МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}; \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\dfrac{8}{17}. \end{cases}$$

Заметим, $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta \Rightarrow$

$2\cos 2\beta = \dfrac{-\frac{8}{17}}{-\frac{1}{\sqrt{17}}} = \dfrac{8}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos 2\beta = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$ (Поделим второе на первое).

Заметим теперь, $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha$

Т.к. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$, то $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\dfrac{4}{\sqrt{17}}$ из ОТ.

Аналогично $\sin 2\beta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{17}}$.

Разберем возможные случаи.

1) Если $\sin 2\beta = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$ и $\cos(2\alpha+2\beta) = \dfrac{4}{\sqrt{17}}$ или $\sin 2\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ и $\cos(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}$, то $\sin 2\alpha = -\dfrac{8}{17} - \dfrac{1}{\sqrt{17}}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{17}} + \dfrac{1}{\sqrt{17}}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{17}} = -\dfrac{8}{17}$.

2) Если $\sin 2\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ и $\cos(2\alpha+2\beta) =$

1) Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$, то
$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} - \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}$.

2) Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, то
$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$.

3) Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$, то
$\sin 2\alpha = 0$.

4) Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\cos(2\alpha + 2\alpha) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, то
$\sin 2\alpha = 0$.

Для 3и 4 случая получаем, что ~~tg~~ $\alpha = \frac{\pi}{2}k$, но т.к тангенс определен, то $\alpha = \pi k$ и $tg\alpha = 0$.

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$.

Для 1-ого случая: $-\frac{1}{\sqrt{17}} = \cancel{\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}}}$
$= -\frac{8}{17} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{15}{17}$. Получаем: $-\frac{8}{17} = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\frac{15}{17} = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow$
$2\cos^2\alpha = \frac{32}{17}$, поделив первое на второе получим: $tg\alpha = -\frac{1}{4}$.

Для 2-ого случая: $-\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = -\frac{15}{17}$.
Значит $-\frac{8}{17} = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $-\frac{15}{17} = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow$
$2\cos^2\alpha = \frac{2}{17} \Rightarrow tg\alpha = -4$. Таким образом рассмотрев все возможные случаи мы получили лишь 3 значения тангенса, значит, по условию, они все достижимы.

Ответ: -4; $-\frac{1}{4}$; 0.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

Преобразуем выражения:

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3(x-1)^2+(y-1)(3y-1)-8=0 \end{cases}$$

Сделаем замену: $a=x-1$; $b=3y-2$, тогда:

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 3a^2+\left(\frac{b-1}{3}\right)(b+1)-8=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2-1-24=0 \end{cases}$$

Возведем первое равенство в квадрат, получим: $b^2-4ab+4a^2=ab$, причем $b-2a\geq 0$. Значит,

$$\begin{cases} 4a^2-5ab+b^2=0 \\ 9a^2+b^2-25=0 \\ b-2a\geq 0 \end{cases}$$

Решим первое рав., как квадратное относительно a:

$D=25b^2-16b^2=9b^2 \Rightarrow$

$a=\frac{5b\pm|3b|}{8}=\frac{5b\pm 3b}{8}\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} a=\frac{1}{4}b \\ a=b \end{array}\right.$$

1) Если $a=\frac{1}{4}b$, то $\frac{9}{16}b^2+b^2-25=0 \Leftrightarrow$

$\frac{25}{16}b^2-25=0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{4}b-5\right)\left(\frac{5}{4}b+5\right)=0\Rightarrow$

$b=\pm 4 \Rightarrow a=\pm 1$. Если $a=1$, $b=4$, то $b-2a\geq 0$, если $a=-1$, $b=-4$, то $b-2a<0$ – не удв. ~~условию~~

2) Если $a=b$, то $10b^2-25=0 \Leftrightarrow 2b^2-5=0 \Leftrightarrow (\sqrt{2}b-\sqrt{5})(\sqrt{2}b+\sqrt{5})=0$..

$b = \pm \sqrt{\frac{5}{2}} \Rightarrow a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$. Если $a = b = \sqrt{\frac{5}{2}}$, то $b - 2a < 0$ — не удв, если $a = b = -\sqrt{\frac{5}{2}}$, то $b - 2a > 0$.

Вернемся к x и y:

1) $\begin{cases} x - 1 = a = 1 \\ 3y - 2 = b = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x - 1 = a = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ 3y - 2 = b = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 1 \\ y = \dfrac{-\sqrt{\frac{5}{2}} + 2}{3} \end{cases}$

Ответ: $x = y = 2$; $x = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 1$, $y = \dfrac{-\sqrt{\frac{5}{2}} + 2}{3}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

Заметим $(x^2+6x) \geq 0$. Тогда уберем модуль:

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - 3^{\log_4(x^2+6x)}.$$ Т.к

$x^2+6x \geq 0$, то $(x^2+6x)^{\log_4 5} = 5^{\log_4(x^2+6x)}$. Значит,

$$x^2+6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)} - 3^{\log_4(x^2+6x)}.$$ Запишем:

$$x^2+6x = 4^{\log_4(x^2+6x)} \Rightarrow 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq$$

$$5^{\log_4(x^2+6x)} - 3^{\log_4(x^2+6x)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4^{\log_4(x^2+6x)} + 3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}.$$

Рассмотрим функции $f(t) = 5^t$ и $g(t) = 4^t + 3^t$. Очевидно, их графики имеют ровно 1 общую точку: при $t = 2$. Действительно, при $t=2$ $f(t) = g(t)$, при $t < 2$ $g(t) > f(t)$, а при $t > 2$: $f(t) > g(t)$! Таким образом,

$$4^{\log_4(x^2+6x)} + 3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)},$$ когда $\log_4(x^2+6x) \leq 2$.

Значит, $x^2+6x \leq 4^2 = 16 \Leftrightarrow$

~~$x^2+6x-16 \le 0 \Leftrightarrow (x+9)(x-3)$ $(x+8)(x-2) \le 0 \Rightarrow$~~

~~$x \in [-8; 2]$, т.к $x^2+6x \geq 0$, то $\left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > 0 \end{array}\right.$~~

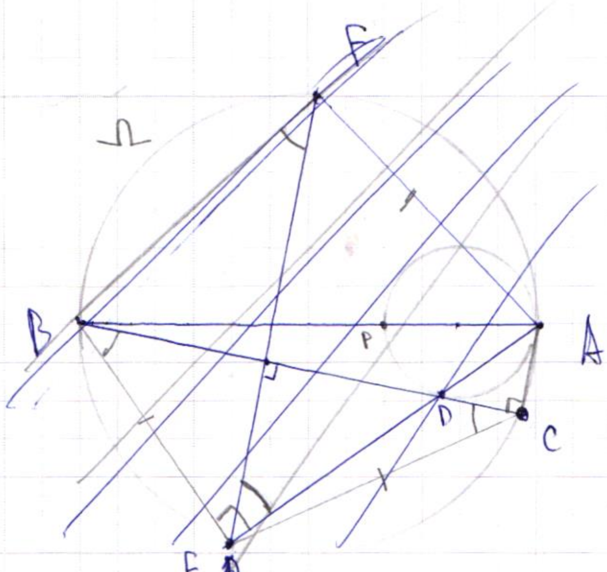
$x^2+6x-16 \le 0 \Leftrightarrow (x+8)(x-2) \le 0 \Rightarrow$

$x \in [-8; 2]$, т.к $x^2+6x > 0$, то $\left[\begin{array}{l} x < -6 \\ x > 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$x \in (0; 2]$.

Ответ: $x \in (0; 2]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



~~$CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.~~

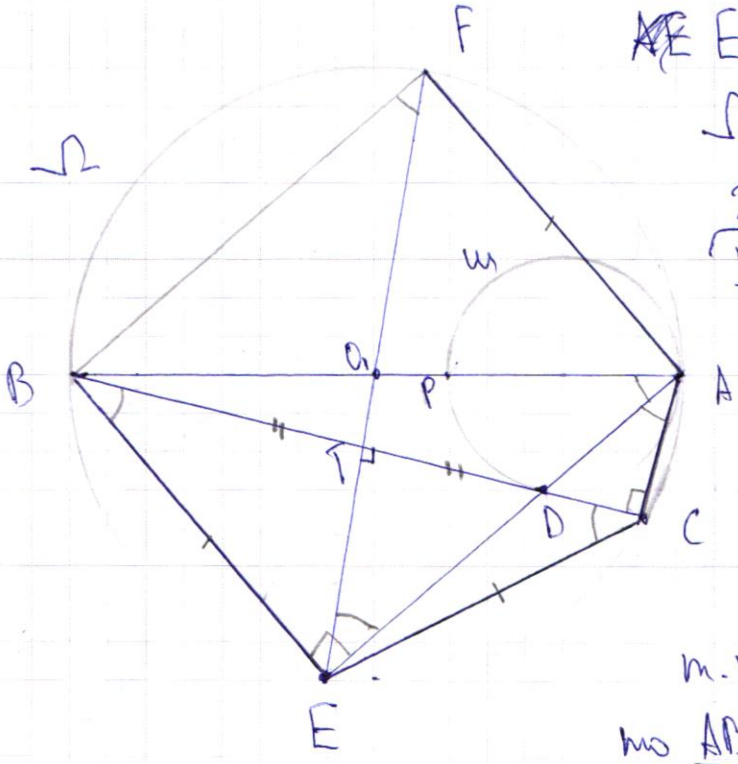
Решение:

T – пересеч. BC и EF,

P – пересеч AB и ω.

O_1 – пересеч AB и EF.

По лемме Архимеда для ω, Ω и хорды Ω BC получим что ~~AE~~ E – середина BC (т.к Ω и ω кас. внут. образом и BC кас. ω). Тогда $BE = EC$ и $\angle BAE = \angle EAC$.



Заметим, $\angle BCA = 90$, т.к опирается на AB – диаметр. Тогда, т.к AD – биссектриса в $\triangle ABC$ то $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{13}{5}$. Пусть $AB = 13x$, тогда $AC = 5x$. Найдем BC: $BC^2 = (13x)^2 - (5x)^2 = (12x)^2 \Rightarrow BC = 12x$. Но $BC = BD + DC = 9 \Rightarrow x = \frac{3}{4}$. Значит, $AC = \frac{15}{4}$.

$AB = 13 \cdot \frac{3}{4} = \frac{39}{4}$. Значит, радиус Ω равен $\frac{39}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{39}{8}$.

Найдем AP используя степень точки B относительно ω: $BP \cdot BA = BD^2 \Rightarrow BP = \frac{BD^2}{BA} = \frac{\left(\frac{13}{2}\right)^2}{\frac{39}{4}} = \frac{13}{3} \Rightarrow$
$PA = AB - BP = \frac{39}{4} - \frac{13}{3} = 13\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right) = 13 \cdot \frac{5}{12} = \frac{65}{12} \Rightarrow$
радиус ω равен $\frac{65}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{65}{24}$.

2) Заметим, $\triangle BEC$ - равнобедр $\Rightarrow$ T - середина BC $\Rightarrow$ TO_1 - средняя линия в $\triangle ABC$, т.к $TO_1 \perp BC$, $AC \perp BC$, т.к $\angle ACB = 90$ (опир на д.) и $BT = TC \Rightarrow O_1$ - центр Ω (т.к O_1 - середина AB).
Т.к AC и EF параллельны (как уже было сказано они обе перпендик. BC), то $AF = CE \Rightarrow$ ACEF - равнобок трапеция $\Rightarrow$ высота из A на EF равна высоте из C на EF, а она равна $CT = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2} \Rightarrow S_{\triangle FAE} = S_{\triangle FCE} = \frac{1}{2} CT \cdot FE$, где FE диаметр, т.к содержит O_1

$S_{\triangle FAE} = \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{39}{4} = \frac{39 \cdot 9}{8} = \frac{351}{8}$.

Ответ: $R_\Omega = \frac{39}{8}$; $R_\omega = \frac{65}{24}$; $S_{\triangle FAE} = \cancel{\frac{351}{8}}\ \frac{351}{8}$.

3) $TE = \frac{EF - AC}{2} = \frac{\frac{39}{4} - \frac{15}{4}}{2} = \frac{\frac{24}{4}}{2} = 3$.

$EC^2 = TC^2 + TE^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 + 9 = \frac{81}{4} + 9 = \frac{81+36}{4} =$
$= \frac{117}{4} \Rightarrow EC = \frac{\sqrt{117}}{2} \Rightarrow \sin\angle CEF = \frac{CT}{EC} = \cancel{\frac{\sqrt{117}}{2}}$
$= \frac{\frac{9}{2}}{\frac{\sqrt{117}}{2}} = \frac{9}{\sqrt{117}} \Rightarrow \angle CEF = \arcsin\frac{9\sqrt{117}}{117}$ ~~fle~~
$\angle CEF = \angle AFE \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{9\sqrt{117}}{117}\right)$

Ответ: $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{9\sqrt{117}}{117}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\dfrac{8}{17} = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha \qquad = \sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1$

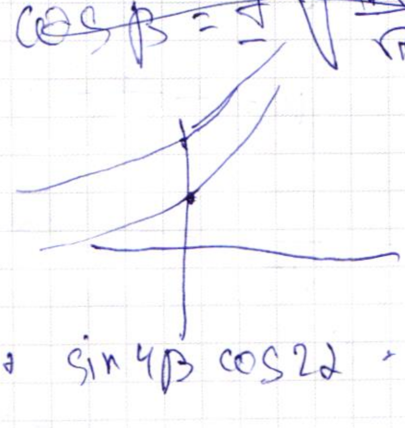
$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}.$$

$$2\cos 2\beta = \frac{8\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{4}{\sqrt{17}}.$$

$$2\cos^2\beta = \frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos\beta = \pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{\sqrt{17}}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



$$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha$$

$< \sin 2\alpha$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}. \quad \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}. \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta.$$

$$2\cos 2\beta = \frac{8}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}},$$

$$\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \quad \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cancel{\frac{4}{\sqrt{17}}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow$$

$$\sin 2\alpha = 0$$

3) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$.

$$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

4) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha = 0.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} = \sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2=b \\ x-1=a \end{cases} \Rightarrow 3y-2x=b-2a.$$

$$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \Leftrightarrow 3(x-1)^2+(y-1)(3y-1)-8=0$$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \Rightarrow b^2-4ab+4a^2=ab. \\ 3a^2+(b+1)\left(\frac{b-1}{3}\right)-8=0. \quad b^2-5ab+4a^2=0 \end{cases}$$

$$3a^2+\frac{1}{3}(b^2-1)-8=0. \quad \cancel{4(a-1)\left(a-\frac{b^2}{4}\right)=0.}$$

$$9a^2+b^2-9=0.$$

$$4a^2-5ab+b^2=0$$

$$9a^2-9+b^2=0$$

$$4a^2-5ab+b^2=0.$$

$$\cancel{4(a-1)\left(a-\frac{b^2}{4}\right)=0.}$$

$$9b^2+3^2-9=0.$$

$$D=25b^2-16b^2=9b^2.$$

$$a_{1,2}=\frac{5b\pm3b}{8} \Rightarrow a_1=\frac{1}{4}b;\ a_2=b.$$

$$\frac{1}{16}b^2+b^2-9=0.$$

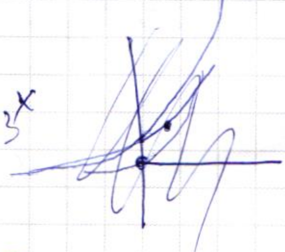
$$\frac{17}{16}b^2-9=0 \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{17}}{4}b-3\right)\left(\frac{\sqrt{17}}{4}b+3\right)=0$$

$$b_1=\frac{3\cdot4}{\sqrt{17}}.\quad b_2=-\frac{3\cdot4}{\sqrt{17}}.$$

$$\cancel{a_1=\frac{3\cdot4}{\sqrt{17}},\ a_2=\frac{3}{\sqrt{17}}\quad a_3=-\frac{3\cdot4}{\sqrt{17}},\ a_4=-\frac{3}{\sqrt{17}}}$$

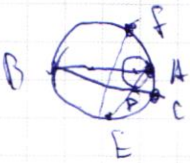
$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$.

$x^2+6x \geq 0 \Rightarrow \quad x \leq -6;\ x > 0.$ $\quad 5^x - 3^x$



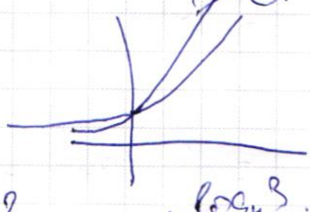
$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$. $\quad 5^y - 3^y$.

$\parallel \quad 5^{\log_4(x^2+6x)}$



$x^2+6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)} - 3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 0.$

$5^a - 3^a \qquad \log_4(x^2+6x$



$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3}$.

$3/9$

$40 \cdot 9 =$ $\quad x \geq 5^{\log_4 x} - 3^{\log_4 x}$

$360 -$

$360 - 9 = 351$ $\quad \log_4 x \qquad 4^{\log_4 x} \geq 5^{\log_4 x}$

$5^x \geq 3^x \quad x\ln 5 \geq x \ln 3$

$4^{\log_4 x} + 3^{\log_4 x} \geq 5^{\log_4 x}$. $\quad x(\ln 5 - \ln 3) \geq 0.$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$. $\quad \left(\frac{x}{=}\right)$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} = 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$x^2+6x \geq 5^{\log_4(x^2+6x)} - 3^{\log_4(x^2+6x)}$

$4^x + 3^x \geq 5^x$. $\quad \ln(4^x+3^x) \geq x\ln 5$.

$2 > x > 0$.

$\boxed{\begin{matrix} x \leq -8 \\ x \geq 2 \end{matrix}}$.

$\Rightarrow \log_4(x^2+6x) \geq 0$

$4^{\log_4(x^2+6x)} + 3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5$. $\quad x^2+6x-16 \geq 0.$

$\log_4(x^2+6x) \leq 2 \Rightarrow 16 \geq x^2+6x \quad \frac{D}{4}: 9+16$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

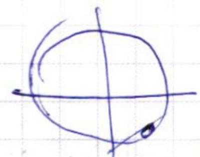
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}k$.

$\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$. $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.



$\cos 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\alpha \sin 2\beta = \cos 2\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{8}{17}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} =$

$= \frac{4}{\sqrt{17}}. \Rightarrow \cos 2\alpha + \frac{2}{17} = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{15}{17}$.

$2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{8}{17} \Rightarrow \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{17}$.

$= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{15}{17}$. $\sin\alpha = -\frac{4}{17\cos\alpha}$.

$tg 2\alpha = -\frac{8}{15}$.

$\cos^2\alpha -$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{15}{17} \Rightarrow 2\cos^2\alpha = \frac{32}{17}$.

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} = \sqrt{3(x-1)(y-1) + (x-1)} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

$\sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} = \sqrt{(x-1)(3y-2)} = 3y - 2x$.

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$.

$3(x^2 - 2x) = 3x(x-2) + y(3y-4) = 4$.

$-1 + \frac{32}{17} = \frac{15}{17}$.

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$ $\qquad x-1=a;\ (3y-2)=b$

$3x^2-6x+3=3(x^2-2x+1)=3(x-1)^2$ $\qquad 3y-2x=b-2a.$

$3y^2-4y-7=(2y-1)^2-y^2-8.$ $\qquad b=y-1$

$=(y-1)(3y-1)-8.$

$3(x-1)^2+(y-1)(3y-1)-8=0.$ $\qquad 3y-2x=3b-2a+1$ $\quad \frac{b}{3}$

$b-2a=\sqrt{ab}$

$3a^2+(b+1)$

$$\begin{cases} a=x-1 \\ b=3y-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ 3a^2+(b+1)\left(\frac{b-1}{3}\right)-8=0. \end{cases}$$

$BP\cdot BA=BD^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2.$

$BP=2R-2r,$

$BA=2R.$

$3a^2+\frac{1}{3}(b^2-1)-8=0.$

$9a^2+b^2-1-8=0.$

$9a^2+b^2-25=0.$

$b^2-4ab+4a^2=ab.$

$$\begin{cases} b^2-5ab+4a^2=0. \\ 9a^2+b^2-25=0. \end{cases}$$

$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}=\frac{13}{5}.$

$5a^2+5ab-25=0.$ $\qquad AB=13x$

$\frac{39}{4}$ $\quad a^2+ab-5=0.$ $\qquad \frac{13}{3}$ $\quad AC=5x \Rightarrow BC=12x=9$

$BP\cdot BA=BD^2=\left(\frac{13}{2}\right)^2$ $\quad BP\cdot\frac{39}{4}=\frac{169}{4}$ $\qquad x=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$

$BP+PA=AB=\frac{39}{4}$ $\qquad AB=\frac{39}{4},\ AC=\frac{15}{4}$

$BP=\frac{13}{3}$ $\quad PA=\frac{39}{4}-\frac{13}{3}=\frac{117-52}{12}=\frac{65}{12}.$ $\quad BP=39$