МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow |\cos(2\alpha+2\beta)|=\sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \Rightarrow 2\cdot\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=$

$=2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow |\sin 2\beta|=\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta)\geq 0$, $\sin 2\beta\geq 0 \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)=\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin 2\alpha=\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta+$

$+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cancel{\cos}\frac{2}{\sqrt{5}}+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta \overset{+\sin 2\alpha}{\vee} =-\frac{4}{5}$ (*)

$-\frac{2}{5}+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$, пусть $\operatorname{tg}\alpha=t$:

$10t=-4-4t^2 \Rightarrow 2t^2+5t+2=0 \Rightarrow t=\frac{-5\pm 3}{4} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha=-2\\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

$(D=25-16=9)$

2) $\cos(2\alpha+2\beta)<0$, $\sin 2\beta\geq 0 \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

(*): $-\frac{2}{5}-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha=0=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \Rightarrow \underline{\operatorname{tg}\alpha=0}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

3) $\cos(2\alpha+2\beta) \geq 0$, $\sin 2\beta \leq 0 \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = +\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$(*)$: $-\frac{2}{5} - \frac{2}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$

4) $\cos(2\alpha+2\beta) < 0$, $\sin 2\beta < 0 \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$(*)$: $-\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha = -2 \end{array}\right.$

Т.о.: $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \\ \operatorname{tg}\alpha = -2 \end{array}\right.$

Ответ: -2; $-\frac{1}{2}$ или 0.

Задача №2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+(3y-3)^2 = 25 \end{cases}$$

Пусть $y-1=a$, $x-2=b$, значит $x-2y = (x-2)-2(y-1) = b-2a$.

Тогда:

$$\begin{cases} b-2a = \sqrt{ba} \\ b^2+9a^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a \\ b^2-4ab+4a^2 = ab \\ b^2+9a^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 2a \\ (b-a)(b-4a)=0 \\ b^2+9a^2=25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b \geq 2a \\ b=a \\ a^2+9a^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} b \geq 2a \\ b=4a \\ 16a^2+9a^2=25 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} b \geq 2a \\ b=a \\ a = \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} b \geq 2a \\ b=4a \\ a=\pm 1 \end{cases} \quad (2) \end{array}$$

Решим системы по отдельности:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} x-2 \geq 2y-2 \\ x-2 = y-1 \\ y-1 = \pm\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2y \\ x = 2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \geq 2y \\ x = 2+\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1+\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array} \right.$ — не уд. усл. $x \geq 2y$

Решением этой сист. явл. пара чисел $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

2) $\begin{cases} x \geq 2y \\ x-2 = 4y-4 \\ y-1 = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geq 2y \\ x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y \geq 2y \\ x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$ — не уд. усл. $x \geq 2y$

$(6;2)$ — решение.

Т.о., решение изнач. сист. — $(6;2)$ и $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Ответ: $(6;2)$ и $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

Задача №3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq \underbrace{|x^2+18x|}_{>0}^{\log_{12}13} - 18x.$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

Пусть $x^2+18x = t$:

$$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13} \qquad \left(t^{\log_{12} 13} = 13^{\log_{12} t}\right)$$

$$\underbrace{5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} - 13^{\log_{12} t}}_{f(t)} \geq 0$$

Применим метод интервалов: $f(t) \geq 0$

$f(t) = 0$

$5^{\log_{12} b} + 12^{\log_{12} b} = 13^{\log_{12} b} \quad |: 12^{\log_{12} b}$

$\underbrace{\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12} b} + 1}_{g(b)} = \underbrace{\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12} b}}_{h(b)}$

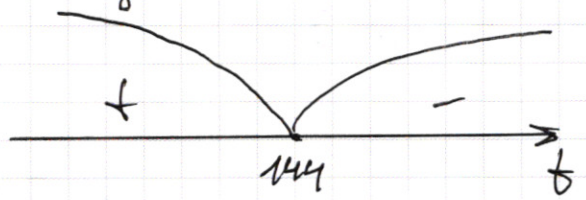
~~g(b) возраст. убывает на ОДЗ как композиция возрастающ убывающих функций ($\frac{5}{12} < 1$,~~

g(b) — композиция убыв. и возраст. ф-ций ($\frac{5}{12} < 1$, $\log_{12} b$ — возр.) => g(b) убыв. на ОДЗ.

h(b) — композиция возраст. ф-ций ($\frac{13}{12} > 1$) => h(b) возраст. на ОДЗ.

Тогда ур-е имеет не более одного решения. Подобрали: $b=144$ — корень. $b=144$ — единств.

f(b)



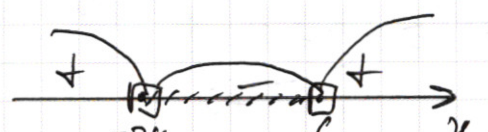
$f(1) = 1+1-1 > 0$

$f(12^3) = 12^3+5^3-13^3 = 1728+125-2197<0$

$f(b) \leq 0$ при $b \leq 144$.

$x^2+18x \leq 144$

$(x+24)(x-6) \leq 0$



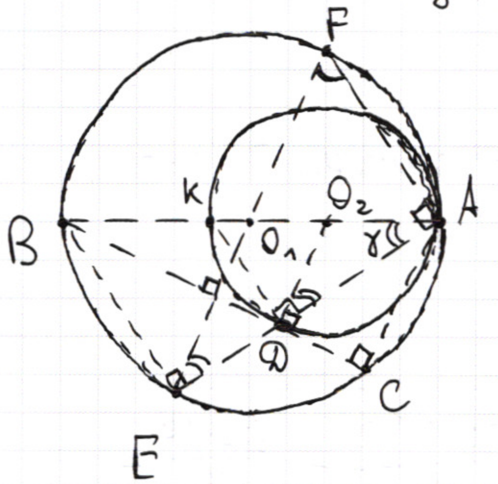
$x \in [-24; 6]$.

С уч. ОДЗ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$.

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4.



1) $O_2D \perp BC$, $EF \perp BC \Rightarrow (O_2D) \parallel (BC)$

2) Пусть $\angle BAE = \gamma$. $O_2A = O_2D$ (как рад.) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle O_2DA = \angle O_2AD = \gamma$.

$O_1A = O_1E \Rightarrow \angle O_1EA = \angle O_1AE = \gamma$.

Значит $(O_2D) \parallel (EO_1)$ (т.к. $\angle O_2DA = \angle O_1EA = \gamma$, а эти углы соотв.)

Но через т. E $\notin (O_2D)$ можно провести не более одной прямой, $\parallel$ данной, значит $O_1 \in EF$.

3) По теореме о кв-те кас.: $BD^2 = BK \cdot BA$.

Пусть радиус большей окр-ти R_1, а меньшей R_2:

$17^2 = (2R_1 - 2R_2) \cdot 2R_1$ (*)

4) (Примечание к чертежу: O_2A и O_1A перпендикулярны общей кас. к окр-тям, проход. через т. A, значит O_2, O_1 и A леж. на одной прямой, т.е. на диаметре AB).

$\angle BCA = 90°$ (как опир. на рад.), $\angle BDO_2 = 90° = \angle BCA$, $\angle ABC$ - общ $\Rightarrow$
$\Rightarrow \triangle O_2BD \sim \triangle ABC$, $k = \frac{O_2B}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{17+8} = \frac{17}{25}$

$O_2B = 2R_1 - R_2$, $AB = 2R_1 \Rightarrow \frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{17}{25} \Rightarrow 50R_1 - 25R_2 = 34R_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow R_2 = \frac{16}{25}R_1$. Подставим в (*): $17^2 = (2R_1 - \frac{32}{25}R_1) \cdot 2R_1$

$17^2 = \frac{36}{25}R_1^2 \Rightarrow \frac{6}{5}R_1 = 17 \Rightarrow R_1 = \frac{85}{6}$, $R_2 = \frac{16 \cdot 5 \cdot 17}{25 \cdot 6} = \frac{136}{15}$

5) $\angle ADK = \angle AEB = 90^\circ$ (как опир. на диам.) $\Rightarrow (BE) \parallel (KD)$.

По теор. о пропорц. отр.: $\frac{BA}{KA} = \frac{EA}{DA} \Rightarrow \frac{2R_1}{2R_2} = \frac{BA}{DA} = \frac{25}{16}$

6) Пусть $EA = 25x \Rightarrow DA = 16x$, $ED = 9x$

По ~~теор. о~~ св-ву пересек. хорд: $BD \cdot DC = ED \cdot DA \Rightarrow 136 = 144x^2$

$x^2 = \frac{136}{144} = \frac{17}{18} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{17}}{3\sqrt{2}} \Rightarrow EA = \frac{25 \cdot \sqrt{17}}{3\sqrt{2}}$

7) EF – диам. $\Rightarrow EF = 2R_1 = \frac{85}{3}$, $\angle EAF = 90^\circ$ (опир. на EF) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{AE}{EF} = \frac{25 \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{17}}{\cancel{3} \cdot \sqrt{2} \cdot 85} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$

8) По теор. Пиф.: $AF = \sqrt{EF^2 - AE^2} = \sqrt{\frac{25 \cdot 17^2 \cdot 2}{18} - \frac{625 \cdot 17}{18}} =$

$= \sqrt{\frac{25 \cdot 17(34-25)}{18}} = \frac{\overset{9}{\cancel{15}} \cdot \sqrt{34}}{\cancel{2}}$ $\frac{5\sqrt{34}}{2}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot EA = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{25 \cdot \sqrt{17}}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{125 \cdot 17}{12} = \frac{2125}{12}$

Ответ: $R_1 = \frac{85}{6}$, $R_2 = \frac{136}{15}$, $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$, $S_{AFE} = \frac{2125}{12}$

Задача №5.

Заметим, что $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

Кроме того, $f(1) = f(\frac{1}{n} \cdot n) = f(\frac{1}{n}) + f(n) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = -f(n)$.

Т.о. $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0$, т.е. $f(y) > f(x)$.

Посчитаем значение ~~из~~ ф-ции для каждого натурального числа в $[1; 24]$: $f(2) = [\frac{1}{2}] = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = f(2) + f(2) = 0$, $f(5) =$ $= [\frac{5}{4}] = 1$, $f(6) = f(2) + f(3) = 0$, $f(7) = 1$, $f(8) = f(4) + f(2) = 0$, $f(9) =$ $= f(3) + f(3) = 0$, $f(10) = f(2) + f(5) = 1$, $f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$, $f(12) = f(6) +$ $+ f(2) = 0$, $f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$, $f(14) = f(2) + f(7) = 1$, $f(15) = f(3) + f(5) = 1$,

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(16)=f(8)+f(2)=0$, $f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$, $f(18)=f(9)+f(2)=0$,

$f(19)=4$, $f(20)=f(4)+f(5)=1$, $f(21)=f(3)+f(7)=1$,

$f(22)=f(2)+f(11)=2$, $f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5$, $f(24)=f(2)+f(12)=0$.

Т.о. имеем 11 $f(n)=0$, 7 $f(n)=1$, 2 $f(n)=2$, 1 $f(n)=3$, 2 $f(n)=4$ и 1 $f(n)=5$.

1) $f(y)=0 \Rightarrow f(y)>f(x)$ не выполн.

2) $f(y)=1$. 7 вариантов выбора $f(y)$, 11 вариантов $f(x)$. ~~Всего~~ $7\cdot 11=77$ ~~вари~~ вариантов.

3) $f(y)=2 \Rightarrow f(x)=1$ или $f(x)=0$. 2 варианта $f(y)$, $11+7=18$ вариантов $f(x) \Rightarrow 2\cdot 18=36$ вариантов.

4) $f(y)=3 \Rightarrow f(x)=2,1$ или 0. 1 вариант $f(y)$, $18+2=20$ вариантов $f(x) \Rightarrow 1\cdot 20=20$ вар.

5) $f(y)=4 \Rightarrow f(x)=3,2,1$ или 0. 2 вар. $f(y)$, $20+1=21$ вар. $f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow 2\cdot 21=42$ вар.

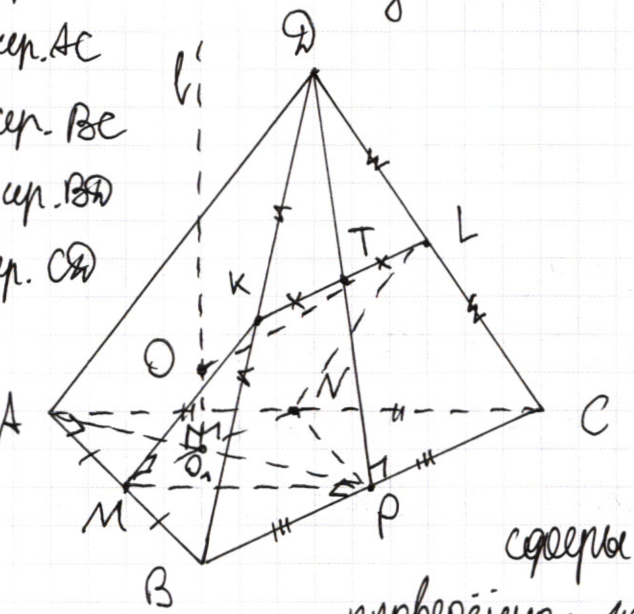
6) $f(y)=5 \Rightarrow f(x)=4,3,2,1$ или 0. 1 вар. $f(y)$, $21+2=23$ вар. $f(x) \Rightarrow$ $\Rightarrow 1\cdot 23=23$ вар.

Т.о., всего имеем $0+77+36+20+42+23=198$ пар чисел.

Ответ: 198.

M - сер. AB
N - сер. AC
P - сер. BC
K - сер. BD
L - сер. CD

Задача №4.



1) MP ∥ AC, PN ∥ AB ⟹ AMPN — п-м. Центр сферы равноуд. от его верш. ⟹ он проецируется в центр окр-ти, опис. около AMPN ⟹ AMPN — прямоугольник, $\angle A = 90°$, центр сферы леж. на ⊥-ре к пл-ти (ABC), проведённом через т. O_1 пересеч. диаг. AMPN.

2) $l \perp (ABC) \Rightarrow l \perp BC$. ~~$KL \perp$~~ $KL \parallel BC \Rightarrow l \perp KL$. Точки K и L тоже принадл. сфере.

Пусть пл-ть $(APD) \cap KL = T$. Тогда T — сер. KL (из т. Фалеса $DT = TP$, $\triangle LDT \sim \triangle CDP$, $k = \frac{DL}{DC} = \frac{1}{2} \Rightarrow TL = \frac{1}{2} PC$, аналогично $KT = \frac{1}{2} BP$, $BP = PC \Rightarrow KT = TL$, T — сер. KL). Соединим центр сферы (т. O) и т. T. $OK = OL$ как рад. сф. $\Rightarrow OT \perp KL$. $OO_1 \perp$ $\perp KL \Rightarrow KL \perp (APD)$, $KL \parallel BC \Rightarrow BC \perp (APD) \Rightarrow AP \perp BC$, тогда $\triangle BAC$ — р/б п/у, ~~$AB =$~~ $BC = \sqrt{2} \cdot AB = \sqrt{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$\sqrt{y(x-2)-(x-2)}$ $\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2$

$x\geq 2y$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$y-1=a$
$x-2=b$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ b^2+9a^2=5^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b\geq 2a \\ b^2-5ab+4a^2=0 \\ b^2+9a^2=5^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=4a \\ b=a \end{array}\right. \\ b^2+9a^2=25 \\ b\geq 2a \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=4a \\ b\geq 2a \\ \cancel{25}a^2=\cancel{25}\ 1 \end{cases} \\ \begin{cases} b=a \\ b\geq 2a \\ a^2=\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=4y-4 \\ x-2\geq 2y-2 \\ \left[\begin{array}{l} y-1=-1 \\ y-1=1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=y-1 \\ x\geq 2y \\ y^2-2y+1=\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=-2 \\ x\geq 2y \end{cases} \text{- не подх.} \\ \begin{cases} y=2 \\ x=6 \\ x\geq 2y \end{cases} \text{- подх.} \\ \begin{cases} x=y+1 \\ x\geq 2y \\ 2y^2-4y-3=0 \end{cases} (*) \end{array}\right.$$

$\frac{D}{4}=4+6=10$

$y=\frac{2\pm\sqrt{10}}{2}$

$$(*):\ \begin{cases} x=y+1 \\ x\geq 2y \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y=1+\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ x\geq 2y \end{cases} \text{- подх.} \\ \begin{cases} x=2+\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y=1+\frac{\sqrt{10}}{2} \\ x\geq 2y \end{cases} \text{- не подх.} \end{array}\right.$$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$ ОДЗ: $x^2+18x>0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

Замена: $x^2+18x=t$

$\underbrace{5^{\log_{12}t}}_{>0}+t\geq \underbrace{13^{\log_{12}t}}_{>0}$ ~~Прологар. по осн. 12~~

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}\geq 13^{\log_{12}t}$ $|:12^{\log_{12}t}$

~~Замена~~.

$\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}+1\geq\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}$

$f(t)=\left(\frac{5}{12}\right)^{\log_{12}t}+1-\left(\frac{13}{12}\right)^{\log_{12}t}$

$f(t)\geq 0$
$f(t)=0$

$t=144$

$f(t)$ + 144 − t

$f(1)=1+1-1=1>0$

$f(12^3)=\frac{125}{12^3}+1-\frac{13^3}{12^3}=$

$=\frac{125+12^3-13^3}{12^3}<0$

$\begin{array}{r} 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times 144 \\ 12 \\ \hline 1728 \end{array}$

13^3

$\begin{array}{r} \times 169 \\ 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$

с уч. ОДЗ:

$\Rightarrow x\in(0;6]$.

$t\leq 144$

$x^2+18x-144\leq 0$

-24 6 x

☑ черновик   ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow |\cos(2\alpha+2\beta)|=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$tg\,\alpha = t$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

1) $\cos(2\alpha+2\beta)>0 \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta)=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta+\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

~~$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$~~

$(+2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}$ ~~$=\cos(2\alpha+2\beta)$~~

1а) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\frac{2t}{1+t^2}=-\frac{4}{5}$

$10t=-4-4t^2$

$2t^2+5t+2=0$

$D=25-16=9$

$t=\frac{-5\pm 3}{4}$

$\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=-\frac{1}{2}\end{array}\right.$

1б) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{4}{5}+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\frac{2t}{1+t^2}=0$

$tg\,\alpha=0$

2) $\cos(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

2а) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha=0\ldots$

2б) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}\ldots$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

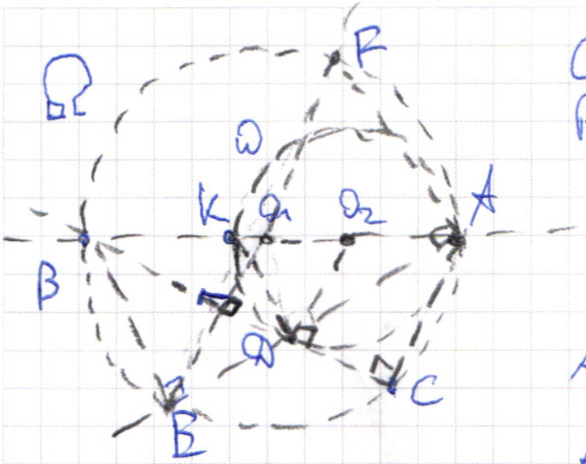
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD = 8$

$BD = 17$

~~$AKD \sim \triangle ABE,\ k = \frac{AK}{AB} = \frac{KD}{BE} = \frac{AD}{AB}$~~

$DO_2 \parallel EF$

$AKD \sim ABE,\ k = \frac{AD}{AE} = \frac{AK}{AB} = \frac{KD}{BE}$

$\frac{AK}{AB} = \frac{DO_2}{BK} = \frac{AO_2}{AO_1}$

EO_1 и $DO_2 \Rightarrow BF = EO_1$

$BD = 17$, $BC = 25$ $\qquad \frac{BO_2}{BA} = \frac{17}{25}$ $\qquad 17 + R_2^2 = (2R_1 - 2R_2)^2$

$\frac{2R_1 - R_2}{2R_1} = \frac{17}{25}$ $\qquad \frac{AD}{AB} = \frac{16}{25}$ $\qquad x^2 = \frac{34}{36} = \frac{17}{18}$

$50R_1 - 25R_2 = 34R_1$ $\qquad AD = 16x$ $\qquad 144x^2 = 136$

$R_2 = \frac{16}{25} R_1$ $\qquad BD = 9x$ $\qquad x = \frac{2\sqrt{34}}{12} = \frac{\sqrt{34}}{6}$

~~$144x^2 = 136$~~

$17^2 = BK \cdot 2R_1 = (2R_1 - 2R_2) \cdot 2R_1 = \frac{36}{25} R_1^2$ $\qquad AE = 25x = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

$17 = \frac{6}{5} R_1 \Rightarrow R_1 = \frac{85}{6}$, $R_2 = \frac{16}{25} \cdot \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{136}{5 \cdot 3} = \frac{136}{15}$

$S = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{15\sqrt{17}}{6\sqrt{5}} \cdot \frac{25\sqrt{34}}{6} = \frac{5 \cdot 25 \cdot 17}{6 \cdot 2 \cdot 9} \cdot \frac{1}{15} = \frac{85 \cdot 25}{12} = \frac{2125}{12}$

~~$\frac{85}{6} - \frac{16}{25} = \frac{17 \cdot 8}{3 \cdot 5} = \frac{136}{15}$~~

$EF = 2R_1 = \frac{85}{3}$ $\qquad \frac{AE}{EF} = \frac{25 \cdot \sqrt{34} \cdot 3}{6 \cdot 85} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$EF^2 = \frac{25 \cdot 17^2}{9} = \frac{25 \cdot 2 \cdot 17^2}{18}$

$AE^2 = \cancel{\frac{625 \cdot 34}{6}}\ \frac{625 \cdot 17}{18}$

$AF = \sqrt{\frac{25 \cdot 17\,(2 \cdot 17 - 25)}{18}} = 15 \cdot \sqrt{\frac{17}{18}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

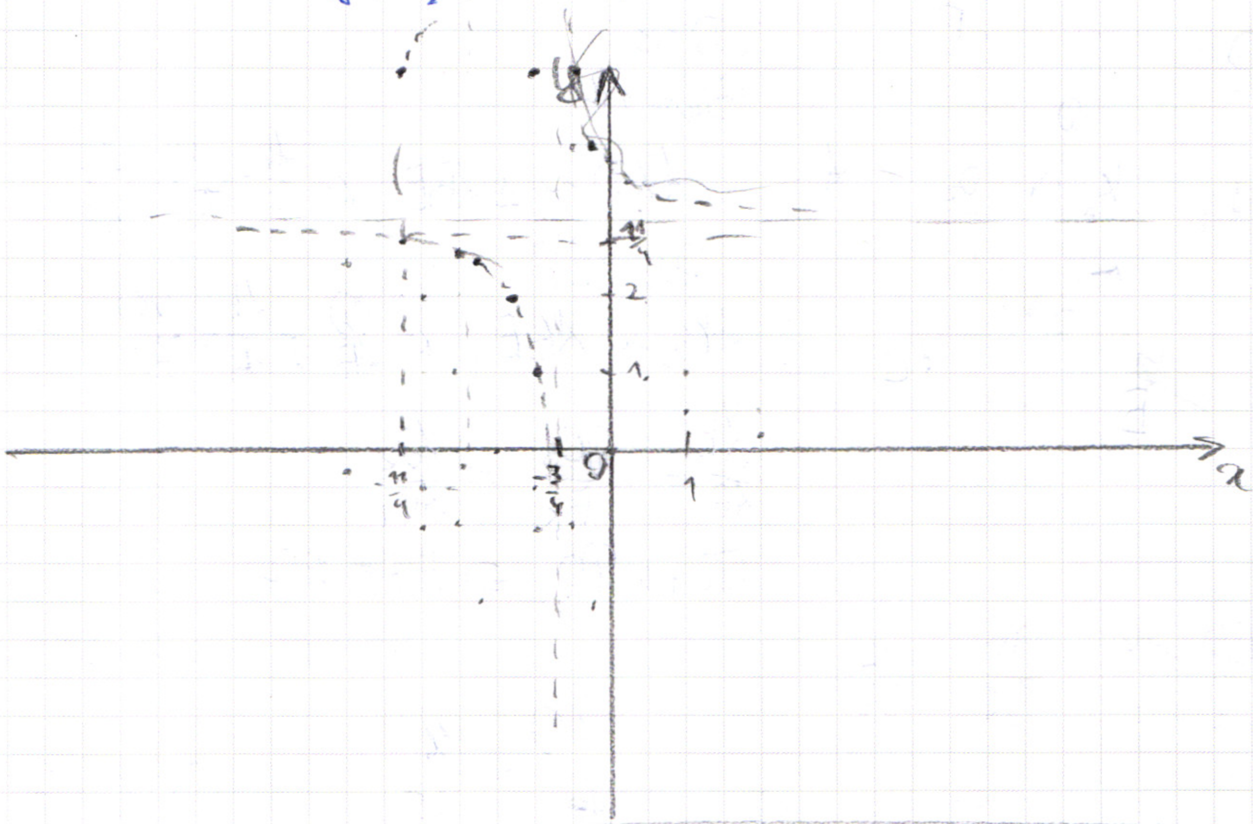
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3+\frac{2}{4x+3}=\underbrace{3+\frac{1}{2x+\frac{3}{2}}}_{f(x)}\le ax+b$ $\quad f(-\frac{11}{4})=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}$

$g(-\frac{11}{4})=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17=5$

$ax+b\le\underbrace{-8x^2-30x-17}_{g(x)}$ $\quad \frac{D}{4}=225-8\cdot17=89$



$$\begin{cases} y+bx\ge\frac{12b+11}{4b+3} \\ y+bx\le-8b^2-30b-17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-x\ge1 \\ y-x\le5 \end{cases}$$

$+\quad-\quad+$

$-\frac{3}{4}\frac{11}{12}\quad-\frac{11}{12}\frac{3}{4}$

$$\begin{cases} y-\frac{11}{4}x\ge\frac{11}{4} \\ y-\frac{11}{4}x\le5 \end{cases}$$

$0\ge\frac{8b+8}{4b+3}$

$$\begin{cases} y-2x\ge \\ \end{cases}$$

$0\ge\frac{2}{4b+3}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

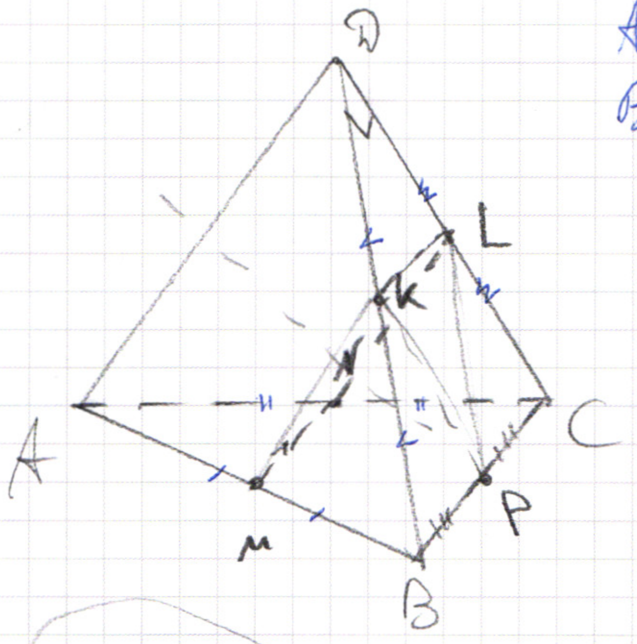
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



AB = 1

BD = 2

CD = 3

BC = ?

$R_{шч}$ = ?

$\frac{2}{3}$

$\frac{\cancel{32}}{\cancel{33}} \vee \frac{24}{35}$

$\cancel{1440} \vee$

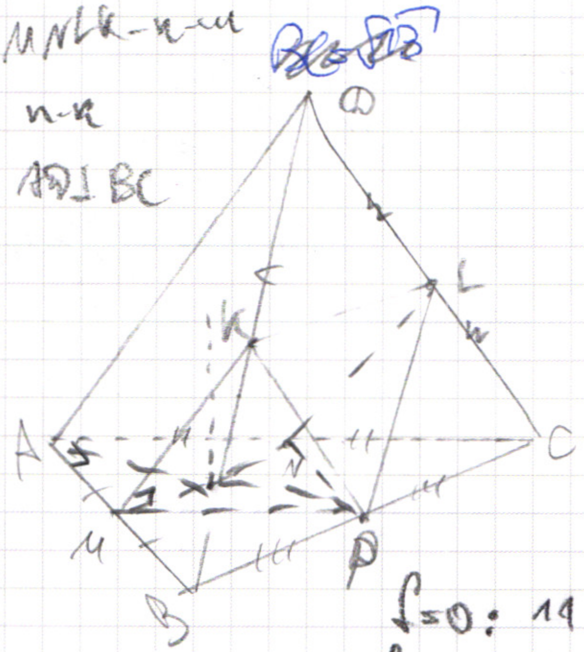
$\cancel{72}\ 70 < 72$

MNLK – к – м

к – к

AD ⊥ BC

$\cancel{BC = \sqrt{13}}$



$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{2} \cdot 2\right) = f(1) = 0 = f\left(\frac{1}{2}\right) + f(2)$

$-f(n) = f\left(\frac{1}{n}\right)$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

f=0: 11

f=1: 4

f=2: 2

f=3: 1

f=4: 2

f=5: 1

$f(2) = 0$ $\quad f(19) = 4$

$f(3) = 0$ $\quad f(23) = 5$

$f(10) = 1$

$f(5) = 1$

$f(4) = 0$ $\quad f(11) = 1$ $\quad f(20) = 1$

$f(7) = 1$

$f(6) = 0$ $\quad f(15) = 1$ $\quad f(22) = 2$

$f(11) = 2$

$f(8) = 0$ $\quad f(16) = 0$ $\quad f(24) = 0$

$f(13) = 3$

$f(9) = 0$ $\quad f(18) = 0$

$f(14) = 4$

$f(12) = 0$ $\quad f(20) = 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)