} 281 \\ +\ 161 \\ \hline 442 \end{array}$$

$\cos\frac{\alpha}{2}:$ $\quad \cos\alpha = \frac{8}{17}$ $\quad \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$

$1 + \frac{8}{17} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\frac{25}{17} = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$

$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{25}{34}$

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$$S_{\triangle EBA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{272^2}{15^2} \cdot \frac{\sqrt{221}}{17} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{1}{\cancel{2}_{\,1}} \cdot \frac{\overset{\overset{4}{8}}{\cancel{272}} \cdot \overset{8\sqrt{34}}{\cancel{272}} \cdot \sqrt{221} \cdot \overset{1}{\cancel{5}}}{15 \cdot \underset{3}{\cancel{15}} \cdot \underset{1}{\cancel{17}} \cdot \cancel{\sqrt{34}}} =$$

$$= \frac{4 \cdot 8\sqrt{34} \cdot \sqrt{221}}{15 \cdot 3}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

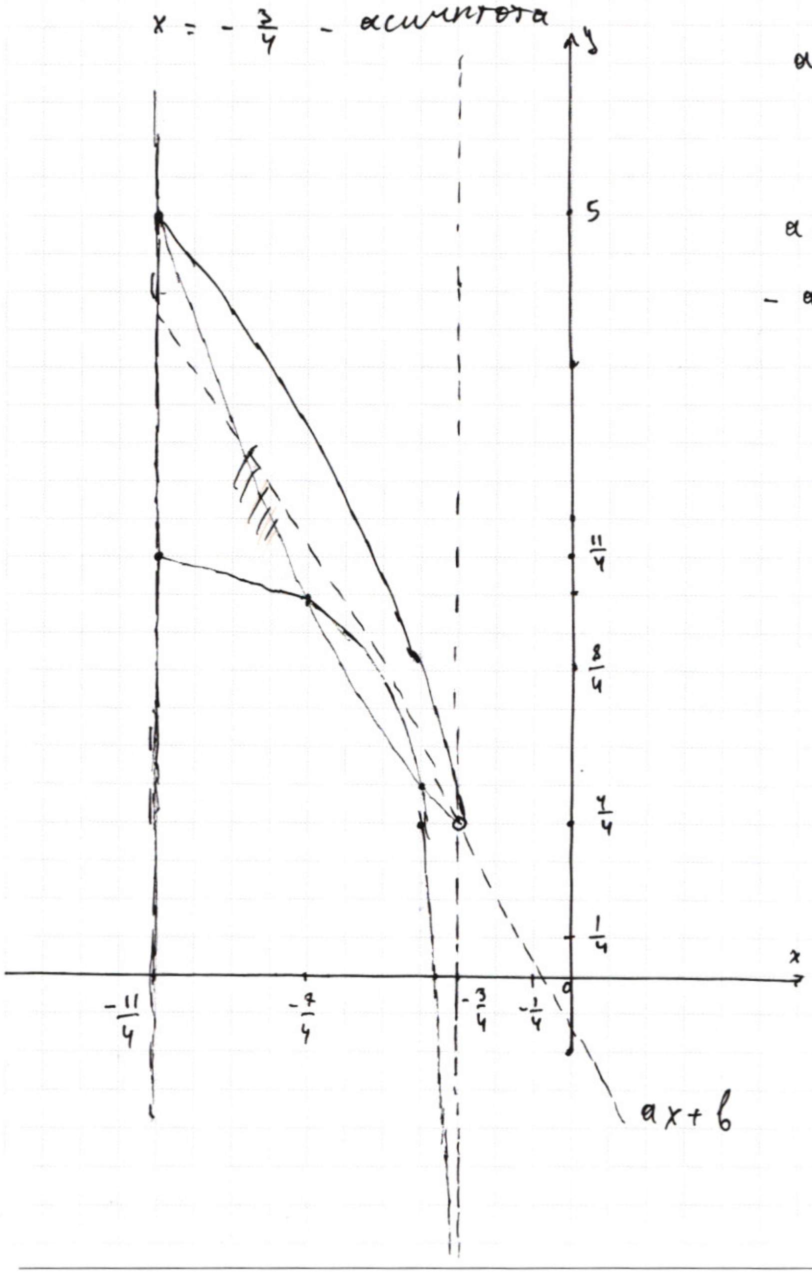
№6.
$$\begin{cases} ax+b \geq \dfrac{12x+11}{4x+3} & (1) \\ ax+b \leq -8x^2-30x-17 & (2) \end{cases}$$

$ax+b$ – лин. функция

(2) : $y = -8x^2-30x-17$ – кв. функция $x_0 = \frac{15}{8}$ $y_0 = -\frac{811}{8}$

(1) : $y = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$ – дробно-рациональная функция

$x = -\frac{3}{4}$ – асимптота



$ax+b$ должна лежать под параболой и над дробно-рац. ф.

$ax+b$ не достигает $(-\frac{3}{4}; 1)$

$-a \cdot \frac{3}{4} + b = 1$