МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ (1) ; $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(p) = f(p \cdot 1) = f(p) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

~~$f(a) = f(a \cdot 1) =$~~

$f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right)$, где a – положительное рациональное число.

$f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$.

Значит $f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$.

Тогда (1)

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(1) = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0$

$f(28) = 1$

Всего 25 чисел

$f(a) = 0 \to$ 9 чисел

$f(a) = 1 \to$ 8 чисел

$f(a) = 2 \to$ 3 числа

$f(a) = 3 \to$ 2 числа

$f(a) = 4 \to$ 2 числа

$f(a) = 5 \to$ 1 число

Продолжение № 5.

Тогда для чисел, у которых $f(x)=0$, получаем, что чтобы у них $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ нужно, чтобы $f(y)\neq 0$

Аналогично для $f(x)=1 \rightarrow f(y)\geq 2$

$f(x)=2 \rightarrow f(y)\geq 3$

...

„0" $\rightarrow 9\cdot(25-9)=16\cdot 9$

„1" $\rightarrow 8\cdot(25-9-8)=8\cdot 8$

„2" $\rightarrow 3\cdot(25-9-8-3)=3\cdot 5$

„3" $\rightarrow 2\cdot(25-9-8-3-2)=2\cdot 3$

„4" $\rightarrow 2\cdot(25-9-8-3-2-2)=2\cdot 1$

„5" $\rightarrow \varnothing$

Итого: $16\cdot 9+8\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=144+64+15+6+1=$
$=230$

Ответ: 230 пар чисел $(x;y)$

№ 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим (2) $9x^2+y^2-18x-12y=45 \quad |+45$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=90$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90.$

Рассмотрим (1) $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

Продолжение на сл. листе

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(Продолжение №2)

Пусть $x-1=a$ Тогда $y-6x=b-6a$.

$y-6=b$

Заменим и получим

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \longrightarrow ab\geq 0. \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

1сл. $a\geq 0$ $b\geq 0$

$b-6a=\sqrt{ab}$ Пусть $\sqrt{b}=x$ $x\geq 0$

$x^2-6a=\sqrt{a}\,x$

$x^2-\sqrt{a}\,x-6a=0$

$D=a+24a=25a$

$x=\dfrac{\sqrt{a}+5\sqrt{a}}{2}=3\sqrt{a}$

$\sqrt{b}=3\sqrt{a}$

$b=9a$

$9a^2+81a^2=90$

$\boxed{a=1}$ $\boxed{b=9}$

2сл. $b<0$ $a\leq 0$

$b-6a=\sqrt{ab}$

$-|b|+6|a|=\sqrt{ab}$

$6|a|-|b|=\sqrt{ab}$ ~~Теперь будем считать, что a и $b>0$~~

$\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

Продолжение №2

$6|a| - |b| = \sqrt{ab} = \sqrt{|a| \cdot |b|}$

Пусть $\sqrt{|b|} = x \qquad x > 0$

$|b| = x^2$

$6|a| - x^2 = \sqrt{|a|} \cdot x$

$x^2 + \sqrt{|a|}\, x - 6|a| = 0$

$D = |a| + 24|a| = 25|a|$

$$x = \frac{-\sqrt{|a|} + 5\sqrt{|a|}}{2} = 2\sqrt{|a|}$$

$\sqrt{|b|} = 2\sqrt{|a|}$

$|b| = \cancel{4x}\ 4|a|$

$b^2 = 16a^2$

$9a^2 + 16a^2 = 90$

$25a^2 = 90$

$a^2 = \frac{90}{25} = \frac{18}{5}$

$a = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} \qquad a < 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3\sqrt{0{,}4} = -3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$b = -12\sqrt{\frac{2}{5}}$

Из 1 случая $\rightarrow$ $x = 2$, $y = 15$ Из 2 случая $x = 1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}$, $y = 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Пусть $26x-x^2=5^t$

Тогда $x^2-26x=-5^t$

$$|-5^t|^{\log_5 12} \geq -5^t+13^t$$

$$12^t+5^t \geq 13^t$$

Заметим при $t>2$ → не подходит.

При $t\leq 0$ → подходит.

Рассмотрим $26x-x^2=a$, где $a\geq 0$

$x^2-26x+a=0$

$D=26^2-4a$

Чтобы были решения $D\geq 0$

$D=26^2-4a=4(13^2-a)\geq 0$ $\quad a\in[0;169]$

См след. лист

☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№ 6.

Проведем анализ функций:

$$g(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-(6x-4)+4}{3x-2} = \frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$$

Ассимптоты $y=-2$; $x=\frac{2}{3}$

$f(x)=18x^2-51x+28$

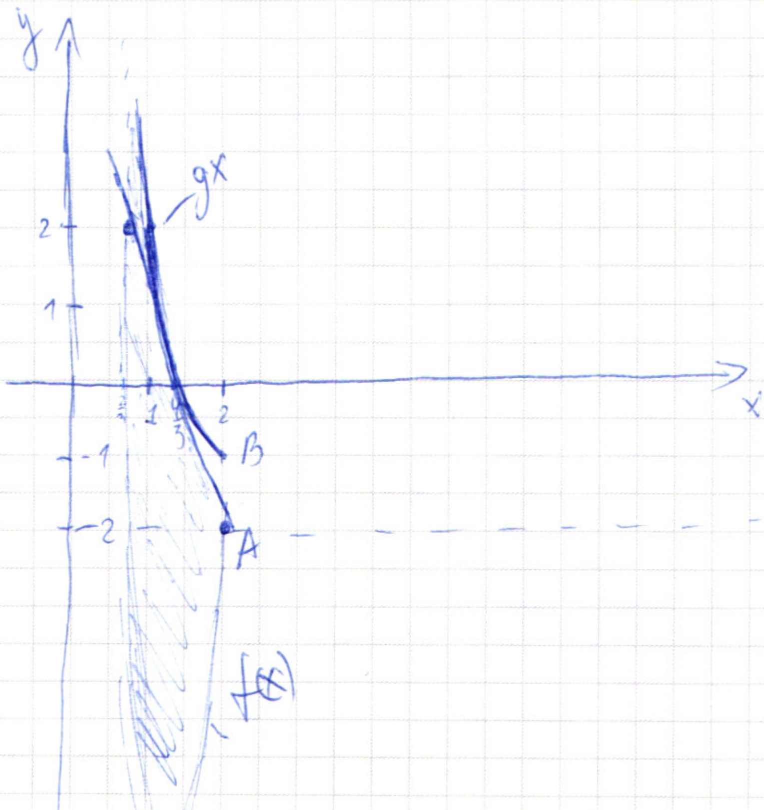
$$x_в = -\frac{b}{2a} = \frac{\cancel{51}^{17}}{2\cdot\cancel{18}_{6}} = \frac{17}{12}$$

Если подставить в $f(x)$ найдем min $f(x)$

$$f(x) = \frac{18\cdot17^2}{12^2} - \frac{51\cdot17}{12} + 28 < -9$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{18\cdot4}{9} - \frac{51\cdot2}{3} + 28 = 8-34+28 = 2$$

$$f(2) = 18\cdot4 - 51\cdot2 + 28 = 72-102+28 = -2$$



$$g'(x) = \frac{(8-6x)'(3x-2)-(8-6x)(3x-2)'}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{-6(3x-2)-(8-6x)\cdot3}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{-18x+12-24+18x}{(3x-2)^2} =$$

$$= \frac{-12}{(3x-2)^2}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение № 6.

~~Нам подойдут все касательные к $g(x)$, причем мы можем их опускать до тех пор, пока не станет~~ ~~не~~

Нам ~~подойдут только касательные к $g(x)$ +~~

прямые проходящие через $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и какую-то точку на отрезке AB (см рисунок) +

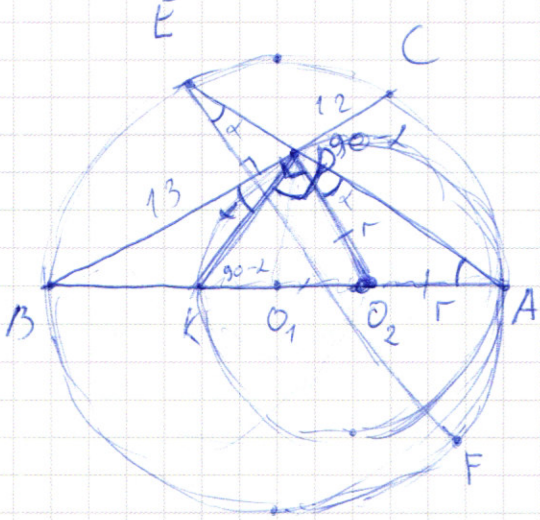
прямые выше $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$ и отр.AB.

(не ~~пересекая~~ $g(x)$)

см след. лист.

Задание №4

~~BD²=~~



$O_2D \perp BC$
$EF \perp BC$ $\Big| \Rightarrow O_2D \parallel EF$

$\angle FEA = \angle O_2DA$

(1) $\begin{cases} BD^2 = BK \cdot KA & \text{св. кас} \\ BK = 2R - 2r \\ BA = 2R \end{cases}$ ~~R−r~~

$\angle KDA = 90^\circ$

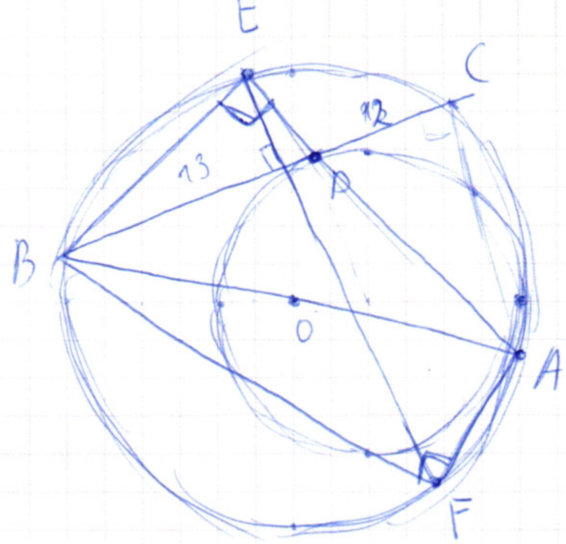
по Т.П.

$ED \cdot DA = 12 \cdot 13$

$O_2B = 2R - r = \sqrt{13^2 + r^2}$ — из $\triangle BDO_2$ два раза выразил BO_2

$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} = 13^2 + \cancel{r^2}$

$4R^2 - 4Rr - 13^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4(R^2 - Rr) = 169$



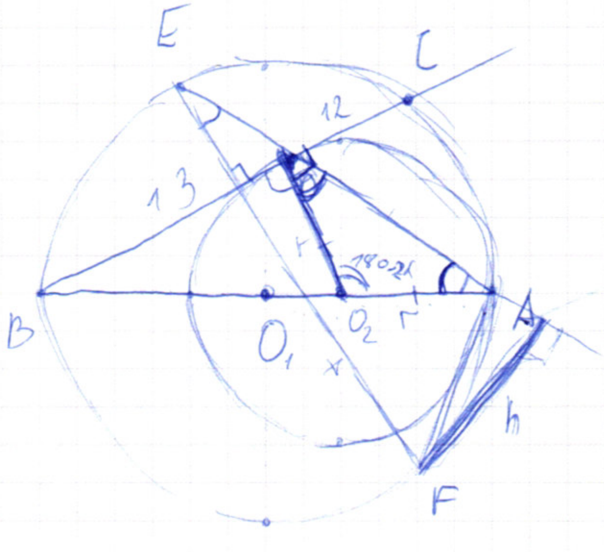
$13^2 = R \cdot 2R$

$\frac{13^2}{2} = R^2$

$R = \frac{13}{\sqrt{2}}$

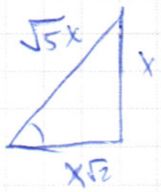
$\sin 90 \cdot \cos\alpha + \sin\alpha \cdot \cos 90$

$180 - 90 \cancel{+} \alpha - \alpha \quad 90 - 2\alpha$



$\frac{\sin(90+\alpha)}{13\sqrt{2}} = \frac{\sin\alpha}{13}$

$\frac{1}{\sqrt{2}} = tg\alpha$



$\frac{1}{2} h \cdot y = \frac{1}{2} x \cdot y \sin\alpha$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sqrt{1 - (\sin \ldots)} = \sqrt{2}$

$\sin^2(2\alpha + 2\beta) = \frac{1}{17}$ $\quad \sin(2\alpha) \cdot \cos(4\beta) + \sin(4\beta) \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\cancel{\sin 2\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

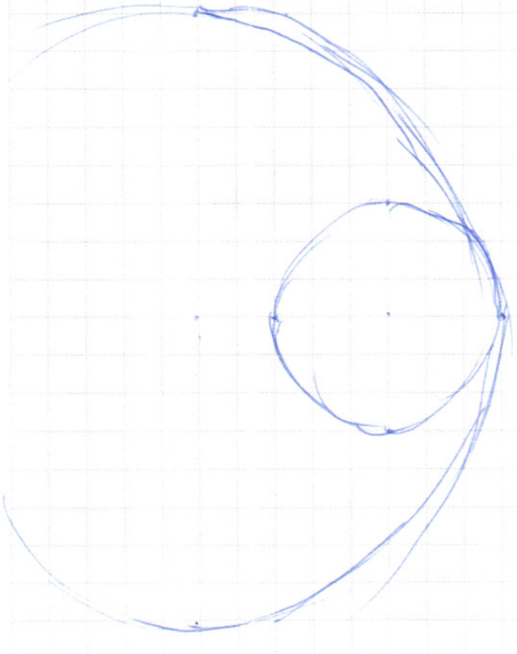
$18x^2-51x+28$

$\frac{\cancel{51}\,17}{2\cdot\cancel{18}\,6}=\frac{17}{12}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{17}$

$$\frac{\sin(2\alpha+2\beta)}{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{\sin(2\alpha+2\beta)}{\sin(2\alpha)\cdot\cos(4\beta)+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}=\frac{\sqrt{17}}{2}$$

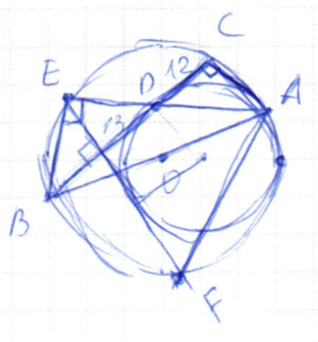


$\angle AEF$; r; R

$S_{\triangle AEF}$

$CD=12$

$BD=13$



$BD^2=BO\cdot BA$

$\quad\quad R \quad 2R$

$13^2=2R^2$

$R=\frac{13}{\sqrt{2}}$

$$f(k+1)-f(k) = f\left(k\cdot\frac{k+1}{k}\right) - f\left((k-1)\cdot\frac{k}{k-1}\right) =$$

$$= f(k)+f\left(\frac{k+1}{k}\right) - f(k-1) - f\left(\frac{k}{k-1}\right) = f(k) + \left(f(k+1)+f\frac{1}{k}\right) - f(k-1) - \left(f(k)+f\left(\frac{1}{k-1}\right)\right) =$$

$$= f(k) + f(k+1) - f(k) - f(k-1) - \left(f(k) - f(k-1)\right) =$$

$$= f(k) + f(k+1) - f(k) - f(k-1) - f(k) + f(k-1)$$

$$f(k+1)+f(k-1) - 2f(k)$$

$$f(k^2-1) - f(k^2) > 0$$

$$f(k)-f(k-1)\geq 0$$

$$f(k+1)-f(k) \geq 0$$

$$\cancel{f\left(k\cdot\frac{k+1}{k}\right) - f(k) \geq 0}$$

$$f(k+1)-f(k) = f\left((k-1)\cdot\frac{k+1}{k-1}\right) - f\left((k-1)\frac{k}{k-1}\right) =$$

$$= f(k-1) + f\left(\frac{k+1}{k-1}\right) - f(k-1) - f\left(\frac{k}{k-1}\right)$$

$$f(k+1)-f(k)$$

$$f\left(\frac{k+1}{k-1}\right) - f\left(\frac{k}{k-1}\right) = f\frac{k+1}{k-1} + f\frac{k-1}{k} = f\frac{k+1}{k}$$

$$f(k+1)-f(k)$$

$$f(k+1)-f(k)\geq 0$$

$$f(k+1) - \cancel{f(k-1)} - \Delta \geq 0$$

$$f(k+1)^2 - (fk)^2$$

$$f\left(k\cdot\frac{k+1}{k}\right) - f\left(k\cdot\frac{k+1}{k}\right) = \left(fk + f\frac{k+1}{k}\right) \quad fk^2$$

$$f(5)-f(4)$$

$$f(6) = f(2)+f(3) = 0$$

$$2f\frac{k+1}{k}\cdot fk + f\left(\frac{k+1}{k}\right)^2$$

$$f(7)$$

$f(4)=0$ $\quad f(7)=1$ $\quad f(10)=1$

$f(5)=1$ $\quad f(8)=0$ $\quad f(11)=2$ $\quad f(13)=3$

$f(6)=0$ $\quad f(9)=0$ $\quad f(12)=0$ $\quad f(14)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(1) = 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad \cancel{f(x)}$ $\quad f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) =$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$f(k) > f(k+1)$

$f(k+1) = f\left(k \cdot \frac{k+1}{k}\right) = f(k) + f\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$f\left(\frac{k+1}{k}\right) < 0$

$f a \qquad f(b)$

$a < b \Leftrightarrow f(a) > f(b) \qquad f(k+1) + f\left(\frac{1}{k}\right)$

почему

$f(a) - f(b) > 0$ $\quad$? как доказать это ?

$f\left(\frac{a}{b} \cdot b\right) - f(b) = f\left(\frac{a}{b}\right) + f(b) - f(b) = f\left(\frac{a}{b}\right) > 0$

$f\left(\frac{b}{a}\right)$ $\qquad 5 > \underset{1}{4}$ $\quad f(2) + f(2)$ $\quad 0$ $\quad 0$

$f(k+1) + f(k-1) \qquad f(a) - f(b)$

$f(k+1) - f(k) = f\left(k \cdot \frac{k+1}{k}\right) - f(k-1)\frac{k}{k-1}$

$f\frac{k+1}{k} - f\frac{k}{k-1}$

$f(k+1) + f\left(\frac{1}{k}\right) - \left(f(k) + f\left(\frac{1}{k-1}\right)\right) \qquad f(k) + f\left(\frac{k+1}{k}\right) - f(k-1) - f\left(\frac{k}{k-1}\right)$

$f(k+1) - f(k) - (f(k) - f(k-1))$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$b^2+360-4b^2 = 13\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}$

$360-3b^2 = 13\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}$

$b^2=4a^2$

$a+24a=25a$

$13a^2$

$\frac{-\sqrt{a}+5\sqrt{a}}{2}=2\sqrt{a}$

$3(120-b^2)=13\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}$

$9(120^2-\cancel{48}\,240b^2+b^4)=169(10-\frac{b^2}{9})$

$6a-b=\sqrt{ab}$

$9\cdot120^2-9\cdot240b^2+9b^4=1690-\frac{169\cdot b^2}{9} \quad |\cdot 9$

$6a-x^2=\sqrt{a}\cdot x$

$x^2+\sqrt{a}x-6a=0$

$9^2\cdot120^2-9^2\cdot240b^2+81b^4=1690\cdot9-169b^2$

$-x^2-6a=\sqrt{a}x$

$b^2=x \qquad x>0$

$x^2+6a+\sqrt{a}x$

$81x^2-(9^2\cdot240-169)x+9^2\cdot120^2-1690\cdot9=0$

$a-4a=\cancel{3}a$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$\sqrt{|b|}=x \qquad x^2-6a=\sqrt{a}x$

$-3a$

$x>0 \qquad x^2-\sqrt{a}x-6a=0$

$-\cancel{6a}-$

$-\sqrt{a}-$

$|b|=x^2 \qquad D=a+24a=25a$

$x=\sqrt{-b}$

$ab>0$

$x_1=\frac{\sqrt{a}+5\sqrt{a}}{2}=\frac{6\sqrt{a}}{2}=3\sqrt{a}$

$\sqrt{b}=3\sqrt{a}$

$\begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$

$b=3a$

$9a^2+9a^2=90$

$a^2+a^2=10$

$a^2=5 \qquad a=\pm\sqrt{5}$

$f(x)=$ простые $+$ сост $=0$

$\frac{p}{4}$

$90|5$, 18, $\frac{5}{40}$

$x\in N$

сост: пр, сост; сост: пр, пр

$x>y$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$, 0

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$4\le x\le 28$

$4\le y\le 28$

$f(p)=f(1)+f(p)$

$\frac{36\cdot2}{5}=$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(1)=0$

$-3\sqrt{\frac{2}{5}} \quad -12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(1)=0$

$=\left[\frac{p}{4}\right]$

$-12\sqrt{\frac{2}{5}}+18\sqrt{\frac{2}{5}}=$

$=6\sqrt{\frac{2}{5}}$

$f\left(p\cdot\frac{1}{p}\right)=f(p)+f\left(\frac{1}{p}\right)=0$

$f\left(x\cdot\frac{1}{x}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$y-6x\geq 0.$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+45$

$9(x^2-2x+1)+(y-6)^2=90$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-13xy+36x^2=-6x-y+6$

$x(y-6)-(y-6)$

$(x-1)(y-6)$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$x-1=a$

$y-6=b$

$y-6-6(x-1)=y-\cancel{6}-6x+6$

$y-6-2(3x-3)$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$(3x-3)=a$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{\frac{a}{3}b} \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$b>2a$ $\cancel{b^2-4ab+4a^2=\frac{ab}{3}}$

$\cancel{b^2-4\frac{1}{3}ab+4a^2=0.}$

$\sqrt{\frac{90-b^2}{9}}=\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}$

$a=\pm\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}$

$b-6\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}=\sqrt{b\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}}$

$b^2-12b\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}+36\left(10-\frac{b^2}{9}\right)=b\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}$

$b^2+36\left(10-\frac{b^2}{9}\right)=$

$=13\sqrt{10-\frac{b^2}{9}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$$\frac{\sin(2\alpha+2\beta)}{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

$$\frac{\sin(2\alpha+4\beta)}{\sin(2\alpha+2\beta)} + \frac{\sin 2\alpha}{\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{2}{\sqrt{17}}$$

$x^2-26x+5^t=0$

$26^2-4\cdot 5^t$

$\cancel{x^2-26x=5^t}$

$\cancel{5^t = 26x - x^2}$

$26x-x^2=5^t$

$(x^2-26x) = -5^t$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$|-5^t|^{\log_5 12} \geq -5^t+13^t$$

$5^{t\cdot\log_5 12}$

$$12^t+5^t \geq 13^t$$

$t<0 \Rightarrow$ подходят

$t=1,2$

$[\;]$

$\cancel{t>2}$

$t<1$

$12^3+5^3 \leq 13^3$

$5^3 \geq 13^3-12^3 = 1\cdot(13^2+13\cdot12+12^2)$

625

$\cancel{5^t \geq (12^{t-1}+12^{t-2}\ldots 13^t)}$

☑ черновик ☐ чистовик

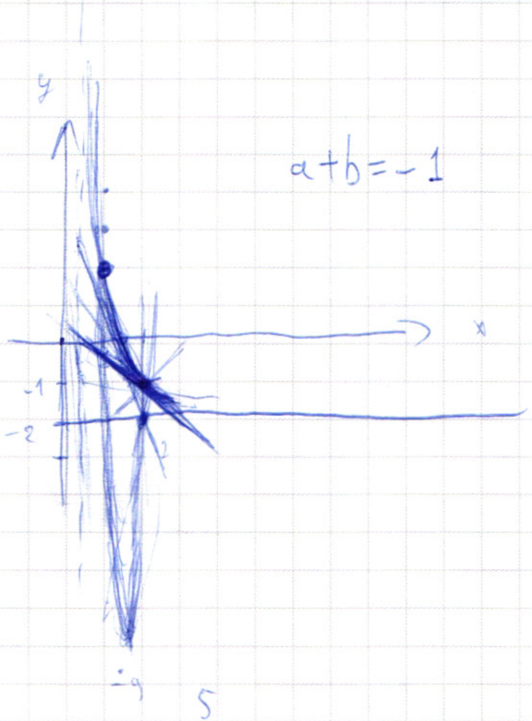
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$\frac{-(6x-4)+4}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$



$a+b=-1$

$18x^2-51x+28$

$\frac{-b}{2a} = \frac{51}{2\cdot 18} = \frac{17}{12}$

$18 \times 4 = 72$

$72-102-$

$\frac{18\cdot 17^2}{12^2} - \frac{51\cdot 17}{12} + 28$

$\frac{18\cdot 17^2 - 51\cdot 17\cdot 12}{12^2}$

$\frac{17(18\cdot 17 - 51\cdot 12)}{12^2} + 28$

$18 \times 17 = 126 + 18\_ = 306$

$51 \times 12 = 102 + 51\_ = 612$

$612 - 306 = 316$

$316 : 12 = 26$

$-\frac{17\cdot \cancel{316}}{\cancel{12}} + 28$

$17 \times 13 = 221$

$221 - 168 = 53$

$28 \times 6 = 168$

$-\frac{17\cdot 13}{6} + 28 = \frac{-53}{6} \approx -9$

$18 \times 4 = 72$

$51 \times 2 = 102$

$\cancel{72}-102+28$

$\frac{\cancel{18}\cdot 4}{\cancel{9}} - \frac{\cancel{51}\cdot 2}{\cancel{3}} + 28$

$8-34+28=2$

$18\cdot 4 - 51\cdot 2+28$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5
16
9
144

$f(1)=0$
$f(2)=0$
$f(3)=0$
$f(4)=0$ ✓
$f(5)=1$ ✓
$f(6)=0$ ✓
$f(7)=1$ ✓
$f(8)=0$ ✓
$f(9)=0$ ✓
$f(10)=1$ ✓
$f(11)=2$ ✓
$f(12)=0$ ✓
$f(13)=3$ ✓
$f(14)=1$ ✓
$f(15)=1$ ✓
$f(16)=0$ ✓
$f(17)=4$ ✓
$f(18)=0$ ✓
$f(19)=4$ ✓
$f(20)=1$ ✓
$f(21)=1$ ✓
$f(22)=2$ ✓
$f(23)=5$ ✓
$f(24)=0$ ✓
$f(25)=2$ ✓
$f(26)=3$ ✓
$f(27)=0$ ✓
$f(28)=1$ ✓

0 — 9
1 — 8
2 — 3
3 — 2
4 — 2
5 — 1

20

7

25-9

сл. вол-во

0 — ~~16~~·9
1 — 8·8
2 — 5 3
3 — 2·3
4 — 2·1
5 —

$$\begin{array}{r} 144 \\ +\ 64 \\ +\ 15 \\ 6 \\ 1 \\ \hline 230 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)