МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

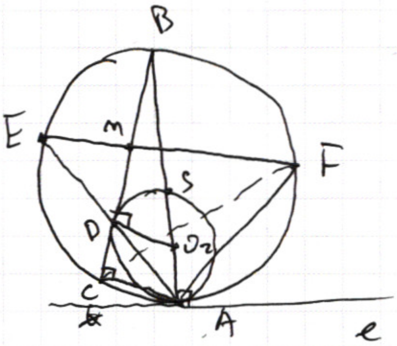
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Решение

Пусть l - общая касательная к ω и Ω $\Rightarrow AD \perp l$ (диаметр, провед. в т.кас.). Но если провести диаметр ω через т. A $\Rightarrow$ он будет $\perp l$ (а из т. прямой можно провести 1 $\perp$) $\Rightarrow$ прямая AB проходит и через диаметр ω $\Rightarrow$ через O_2 - центр ω. т.к. $CD = \frac{5}{2}$, а $BD = \frac{13}{2} \Rightarrow BC = BD + CD = 9$. $O_2D \perp BC$ (как радиус, провед. в т.кас.). $\angle ACB = 90°$ (т.к. $\angle ACB$ - впис., опир. на диаметр) $\Rightarrow O_2D \parallel AC$ (т.к. $\perp$ одной прямой) $\Rightarrow \triangle DBO_2 \sim \triangle CBA \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB} = \frac{DO_2}{AC}$ (1).

Пусть r - радиус ω, а R - радиус Ω. $\Rightarrow \frac{\frac{13}{2}}{9} = \frac{2R - r}{2R}$ (т.к. $AB = 2R$, $O_2A = r$). $\Rightarrow \frac{13}{18} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow$

$\Rightarrow 26R = 36R - 18r \Rightarrow 10R = 18r \Rightarrow R = 1{,}8r$. Но $BD^2 = BS \cdot BA$, где S - т. пересеч. AB и ω (кроме A) (степень точки) $\Rightarrow$

$\Rightarrow BD^2 = (2R - 2r)\cdot 2R = 3{,}6r\cdot(3{,}6r - 2r) = 3{,}6r \cdot 1{,}6r = 3{,}6\cdot 1{,}6 \cdot r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{BD^2}{3{,}6\cdot 1{,}6} = \frac{100\cdot BD^2}{36\cdot 16} \Rightarrow r = \frac{10\cdot BD}{6\cdot 4} = \frac{5\cdot 13}{6\cdot 4} = \frac{65}{24} \Rightarrow R = 1{,}8\cdot\frac{65}{24} = \frac{18\cdot 65}{10\cdot 6\cdot 4} = \frac{18^3\cdot 5\cdot 13}{_2 10\cdot 8\cdot 4} = \frac{39}{8} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2R = \frac{39}{4}$. $\angle AFE = \angle CFA + \angle CFE$. Но $\angle CFA = \angle CBA$, а $\angle CFE = \angle EAC$. (впис. углы) $\Rightarrow \angle AFE = \angle CBA + \angle EAC$. В

$\triangle CBA$ $BC=9$, а $AB=2R=\frac{39}{4}$ $\Rightarrow \cos\angle CBA=\frac{BC}{AB}=\frac{9\cdot 4}{39}=\frac{36}{39}$

$\Rightarrow \angle CBA=\arccos\frac{36}{39}$. $=\alpha$. $\Rightarrow \angle DO_2A=90+\alpha$ (внешний угол в $\triangle DBO_2$) $\Rightarrow \angle DSA=45+\frac{\alpha}{2}$ (вписанный угол в 2 раза меньше центрального, опир. на ту же дугу). Но CD-касательная к ω $\Rightarrow \angle CDA=\angle DSA=45+\frac{\alpha}{2}$ (т.к. угол между кас. и хордой равен впис. углу, опир. на эту хорду). Но в $\triangle CDA$ $\angle DCA=90^\circ$, а $\angle CDA=45+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAC=45-\frac{\alpha}{2}$ (по сумме углов в $\triangle$-ке). $\angle DAC=\angle EAC\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EFA=\angle CBA+\angle EAC=\alpha+45-\frac{\alpha}{2}=45+\frac{\alpha}{2}=45^\circ+\frac{\arccos\frac{36}{39}}{2}$.

~~Значит~~ $AC\perp BC$ и $EF\perp BC\Rightarrow AC\parallel EF\Rightarrow ACEF$-трапеция ($\Rightarrow \angle EAC=\angle AEF$ (накрест. леж.) $\Rightarrow AF=CE$ (хорды, стяг. равные углы) $\Rightarrow ACEF$ - р/б трап. Из (1) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{BC}=\frac{DO_2}{AC}\Rightarrow \frac{6{,}5}{9}=\frac{r}{AC}\Rightarrow AC=\frac{9r}{\frac{13}{2}}=\frac{18r}{13}=\frac{18}{13}\cdot\frac{65}{24}=\frac{15}{4}$.

Пусть $\angle EFA=\beta$. $\Rightarrow \frac{AE}{\sin\beta}=2R$ (по т. синусов) $\Rightarrow \frac{AE}{\sin\beta}=\frac{39}{4}\Rightarrow$

$\Rightarrow AE=\frac{39}{4}\sin\beta$. $AC=\frac{15}{4}$, а $\angle EAC=45-\frac{\alpha}{2}$. $\Rightarrow$

$\Rightarrow EC=\sqrt{\frac{225}{16}+\frac{39^2}{4}\sin^2\beta-\frac{39\cdot 15}{8}\sin\beta\cos(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}=AF$ (по т. косинусов)

~~$\Rightarrow$ по т. косинусов $EA^2=EF^2+AF^2-2EF\cdot AF\cdot\cos\beta$~~

т.к. $AC\parallel EF\Rightarrow \angle CAE=\angle AEF$ (накрест. леж) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EAF=180^\circ-\beta-45^\circ+\frac{\alpha}{2}=135^\circ+\frac{\alpha}{2}-\beta$ (по сум. угл. в $\triangle$-ке) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle EAF}=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot EA\cdot\sin(135^\circ+\frac{\alpha}{2}-\beta)=\frac{1}{2}$

Но $\beta=\angle EFA=45+\frac{\alpha}{2}\Rightarrow 135^\circ+\frac{\alpha}{2}-\beta=135^\circ+\frac{\alpha}{2}-45-\frac{\alpha}{2}=$

$=90^\circ$. $\Rightarrow S_{\triangle EAF}=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot AE=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{225}{16}+\frac{39^2}{4}\cdot\sin^2\left(45+\frac{\arccos\frac{36}{39}}{2}\right)-\frac{39\cdot 15}{8}\cdot\sin\beta\cdot\cos(45^\circ-\frac{\alpha}{2})}\cdot\frac{39}{4}\cdot\sin\beta=$

$=S_{\triangle EAF}=\sqrt{\frac{225}{16}+\frac{39^2}{4}\sin^2\beta-\frac{39\cdot 15}{8}\sin\beta(\cos 45-\frac{\alpha}{2})}\cdot\frac{39}{8}\sin\beta$, где

$\alpha=\arccos\frac{36}{39}$, а $\beta=45-\frac{\alpha}{2}$.

Ответ: $R=\frac{39}{8}$; $r=\frac{65}{24}$; $\angle AFE=45^\circ+\frac{\arccos\frac{36}{39}}{2}$; $S_{\triangle EAF}=$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{39^2}{4}\sin^2\beta - \frac{36\cdot 15}{8}\sin\beta\cdot(\cos 45 - \frac{\alpha}{2})}\cdot \frac{39}{8}\cdot\sin\beta$, где $\alpha = \arccos\frac{36}{39}$, а $\beta = 45° - \frac{\alpha}{2}$.

№ 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3y-2)-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(3y-2)^2=25 \end{cases}$$

Пусть $a=3y-2$, а $b=x-1 \Rightarrow \begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 9b^2+a^2=25 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 9b^2+5ab-4b^2=25 \Rightarrow 5(b^2+ab)=25 \Rightarrow b^2+ab=5 \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\frac{5-b^2}{b} \Rightarrow 9b^2+\frac{25+b^4-10b^2}{b^2}=25 \Rightarrow 25+b^4-10b^2+9b^4=25b^2$

$\Rightarrow 10b^4-35b^2+25=0 \Rightarrow 2b^4-7b^2+5=0$. Пусть $b^2=t \Rightarrow$

$\Rightarrow 2t^2-7t+5=0 \Rightarrow D=49-40=9 \Rightarrow t=\left[\begin{array}{l} \frac{7+3}{4}=\frac{5}{2} \\ \frac{7-3}{4}=1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow b^2=\left[\begin{array}{l} \frac{5}{2} \\ 1 \end{array}\right. \Rightarrow b=\left[\begin{array}{l} \pm 1 \\ \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right. \Rightarrow b=\left[\begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ \sqrt{\frac{5}{2}} \\ -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow a=\left[\begin{array}{l} 4 \\ -4 \\ \frac{\sqrt{5}}{2} \\ -\frac{\sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$. Все эти корни в ар-нии ~~равны~~ положитель-ны $\Rightarrow$ входят в область опр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ нам подходят пары $(a;b)$: $(4;1)$, $(-4;-1)$, $(\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2})$, $(-\frac{\sqrt{5}}{2};-\frac{\sqrt{5}}{2})$.

Но $a=3y-2$, и $b=x-1$ $\Rightarrow$ $x=b+1$, и $y=\frac{a+2}{3}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow x=\left[\begin{array}{l}1\\0\\\sqrt{\frac{5}{2}}+1\\-\sqrt{\frac{5}{2}}-1\end{array}\right.$, и $y=\left[\begin{array}{l}2\\-\frac{2}{3}\\\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+2}{3}\\\frac{-\sqrt{\frac{5}{2}}+2}{3}\end{array}\right.$ $\quad x=\left[\begin{array}{l}2\\0\\\sqrt{\frac{5}{2}}+1\\-\sqrt{\frac{5}{2}}-1\end{array}\right.$, и $y=\left[\begin{array}{l}2\\-\frac{2}{3}\\\frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+2}{3}\\\frac{-\sqrt{\frac{5}{2}}+2}{3}\end{array}\right.$ -

Это потенциальные корни системы. Других нет. Проверим, какие явл. корнями.

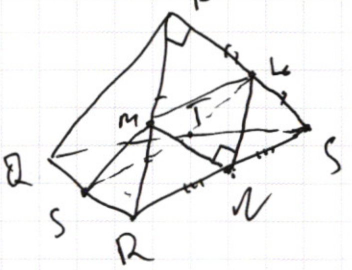
~~(2;2)~~ при $(2;2)$: $\begin{cases}6-4=\sqrt{1\cdot4}\\24-12-8=4\end{cases}$ $\Rightarrow$ подходит

при $\left(0;-\frac{2}{3}\right)$: $-2=\sqrt{(-1)\cdot(-4)}$ $\Rightarrow$ не подходит.

при $\left(\sqrt{\frac{5}{2}}+1;\ \frac{\sqrt{\frac{5}{2}}+2}{3}\right)$: $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+2-2\sqrt{\frac{5}{2}}-2=\sqrt{\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}}=$
$=-\frac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\Rightarrow$ не подходит

при $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}-1;\ \frac{-\sqrt{\frac{5}{2}}+2}{3}\right)$: $-\frac{\sqrt{5}}{2}+2+2\sqrt{\frac{5}{2}}+2=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}-2\right)\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)}$
$\Rightarrow \sqrt{\frac{5}{2}}+4=\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{10}}$ $\Rightarrow$ не подходит $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ единственное решение - это $x=y=2$.
Ответ: $x=y=2$.

№ 7



Решение.

Пусть M, L, N середины PR и PS, RS $\Rightarrow$ P, M, L, N лежат в одной пл-сти и лежат на одной сфере $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ PMNL - вписанный 4-х угольник. Но $MN \parallel PS$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

и $NL \parallel PR$ (как средние линии) $\Rightarrow \angle RPS = \angle MNL$ (как углы между паралл. прямыми). Но $PLNM$ - впис. $\Rightarrow \angle MPL + \angle MNL = 180°$. Но $\angle MPL = \angle MNL \Rightarrow \angle MPL = \angle MNL = 90°$. Пусть S и T - середины QR и $QS \Rightarrow S, T, M, L$ лежат на одной сфере. Но ST - ср. лин. $\Rightarrow ST \parallel RS$ и $ST = \frac{1}{2}RS$. Аналогично $ML \parallel RS$ и $ML = \frac{1}{2}RS \Rightarrow MLTS$ - паралл. $\Rightarrow M, L, T, S$ лежат в одной пл-сти и на одной сфере $\Rightarrow$
$\Rightarrow MLTS$ - впис $\Rightarrow MLTS$ - прямоуг.

№ 1

Пусть $2\alpha + 2\beta = x \Rightarrow \begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2x - 2\alpha) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\sin(2x-2\alpha) + \sin 2\alpha = \sin 2x \cos 2\alpha - \sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin x \cos x \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot (1 - \cos 2x) = 2\sin x \cos x \cdot \cos 2\alpha +$
$+ \sin 2\alpha \cdot (1 - 2\cos^2 x + 1) = 2\sin x \cos x \cdot \cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha \cdot \sin^2 x =$
$= 2\sin x \cdot (\cos x \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \sin x) = -\frac{24}{17}$. Но $\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$
$\Rightarrow \cos x \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \cdot \sin x = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(x - 2\alpha) = \frac{4}{\sqrt{17}}$.
Но $x = 2\alpha + 2\beta \Rightarrow \cos(2\alpha + 2\beta - 2\alpha) = \cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$
$\Rightarrow \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$ (т.к. $\sin 2\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}$ по О.Т.Т.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \\ 8\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2\cdot\cos\alpha\cdot(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0 \\ 4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1 \end{array}\right.$. Но $\operatorname{tg}\alpha$ опр. $\Rightarrow \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{array}\right.$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos\alpha = 0 \\ \sin\alpha\cdot(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0 \end{array}\right.$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cancel{\operatorname{tg}\alpha = 0} \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ \frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos\alpha = 0 \\ \frac{4}{\sqrt{17}}\cos\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\sin\alpha = 0 \end{array}\right.$. Пусть $\begin{cases} \sin\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ \sin(\alpha+\beta) = 0 \\ \cos(\alpha-\beta) = 0 \end{array}\right.$. $\sin \cancel{x} (2\alpha+2\beta) = \frac{\sin(-\beta)}{\cancel{\sin}\ \cancel{\sin -\beta}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \gamma + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = -\gamma + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) =$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ \end{cases}$

$\sqrt{x\cdot(3y-2)-(3y-2)}$

$\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$9y^2+4x^2-12xy$

$\cancel{3y-2x^2} = 3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

$3y^2+6y^2+3x^2+x^2-6x+8x-4y+7y-4+2$

$\cancel{3y^2}+6y^2+\cancel{3x^2}+x^2-\cancel{6x}+8x-\cancel{4y}+7y-\cancel{4}+2-15xy=0$

$6y^2+x^2+8x+7y-15xy+2=0$

$$\begin{cases} (3y-2x)^2 = 3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$6y^2+x^2-15xy+8x+7y+2=0$

$7{,}5y^2-15xy+7{,}5x^2-1{,}5y^2-6{,}5x^2+8x+7y+2=0$

$\cancel{\sqrt{7{,}5}y \quad \sqrt{7{,}5}x}$ $(\sqrt{7{,}5}y-\sqrt{7{,}5}x)^2-1{,}5y^2-6{,}5x^2+8x+7y+2=0$

$\frac{65}{10}=\frac{13}{2}$ $\quad -\frac{3}{2}y^2-\frac{13}{2}x^2+8x+7y+2=0$

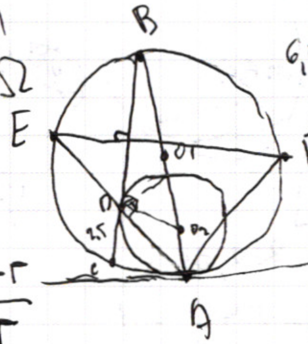
$2R-r=0{,}65r$

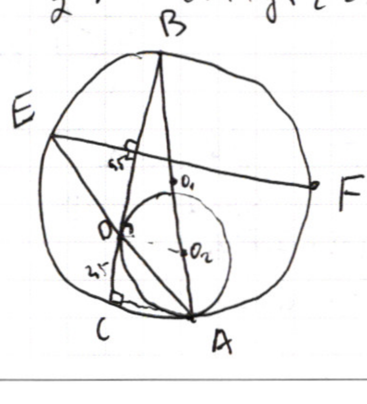
$2R=1{,}65r \quad R=\frac{1{,}65}{2}r$

$6{,}5^2=2R\cdot(2R-2r)$

$6{,}5^2=1{,}65r\cdot$

$AC \parallel EF$

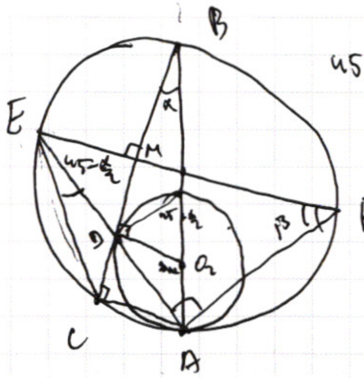




$0{,}65=\frac{6{,}5}{10}=\frac{r}{AC}=\frac{2R-r}{r}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$45+\frac{\alpha}{2}-45$ $\triangle BCA \sim \triangle BDO_2$ $45-\frac{\alpha}{2}$

$\frac{CP}{MD}=$

$\frac{BC}{BD}=\frac{AC}{DO_2}=\frac{AB}{BO_2}$ $45+\frac{\alpha}{2}$

$\cancel{90-45}$

$45-\frac{\alpha}{2}$

$\frac{9}{6,5}=\frac{2R}{2R-r}$

$\frac{\cancel{9}0}{\cancel{65}}\cdot\frac{2}{13}=\frac{18}{13}=\frac{2R}{2R-r} \Rightarrow 26R=36R-18r$

$18r=10R$

$6,5^2=2R\cdot(2R-2r)=3,6r(3,6r-2r)=$ $2R=\frac{18}{5}r=3,6r$

$3,6r\cdot 1,6r \Rightarrow$

$\Rightarrow 65\cdot 65=36\cdot 16\cdot r$

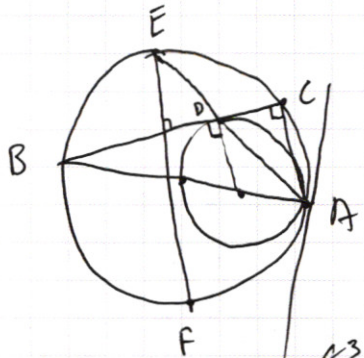
$r=\frac{65\cdot 65}{36\cdot 16} \Rightarrow R=\frac{1,8\cdot 65^2}{36\cdot 16}$

$\cancel{\sin}$

$\cos\alpha=\frac{9\cdot\cancel{18}^{10}\cdot 16}{\cancel{18}\cdot 65^2}=\frac{90\cdot 16}{65^2}=$

$\alpha+45-\frac{\alpha}{2}=45+\frac{\alpha}{2}$

$=\frac{18\cdot 16}{13\cdot 65}$



$\frac{BD}{BC}=\frac{2R-r}{2R}$

$\cancel{\frac{6,5}{2,5}=\frac{2R-r}{2R}}$

$\frac{6,5}{9}=\frac{2R-r}{2R}$ $18R-9r=13R$

$9r=5R$

$\Rightarrow R=1,8r$

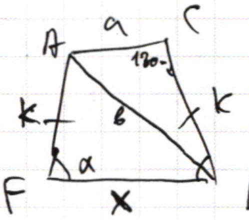
$2R=3,6\cdot r=\frac{\cancel{36}^{63}\cdot\cancel{65}\cdot 13}{\cancel{16}\cdot 7\cancel{2}4}=\frac{39}{4}$

$\frac{169}{4}=2R\cdot(2R-2r)$, $2R=3,6r$

$\cancel{\cos\alpha=\frac{13}{2}\cdot 2}$

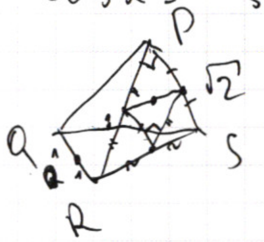
$\frac{169}{4}=3,6r\cdot 1,6r$

$\cos\alpha=\frac{9\cdot 4}{39}=\frac{36}{39}$



$\cancel{169}=r^2=\frac{169}{4\cdot 36\cdot 16}$

$\frac{169}{4}=\frac{36\cdot 16 r^2}{\cancel{100}\ 25}$



$r^2=\frac{169\cdot 25}{36\cdot 16}\Rightarrow$

$\Rightarrow r=\frac{13\cdot 5}{6\cdot 4}=\frac{65}{24}$

$\cancel{k^2+x^2-2kx\cos\alpha=a^2+k^2-2}$

$x^2 2ax \cancel{-x^2}+2\sqrt{2}b=\cancel{3}5$

$x^2-2ax+2\sqrt{2}b=5$

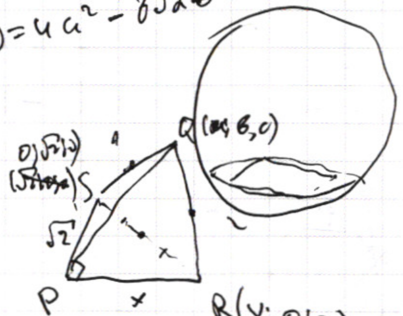
$x^2-2ax-8\sqrt{2}b-20$

$D=4a^2-8\sqrt{2}b-20$

$(0;0;0)$

$(\frac{x}{2};0;0)$ $(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0)$

$\frac{2x}{\sin\alpha}=\frac{\alpha}{\sin\beta}$



$\cancel{(\sqrt{2})(0;\frac{\sqrt{2}}{2};0)}$;

$\cancel{(\frac{x}{2};0;0)}$

$\cancel{(\frac{x}{2};\frac{\sqrt{2}}{2};0)}$

$\begin{cases} \cancel{a^2+b^2}+c^2+2-2\sqrt{2}b=1 \\ \cancel{a^2+b^2}+c^2-2ax+x^2=4 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2+(b-\sqrt{2})^2+c^2=1 \\ (a-x)^2+b^2+c^2=4 \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\cancel{g(3y-2)-2y}$

$3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac{4}{3}-\frac{25}{3}=0$

$\cancel{\frac{13}{3}-\frac{12}{3}\quad\frac{9+4-25}{3}=-\frac{12}{3}=-4}$

$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+3\cdot\left(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{25}{3}$

$9a^2+\frac{625+64a^4-400a^2}{9a^2}=25$

$81a^4+625+64a^4-400a^2=25\cdot 9a^2$

$9x^2-18x+9+9y^2+4-12y=\frac{12}{25}$

$9x^2+9y^2-18x-12y=12$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$b=\frac{25-8a^2}{3a}$

$9y^2+4x^2-12xy=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

$a^2+b^2+a+b=15xy+2$

$8a^2+3ab-25=0$

$D=b^2+800$

$3(x-1)^2+$

$3(x-1)^2+\frac{(3y-2)^2}{3}=25$

$$\begin{cases} a^2-3ab+b^2=0 \\ 9a^2+b^2=25 \\ 8a^2+3ab=25 \end{cases}$$

$9y^2-12y+4$

$9(x-1)^2+(3y-2)^2=25$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \quad 25\geqslant 3(x-1)(3y-2)=3\cdot(3y+2x)^2 \\ 9(x-1)^2+(3y-2)^2=25 \end{cases}$$

$b=\frac{25-8a^2}{3a}=\frac{25}{3a}-\frac{8}{3}a$

$$\begin{cases} a-b=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases}$$

$3y-2=3y-2-2x+2=(3y-2)-(2x-1)$

$$\begin{cases} a^2-2ab+b^2=ab \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-b=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases}\quad \begin{cases} a^2-2ab+b^2=ab \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases}\quad \begin{cases} a^2-3ab+b^2=0 \\ 25-8a^2-3ab=0 \end{cases}$$

$a^2+b^2=25-8a^2$

$8a^2+3ab$

$$\begin{cases} (a-b)^2=ab \\ (3a+b)^2-6ab=25 \end{cases}$$

$(3a+b)^2-6\cdot(a-b)^2=25$

$(3a+b-\sqrt{6}a+\sqrt{6}b)(3a+b+\sqrt{6}a-\sqrt{6}b)=25$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$81a^4+625+64a^4-400a^2=\cancel{25g\cdot a^2}\ 225a^2$

$145a^2-625a^2+625=0$

$29a^4-125a^2+125=0$

$D=125\cdot125-4\cdot29\cdot125=125\cdot(125-116)=9\cdot125=5^3\cdot3^2$

$a^2=\left[\begin{array}{l}\frac{125+15\sqrt5}{58}\\ \frac{125-15\sqrt5}{58}\end{array}\right.$

$\cancel{a^2=4b}^2$

$\begin{cases}a^2-5ab+4b^2=\cancel{ab}\ 0\\ 9b^2+a^2=25\end{cases}$

$\begin{cases}a^2-5ab+4b^2=0\\ a^2+9b^2=25\end{cases}$

$\Rightarrow \cancel{9b^2+5ab}\ 9b^2+5ab-4b^2=25$

$5b^2+5ab=25$

$b^2+ab=5$

$a=\frac{5-b^2}{b}$ $\sin2\alpha\cdot\cos2\alpha-\cos2\alpha\cdot\sin2\alpha$

$\frac{25+b^4-10b^2}{b^2}+9b^2=25$

$\sin(2(2\alpha+2\beta)-2\alpha)+\sin2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\cancel{2\sin x\cos2\alpha}-$

$2\sin x\cos\alpha\cdot\cos2\alpha-\cos2\alpha\cdot\sin2\alpha$ $+\sin2\alpha$

$25+b^4-10b^2+9b^4=25b^2$

$10b^4-35b^2+25=0\Rightarrow2b^4-7b^2+5=0$

$D=49-40=9\Rightarrow b^2=\left[\begin{array}{l}\frac{7+3}{4}=\frac52\\ \frac{7-3}{4}=1\end{array}\right.$

$b=\left[\begin{array}{l}1\\ -1\\ \pm\sqrt{\frac52}\end{array}\right.$

$6-2=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$\sin(2\alpha)$

$-(2\cos^2\alpha-1)\cdot\sin2\alpha+\sin2\alpha=\frac{4}{?}\beta$

$\frac{5-\frac52}{\sqrt{\frac52}}=\frac{\frac52}{\ }$

$\sin2\alpha(1-2\cos^2x+1)=$ $a-2b=\sqrt{ab}$

$=2\sin2\alpha(\cancel{1-\cos^2x})\sin^2x$

$\frac{4}{2}$

$4-2=2$

$\cancel{40}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha\end{cases}$

-4

$\cancel{-4+2=0}$

$b=-1$ $a=-4$

$-4+2=\sqrt{4}=2$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\sin2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\beta-1)+2\sin\beta\cos\beta(2\cos^2\alpha-1)$

$\cancel{4\cos^2\beta}\ 4\cos^2\beta\sin\alpha\cos\alpha-\sin2\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\alpha+2\beta=x \Rightarrow \sin x=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2x-2\alpha)+\sin 2\alpha=\sin 2x\cos 2\alpha$ ~~$-\cos 2x\sin 2x+\sin 2\alpha=-\frac{8}{\sqrt{17}}$~~ $2\sin 2\alpha\cdot\sin^2\alpha$

$=\sin 2x\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha\cdot\sin^2 x=-\frac{8}{17}$

$2\sin x\cos x\cdot\cos 2\alpha+2\sin 2\alpha\cdot\sin^2 x=-\frac{8}{17}$

~~$2\cos x\cos 2\alpha$~~

$\cos x\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\sin x=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos(x-2\alpha)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha+2\beta-2\alpha)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\beta)=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0$

$\sqrt{a^2+b^2}$

$\sqrt{17}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin\alpha+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos\alpha=0$

$\sin(\alpha+$ ~~$\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$~~

$4\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=\frac{-\sin^2\alpha}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)