МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$;

$tg\,\alpha$ определён, принимает не меньше 3-х разных значений.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{4\beta}{2} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, по основн. тригонометр. тожд-ву

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, то

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\beta$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta+2\pi m,\ m\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = \pi-2\beta+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi m \\ 2\alpha = \pi-4\beta+2\pi n \end{array}\right. \quad m,n\in\mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \pi m \\ \alpha = \frac{\pi}{2}-2\beta+\pi n \end{array}\right. \quad m,n\in\mathbb{Z}$$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, значит $2\beta = \pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \pi m \\ \alpha = \frac{\pi}{2}\pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}+\pi n \end{array}\right.$$

Проверка: $tg\,\alpha$ определён, 1. $2\alpha=2\pi m; m\in\mathbb{Z}$:

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 4\beta+0 = 2\sin 2\beta\cos 2\beta = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}$ – верно;

2. $2\alpha = \pi - 4\beta + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin\pi + \sin(\pi - 4\beta) = \sin 4\beta = \frac{-8}{17}$ – верно.

2) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\sin 2\beta \Leftrightarrow \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(-2\beta)$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = -2\beta + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ 2\alpha + 2\beta = \pi + 2\beta + 2\pi l,\ l \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -4\beta + 2\pi k \\ 2\alpha = \pi + 2\pi l \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -2\beta + \pi k \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z}$$

Проверка: 1. $2\alpha = -4\beta + 2\pi k$:

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 0 - \sin 4\beta = 0 + \frac{8}{17}$ – не подходит

2. $2\alpha = \pi + 2\pi l$: $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi l$, $\operatorname{tg}\alpha$ не определён.

~~Во~~ Все возможные значения α: $\pi m,\ m \in \mathbb{Z}$;

$\frac{\pi}{2} \pm \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi m) = 0,\ m \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right). \end{array}\right.$$

Ответ: 0; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$; $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

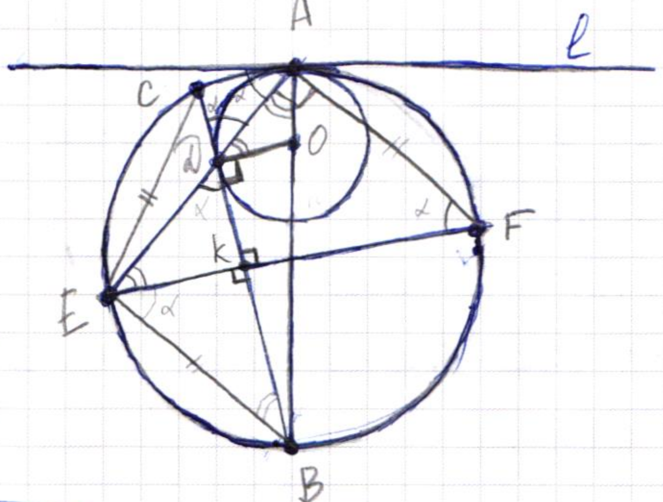
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4. Дано: Ω и ω касаются в точке A;
AB - диаметр Ω; BC касается ω в точке D;
$AD \cap \Omega = E$, $EF \perp BC$; $F \in \Omega$; $CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$.
Найти: R и r - радиусы Ω и ω, $\angle AFE$, $S(AEF)$.
Решение:



1) ~~Пусть~~ Проведём прямую l - общую касательную Ω и ω - ~~~~ через точку A.
Пусть угол между l и хордой AE: $\angle(l, AE) = \alpha$
$\alpha = \overset{\smile}{AE}/2 = \angle AFE = \angle ABE$ (вписанные в Ω углы)
$\angle(l, AD) = \alpha = \overset{\smile}{AD}/2 = \angle(BC, AD)$ (т.к. BC - касательная к ω)
$\angle BDE = \angle ADC = \alpha$ (вертикальные углы)
(**) Пусть O - центр окружности ω; $k = BC \cap EF$.
$\angle DEk = 90^\circ - \angle EDk = 90^\circ - \alpha$ (в прямоугольном $\triangle EkD$).
Проведём OD - радиус ω к ~~к~~ точке касания с прямой BC. По ~~~~ свойству такого радиуса $OD \perp BC$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\angle ADO = \angle CDO - \angle ADC = 90^\circ - \alpha$

$OD = OA = r$ - радиусы $\Rightarrow \triangle AOD$ - равнобедренный $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAO = \angle ADO = 90^\circ - \alpha$ (по свойству равнобедр. треуг-ка)

$\angle ADB = 180^\circ - \angle ADC = 180^\circ - \alpha$ (смежные углы)

2) $\triangle ADB$: $\angle ABD = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) - (180^\circ - \alpha) =$

$= 2\alpha - 90^\circ$

3) $\angle CBE = \angle ABE - \angle ABD = \alpha - (2\alpha - 90^\circ) = 90^\circ - \alpha$

4) $\angle BAE = \angle CBE = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$ по свойству окружности хорды BE и CE равны.

$BE = CE \Rightarrow \triangle BEC$ - равнобедренный по определению

Ek - высота $\Rightarrow$ Ek - биссектриса и медиана $\triangle BEC$ по свойству равнобедр. треугольника.

$EF \perp BC$, EF делит BC пополам $\Rightarrow$

$\Rightarrow EF$ - диаметр ~~по признаку~~ окружности Ω по признаку.

$Bk = Ck = \frac{1}{2} \cdot (BD + CD) = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{2} = \frac{9}{2}$.

5) $\triangle DkE \sim \triangle EkB$ по 2-м углам ($\angle DkE = \angle EkB = 90^\circ$, $\angle DEk = \angle EBk = 90^\circ - \alpha$)

$\frac{Dk}{Ek} = \frac{DE}{BE} = \frac{kE}{Bk} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{Ek^2}{Bk} = Dk \Leftrightarrow Ek^2 = \frac{9}{2}\left(\frac{9}{2} - \frac{5}{2}\right) = \frac{9}{2} \cdot \frac{4}{2} = 9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow Ek = 3$ (т.к. $Ek > 0$)

6) $\triangle EkB$: по теореме Пифагора $BE^2 = Ek^2 + Bk^2 =$

~~$BE = \sqrt{9 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \ldots$~~ $= 9 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = \frac{9 \cdot 13}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) $\triangle EAF \sim \triangle BKE$ по 2-м углам
$(\angle EAF = \angle BKE = 90°,\ \angle EBK = \angle FEA = 90° - \alpha)$

$$\frac{AE}{BK} = \frac{AF}{EK} = \frac{EF}{BE}$$

$$EF = \frac{AF \cdot BE}{EK} \overset{(*)}{=} \frac{BE^2}{EK} = \frac{9 \cdot 13}{4 \cdot 3} = \frac{3 \cdot 13}{4} = \frac{39}{4}$$

(*): $AF = BF$, т.к. $\angle BAE = \angle AEF = \alpha$.

$$R = \frac{EF}{2} = \frac{39}{8}$$

8) По ~~...~~ теореме о квадрате отрезка касательной (окружность ω, касат-я BD)

$$BD^2 = (AB - 2AO) \cdot AB$$

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 = \left(\frac{3 \cdot 13}{4} - 2r\right) \cdot \frac{3 \cdot 13}{4}$$

$$\frac{13^2}{4} = \frac{9 \cdot 13^2}{4 \cdot 4} - r \cdot \frac{3 \cdot 13}{2}$$

$$r \cdot \frac{3 \cdot 13}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{13^2}{4}$$

$$r = \frac{5 \cdot 13}{4 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{65}{24}$$

9) $\triangle BKE$: $\angle BKE = 90° - \angle EBK = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{BK}{EK} = \frac{9}{2 \cdot 3} = \frac{3}{2}$$

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$

10) $\angle AFE = \alpha = \operatorname{arctg} \frac{3}{2}$.

~~11) ΔBKE: по теореме Пифагора~~

$\cancel{BE^2 = EK^2 + BK^2 = 3^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 =}$

11) ΔAEF: $AF = BE = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tg}\angle AFE &= \frac{3}{2} \\ \operatorname{tg}\angle AFE &= \frac{AE}{AF} \end{aligned}\right\} \Rightarrow AE = \frac{3}{2} AF = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13} = \frac{9}{4}\sqrt{13}$$

$$S(AEF) = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}\sqrt{13} \cdot \frac{9}{4}\sqrt{13} =$$

$$= \frac{27 \cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$$

$$\begin{array}{r} \times\, 27 \\ 13 \\ \hline +\, 81 \\ 27 \\ \hline 351 \end{array}$$

Ответ: радиусы Ω и ω равны $\frac{39}{8}$ и $\frac{65}{24}$; $\angle AFE = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$; $S(AEF) = \frac{351}{16}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. Найти все $(a;b)$ такие, что

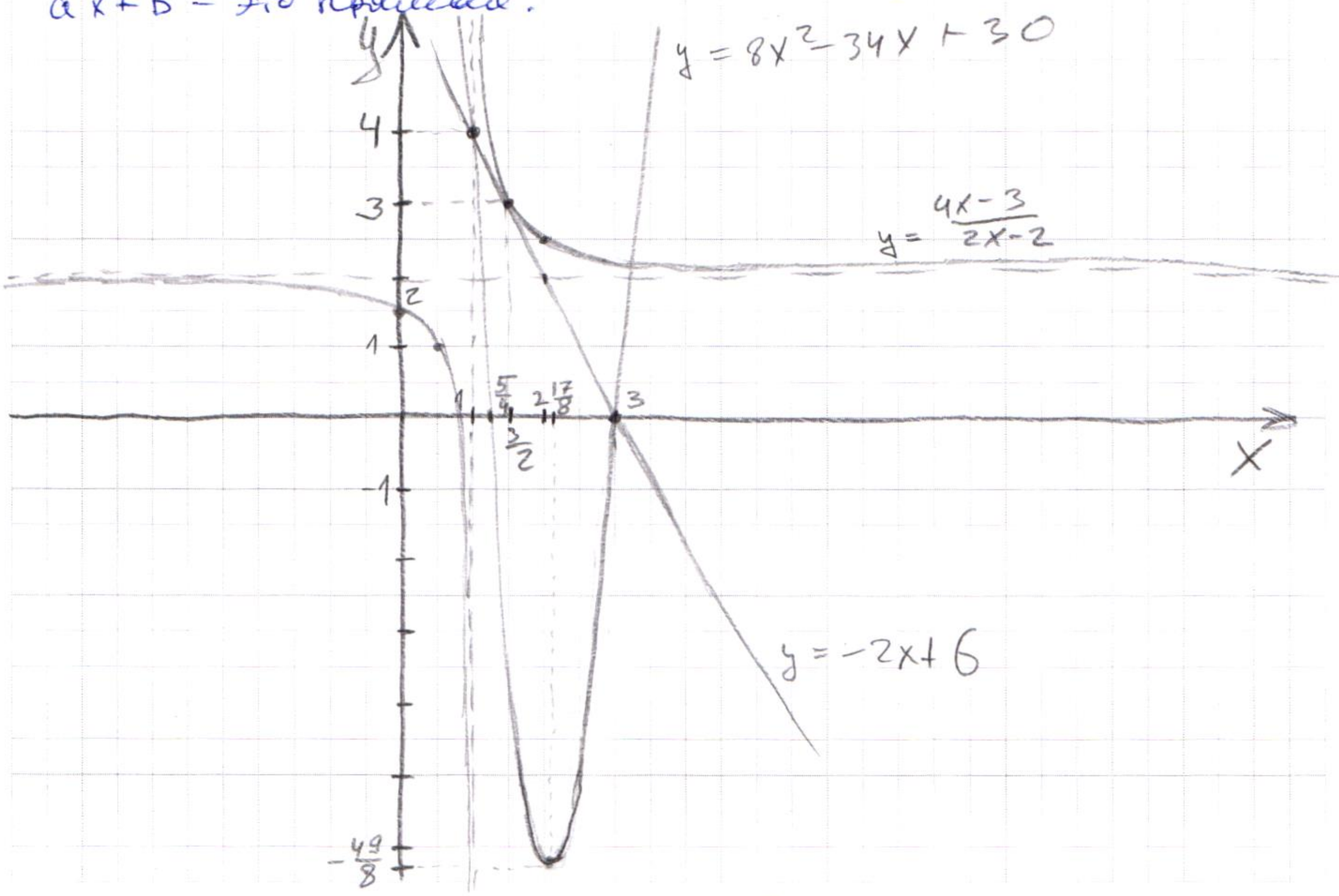
$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \quad \forall x \in (1;3]$$

$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{(2x-2)\cdot 2+1}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$ – это гипербола

$8x^2-34x+30 = 2(4x^2-17x+15) = 8(x-3)\left(x-\frac{5}{4}\right)$ – это парабола, абсцисса вершины: $x_B = \frac{3+5/4}{2} = \cancel{\frac{17}{4}} = \frac{17}{8}$

ордината: ~~$y_B = 2\left(4\cdot\frac{49}{4} - 17\cdot\frac{7}{2}+15\right) = 98 - 119 + 30 = 128 - 289 = 128 - 238 = -110$~~ ~~$y_B = 8\cdot\frac{17^2}{4} - 34\cdot\frac{17}{2}+30 = 2\cdot 289 - 289 + 30 =$~~ $y_B = 8\cdot\frac{17^2}{8^2} - 2\cdot 17\cdot\frac{17}{8}+30 = \frac{17^2}{8} - 2\cdot\frac{17^2}{8}+30 = \frac{240-289}{8} = \frac{-49}{8}$

$ax+b$ – это прямая.



Прямая $y=ax+b$ ~~пересекает~~ содержит точки $A(1; a+b)$ и $B(3; 3a+b)$

Если $a+b<4$, то прямая в ~~этой~~ точке A принимает меньшее значение, чем ~~ту~~ парабола в точке с $x=1$, т.е. такие a и b не подходят (по условию).

Аналогично не подходят (a, b) такие, что $3a+b<3$.

$y=-2x+6$ – прямая, проходящая через $(1;4)$ и $(3;0)$ – подходит (пересекая с гиперболой в $(\frac{3}{2};3)$.

Если $a+b>4$ или $3a+b>3$, то прямая в некоторых точках выше гиперболы

Ответ: $(-2; 6)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{\sqrt{17}}$

$tg\,\alpha=?$, не меньше 3-х зн.

$8\cdot\frac{17^2}{4^2}-34\cdot\frac{17}{4}+30=$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$=\frac{17^2}{2}-\frac{17^2}{2}+30=30$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta=-\frac{8}{\sqrt{17}}}$

$8\cdot\frac{17^2}{8^2}-2\cdot17\cdot\frac{17}{8}+30=$

$=\frac{17^2}{8}-2\cdot\frac{17^2}{8}+30$

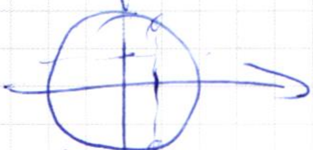
$\times\begin{array}{r}17\\17\\\hline 119\\17\\\hline 289\end{array}$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\underline{\cos 2\beta}+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

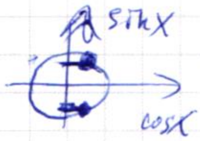
$-\frac{17^2}{8}+30=\frac{30-289}{8}=\frac{-259}{8}$

$\sin 2\alpha\cdot\overset{\cos\varphi}{\frac{4}{\sqrt{17}}}\pm\overset{\sin\varphi}{\frac{1}{\sqrt{17}}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$



$\frac{1}{2}x$ $\quad\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha\pm\varphi)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad\varphi=\arcsin\left(\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=\pm\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$



$\left[\begin{array}{l}2\alpha\pm\varphi=\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi m\\2\alpha\pm\varphi=\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}2\alpha=2\pi m\\2\alpha=\cancel{2}\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k\\2\alpha=\pi+2\pi n\\2\alpha=\pi-2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi l\end{array}\right.$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\beta$

$\left[\begin{array}{l}2\alpha+2\beta=2\beta+2\pi k\\2\alpha+2\beta=\pi-2\beta+2\pi m\end{array}\right.$

$2\alpha=2\pi k$

$2\alpha=\pi-4\beta+2\pi m$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(-2\beta)$

$\left[\begin{array}{l}2\alpha+2\beta=-2\beta+2\pi m\\2\alpha+2\beta=\pi+2\beta+2\pi n\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\alpha=-2\beta+\pi m\\\alpha=\frac{\pi}{2}+\pi n\end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$2.\ \begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$$3xy-2x-3y+2=-x(-3y+2)+(-3y+2)=$$
$$=(2-3y)(1-x)=(x-1)(3y-2)$$

$$-x\cdot\frac{3}{x}+6=3$$
$$24\cdot\frac{\frac{3}{x}-3}{x\cdot\frac{3}{x}-2}$$

$$\cancel{(3y-2x)^2=(x-1)(3y-2)}$$

$$3.\quad 3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x-|x^2+6x|^{\log_4 5}\geq 0$$

$$x^2+6x>0\qquad x(x+6)>0\qquad x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$$

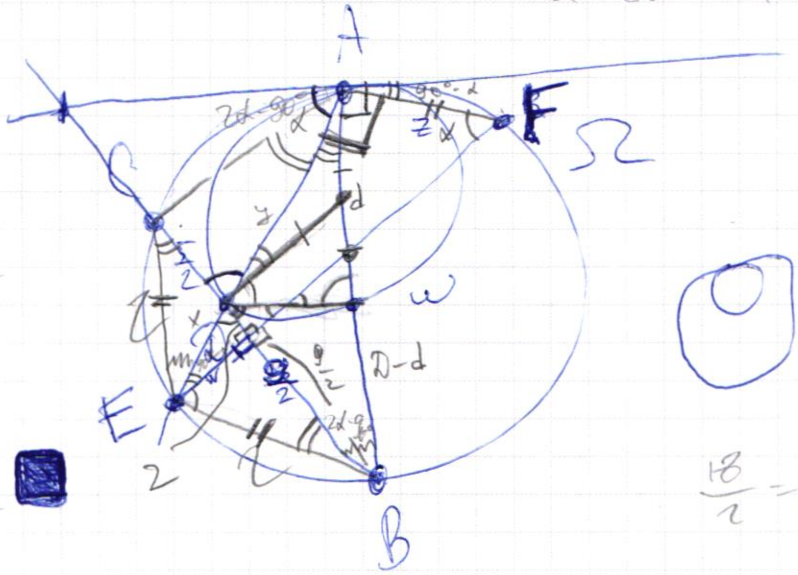
$$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x-(x^2+6x)^{\log_4 5}\geq 0$$

$$3^{\log_4 t}+t-t^{\log_4 5}\geq 0$$

$$t(1-t^{\log_4 5-1})=t(1-t^{\log_4\frac{5}{4}})$$

$$3+4-5$$

$$\alpha-90^\circ+\alpha$$



$$\left(\frac{13}{2}\right)^2=(D-d)D$$

$$\frac{5}{24}=\frac{BX}{2}$$

$$2\alpha-4\alpha+180^\circ=$$
$$=180^\circ-2\alpha$$

$$\frac{18}{2}=9$$

$$90^\circ-\alpha$$

$$90^\circ-2(90^\circ-\alpha)=$$
$$=-90^\circ+2\alpha=2\alpha-90^\circ$$

R, r, $\angle AFE$, $S(AEF)$ — ?

$CD=\frac{5}{21}$ $BD=\frac{13}{2}$

$$8\cdot\frac{49}{4}-34\cdot\frac{7}{2}+30=2\cdot49-17\cdot7+30=98+30-70-49=$$
$$=28-19=9$$

$$a+b>4$$
$$3a+b>3$$
$$\frac{3}{2}a+b>3$$
$$a+b+\frac{3}{2}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x+y)^2 + z^2 = D^2$ $\qquad 5 = (3^2+4^2)^{\frac{1}{2}}$

$x^2 = 2^2 + w^2$ $\qquad 3^w + 4^w \geq (\sqrt{3^2+4^2})^w$

$w^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2 = z^2$

$\frac{x}{z} = \frac{z}{w} = \frac{w}{9/2}$

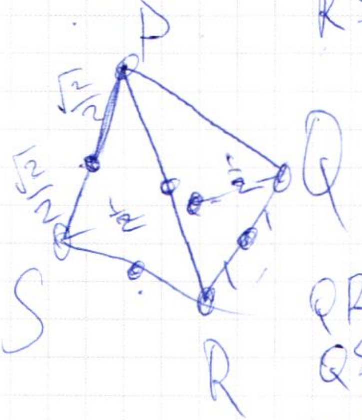
$\frac{D}{z} = \frac{x+y}{9/2} = \frac{z}{w}$

$\frac{D}{x} = \frac{x+y}{w} = \frac{z}{z}$

RS - ?

R_{min} - ?

$w^2 = 9 \qquad w = 3$



$QR = 2$

$QS = 1$

$PS = \sqrt{2}$

$9 + \frac{9^2}{4} = z^2$

$\frac{4\cdot 9 + 9\cdot 9}{4} = z^2 ; \quad z^2 = \frac{9\cdot 13}{4}$

$z = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$D = \frac{z^2}{w} = \frac{9\cdot 13}{4\cdot 3} = \frac{3\cdot 13}{4} = \frac{39}{4}$

$\log_4(x^2+6x) = w \qquad x^2+6x = 4^w$

$27 + 64 \geq 125$

91

$3^w + 4^w - (4^w)^{\log_4 5} \geq 0$

$3^w + 4^w - 5^w \geq 0 \qquad 3^w + 4^w \geq 5^w$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(w) = 3^w + 4^w - 5^w$

$k \quad p$

$w_1 > w_2$

$f(w_1) < f(w_2)$

$\downarrow\downarrow$?
$$-x \cdot \frac{1}{x} + 6 = 5$$
$$\frac{4 \cdot \frac{1}{2} - 3}{2 \cdot \frac{1}{2} - 2} = \frac{-1}{-1} = 1$$
< 0

$$f(w_1) - f(w_2) \overset{<0}{=} 3^{w_1} + 4^{w_1} - 5^{w_1} - 3^{w_2} - 4^{w_2} + 5^{w_2} =$$
$$= 3^k - 3^p + 4^k - 4^p + 5^p - 5^k =$$
$$= 3^p(3^{k-p} - 1) + 4^p(4^{k-p} - 1) + 5^p(1 - 5^{k-p}) \vee 0$$

$$\cancel{(3^x)'} \Rightarrow (a^x)' = ((e^{\ln a})^x)' = ((e^x)^{\ln a})' =$$
$$= \ln a \left(e^x \right)^{\ln a - 1} \cdot e^x = \ln a \cdot e^{x \ln a} = \underline{\ln a a^x}$$

$$f'(w) = \ln 3 \cdot 3^w + \ln 4 \cdot 4^w - \ln 5 \cdot 5^w$$

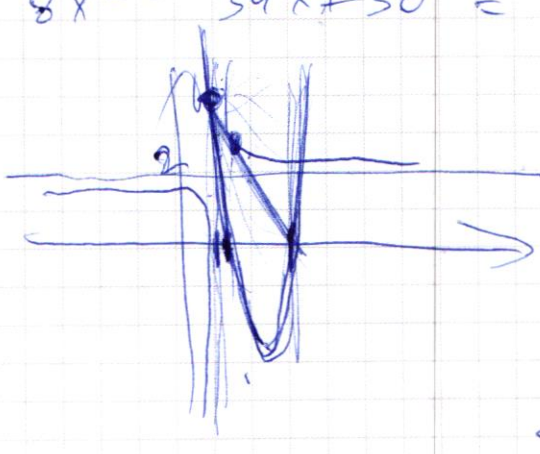
$$3^w + 4^w \geq 5^w$$
$$(3^w + 4^w)^2 \geq 5^{2w}$$
$$3^{2w} + 4^{2w} + 2 \cdot 3^w \cdot 4^w \geq 5^{2w}$$

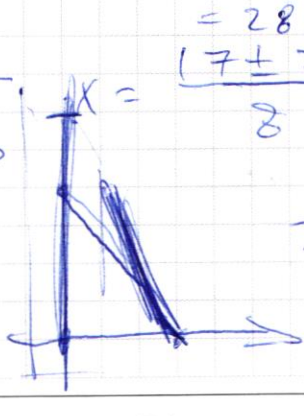
$$-2x + 6 = \frac{4x - 3}{2x - 2}$$
$$-2 \cdot \frac{5}{4} + 6 = -\frac{5}{2} + 6$$
$$\frac{4 \cdot \frac{5}{4} - 3}{2 \cdot \frac{5}{4} - 2} = \frac{2}{\frac{5}{2} - 2} = 4$$

6.
$$\frac{4x - 3}{2x - 2} = \frac{(2x - 2) \cdot 2 + 1}{2x - 2} = 2 + \frac{1}{2x - 2} = 2 + \frac{1}{2(x - 1)}$$

$8 - 34 + 30$
$$8x^2 - 34x + 30 = 2(4x^2 - 17x + 15)$$

$$D = 17^2 - 4 \cdot 4 \cdot 15 =$$
$$= 289 - 240 = 49 = 7^2$$
$$x = \frac{17 \pm 7}{8} = 3;\ \frac{5}{4}$$





$-2x + 6$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)