МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{2\sin\alpha\cos}\ 2\sin\gamma\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{57}}$

$\cancel{2\sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{57}}}$

$2\cos^2 - 1 = \cos 2$

$\cancel{2\sin 2\alpha}\ \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{57}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{57}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\cdot(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha$

$2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha = \frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{57}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{57}}$

граффи графи

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{57}} \Rightarrow$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{57}}$

$\cancel{2\beta} \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{57}}$ или $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{57}}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{57}}\cos = -\frac{1}{\sqrt{57}}$

или $\sin 2\alpha - 2\cos = -1$

$\sin\ tg + 2 = -\frac{1}{\cos}$

$tg^2 + 4tg + 4 = \frac{1}{\cos^2}$

$4tg 2\alpha = 3$

$tg 2\alpha = \frac{3}{4}$

$tg 2\alpha = \frac{2tg}{1 - tg^2} = \frac{3}{4}$

$2tg = -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}tg^2$

$3tg^2\alpha - 8tg\alpha - 3 = 0$

$tg - 2 = -\frac{1}{\cos}$

$-4tg + 3 = 0$

$tg 2\alpha = \frac{3}{4}$

$\frac{2tg}{1 - tg^2} = \frac{3}{4}$

$2tg = \frac{3}{4} - \frac{3}{4}tg^2$

$3tg^2\alpha + 8tg\alpha - 3 = 0$

$\begin{cases} \frac{1}{4}a + b = 3 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \cancel{\frac{16}{5}}$

$\frac{3}{4}a = -2$

$a = -\frac{8}{3}$

$b = \frac{11}{3}$.

$4 + \frac{1}{x - \frac{5}{4}} = -\frac{8}{3}x + \frac{11}{3}$

$\frac{3}{\ } = -8x - 1$

$3 = -8x^2 + 10x - x + \frac{5}{4}$

$8x^2 - 9x + 1\frac{3}{4}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2 $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \ (1) \end{cases}$, где $x-12y\geq 0$

(1) $x^2+36y^2-12x-36y=45$.

$\cancel{36\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}+(36y^2-2\cdot 6\cdot 3y+9)-9+(x^2-12x+36)-36=45$

$(6y-3)^2+(x-6)^2=90$.

~~$x-12y=x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$~~

~~$x-2t=\sqrt{\frac{xt}{6}-2t-x+6}$~~

~~$x^2-26xy+12y+144y^2$~~

№3 т.к. $x^2+5\ldots>0$ при люб x, то при усл. вып нерав-ва

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq 9 \Rightarrow$

~~$-12y-x=t$~~ $2x+t=\sqrt{2xy+t+6}$

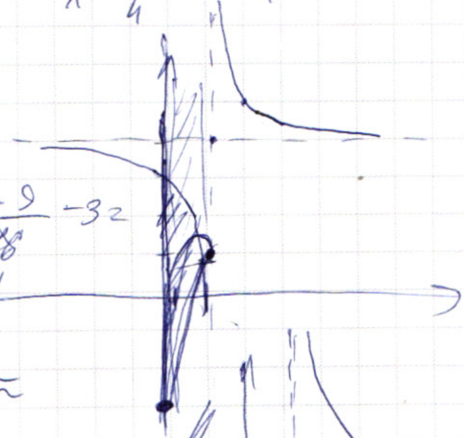
$4x^2+t^2+4tx=2xy+t+6$.

$y=4+\frac{4}{4x-5}=4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}\leq ax+b\leq -32x^2+36x-3$

$x_0=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$

$f(x_0)=-32\cdot\frac{81}{16^2}+36\cdot\frac{9}{16}-3=$

$=\frac{81}{8}-3=\frac{57}{8}\approx 7\frac{1}{8}$



$-32x^2+36x-3=4+\frac{16x-16}{4x-5}$

$-128x^3+160x^2+144x^2-180x-12x+15=$

$=16x-16$

$-128x^3+304x^2-208x+31=0$

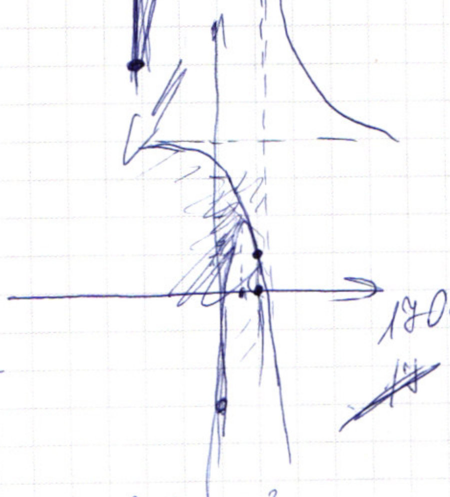
$-32x^2+36x-7=\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

$-32x^3+40x^2+36x^2-45x-7x+\frac{31}{4}=0$

$-32x^3+76x^2-45x-7x+\frac{31}{4}=0$

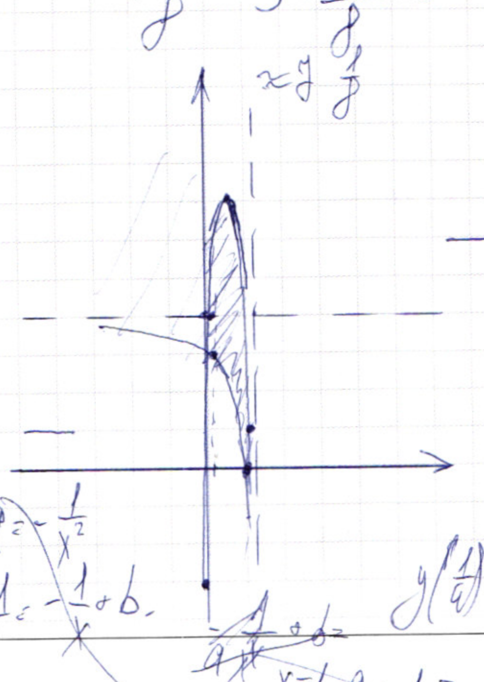
$P(1)\neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ пересе не в $x>1$



170+

$\frac{7\ 15}{103}$



$f\left(\frac{1}{4}\right) \to -32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac{1}{4}-3\geq 4$

$a=-\frac{1}{x^2}$

$-\frac{1}{x}=-\frac{1}{x}+b$.

$y\left(\frac{1}{4}\right)\in 3;4$ $\quad y(1)\in(0;1)$

но. $\frac{1}{x-\frac{5}{4}}+4=ax+5 \Rightarrow$ 1 реш.

$x=1$ $a=-1 \Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$, где $10x-x^2>0$.

т.к. $10x-x^2>0 \Rightarrow$ ~~$10x+|x^2-10|^{\log_3 4}$~~ $|x^2-10x|=10x-x^2$.

Пусть $10x-x^2=t$ $\quad 10x+t^{\log_3 4} \geq x^2+5^{-\log_3 t}$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{-\log_3 t}$

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t} \geq 5^{-\log_3 t} \quad \Big| : 5^{-\log_3 t} \neq 0$

~~Из Так. как $a^n+b^n=c^n$ имеет 1 решение для $n=2$~~

~~более 1 решения для $n<2$~~

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 t}+\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 t} \geq 1$ не ~~имеет~~ решений

Пусть $\frac{3}{5}=\sin\alpha$, тогда $\cos\alpha=\frac{4}{5}$ для $\alpha<\frac{\pi}{2}$ $\Rightarrow \sin\alpha^{\log}+\cos^{\log} \geq 1$

~~$\sin^2+\cos^2=1$~~ $\quad \sin^3<\sin^2$

$\cos^3<\cos^2 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^3+\left(\frac{4}{5}\right)^3<1$.

~~$x-12y$~~ $=\sqrt{}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

~~$x-12y>0$~~

$(x^2-12y)^2+12xy-108y^2-12x-36y=45$.

$2xy-12y-x+6+12xy-108y^2+12x-36y=45$.

$x(11+17y)-48y-108y^2=39$.

$\frac{1}{(x-\frac{5}{4})^2}=\frac{8}{3}$

$3=-8\cdot(x-\frac{5}{4})^2\cdot 4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}=ax+b$.

$b=1-a$. $ax^2+(\frac{9}{4}a+3)x+\frac{5}{4}(a+3)=0$

$3+\frac{1}{\ldots}=a(x-1)$

$3x-\frac{5}{4}-3+1=a(x^2-\frac{9}{4}x+\frac{5}{4})$

$x^2-\frac{21}{4}x+5a$

$D=\left(\frac{9}{4}a+3\right)^2-5a^2+15a\geq 0$

$\frac{81}{16}a^2+\frac{27}{2}a+9-5a^2-15a\geq 0$

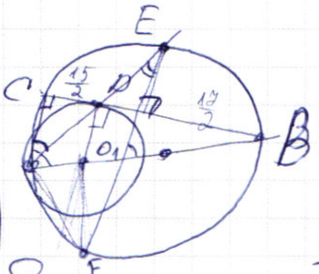
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\frac{DO_1}{CA} = \frac{BO_1}{AB} = \frac{\frac{17}{2}}{16}$

$\frac{AD}{AE} = \frac{DO_1}{EF}$

$\frac{DO_1}{AC} = \frac{17}{32}$

$\frac{2R}{2R-r}$ $1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{32}$

~~$AD\cdot AE - AD^2 = \frac{15\cdot 17}{4}$~~

$\frac{r}{2R} = \frac{15}{32} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{15}{16}$. $\Rightarrow$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = (2R-2r)\cdot 2R = 4R^2 - 4Rr$

№3. $f(ab) = f(a) + f(b)$

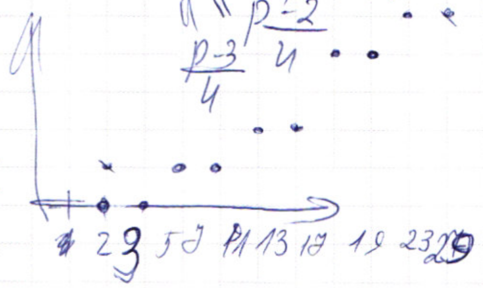
$f(p) = [p/4] \Rightarrow f(p) = \frac{p}{4}$

$\frac{p-1}{4}$ $\frac{p-2}{4}$ $\frac{p-3}{4}$

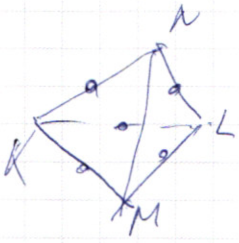
p прост $\Rightarrow f(p) \neq \frac{p}{4}$

$\frac{17^2}{4} = 4R^2 - \frac{15}{4}R^2 =$

$= \frac{1}{4}R^2 \Rightarrow R = 17$. $r =$



№7



$3^2 - 2\cdot ... \cos M = 9$

$\cos M =$

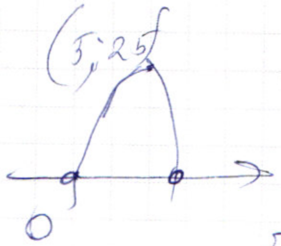
$a^n + b^n = c^n$

~~$10_x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq$~~

~~$(10x)$~~ $3^{\log_3 10x}$ ~~$+ |x^2 - 10x|^{\log_3 4}$~~ $\geq 3^{\log_3}$ ~~О~~ $10x - x^2 > 0. \Rightarrow$

$\Rightarrow |x^2 - 10x| = 10x - x^2 = t$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$



$t + 3^{\log_3 t \cdot \log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} \Rightarrow 3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

т.к. $3^2 + 4^2 = 5^2$, $3 + 4 > 5$, a^n — моном. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 t \leq 2 \Rightarrow$

$-2 \leq$

$\Rightarrow t \in (0; 9) \Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $10x-x^2=t$ $\quad 10x+|-t|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3 t}$

$$t+|t|^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t} \qquad \text{ОДЗ: } t>0$$

т.к. $t>0 \Rightarrow |t|=t \Rightarrow t+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$

$$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}\geq 5^{\log_3(t)} \;\Big|:5^{\log_3 t}\neq 0$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 t}+\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 t}\geq 1.$$

т.к. $\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, $\left(\frac{3}{5}\right)^n<\left(\frac{3}{5}\right)^2$, $\left(\frac{4}{5}\right)^n<\left(\frac{4}{5}\right)^2$ для $n>2$, ~~то~~ а $\left(\frac{3}{5}\right)^m>\left(\frac{3}{5}\right)^2$ и $\left(\frac{4}{5}\right)^m>\left(\frac{4}{5}\right)^2$ для $m<2$, то ~~если~~ $\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n<1$ для $n>2$ и $\left(\frac{3}{5}\right)^m+\left(\frac{4}{5}\right)^m>1$ для $m<2$, то т.к. $\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 t}+\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 t}\geq 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \log_3 t\leq 2 \Rightarrow t\leq 9$$

$\Rightarrow t\in(0;9]$

$$t=10x-x^2 \Rightarrow \begin{cases}10x-x^2>0 \quad (1)\\ 10x-x^2\leq 9 \quad (2)\end{cases}$$

(1) $10x-x^2>0$

$10x-x^2=0$

$x=0 \quad x=10$

(2) $10x-x^2\leq 9$

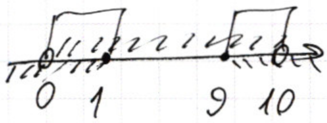
$x^2-10x+9\geq 0$

$x^2-10x+9=0$

по теореме Виета

$x=1 \quad x=9$

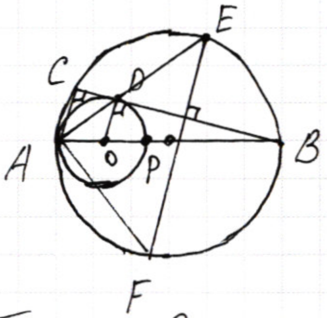
Таким образом



$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$.

№4.



$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

Найти: радиусы окружностей, $\angle AFE$, S_{AFE}.

Пусть R-радиус большей окружности (Ω), а r - меньшей, O-центр меньшей окружности. (ω)

BC-касательная ω, D-точка касания $\Rightarrow OD \perp BC$ (радиус).

$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. опирается на AB-диаметр Ω

$$\left.\begin{matrix} AC \perp BC \\ OD \perp BC \end{matrix}\right| \Rightarrow OD \parallel AC \Rightarrow \text{(по теореме Фалеса)} \ \frac{BO}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{OD}{AC}$$

$$\frac{2R - r}{2R} = \frac{\frac{17}{2}}{\frac{17}{2} + \frac{15}{2}} = \frac{r}{AC} \ (1)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{32} \Rightarrow 2R - r = \frac{17}{32} \cdot 2R$$

$$\Downarrow$$

$$r = \frac{15}{16} R.$$

BC-касательная к $\omega \Rightarrow$ (по свойству касательной) $BD^2 = BP \cdot AB$ (P-точка пересечения ω и AB)

$$\frac{17^2}{4} = (2R - 2r) \cdot 2R$$

$$\frac{17^2}{4} = 4R^2 - 4Rr = 4R^2 - 4R \cdot \frac{15}{16} R = \frac{1}{4} R^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = 17 \Rightarrow r = \frac{15 \cdot 17}{16}.$$

$$(1) \ \frac{r}{AC} = \frac{17}{32} \Rightarrow \frac{15 \cdot 17}{AC \cdot 16} = \frac{17}{32} \Rightarrow AC = 30.$$

Рассмотрим $\triangle ACD$, $\angle ACD = 90^\circ \Rightarrow AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{(15 \cdot 2)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2} =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= 15\cdot\sqrt{4+\frac{1}{4}} = \frac{15\cdot\sqrt{17}}{2}$

AE, BC - хорды; $AE \cap BC = D$ $\Rightarrow BD\cdot CD = AD\cdot DE$ - по свойству хорд.

$\frac{17}{2}\cdot\frac{15}{2} = \frac{15\cdot\sqrt{17}}{2}\cdot DE \Rightarrow DE = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$AE = AD + DE = \frac{15\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{17}}{2} = 8\sqrt{17}$

Рассмотрим $\triangle AEF$. по теореме синусов $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = \frac{AF}{\sin\angle AEF} = 2R$ (1)

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{8\sqrt{17}}{\sqrt{\ }2\cdot 17} = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$

т.к. F и E лежат по разные стороны от AB, то $\angle AFE < 90° \Rightarrow \cos\angle AFE = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $(\cos\angle AFE = \sqrt{1-\sin^2\angle AFE})$.

Рассмотрим $AC \parallel EF$ (т.к. $AC \perp BC$ и $EF \perp BC$), AE - секущая.

$\angle CAE = \angle AEF$ (н. л.)

Рассмотрим $\triangle ACD$ $\angle ACD = 90° \Rightarrow \begin{cases} \sin\angle CAD = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos\angle CAD = \frac{CA}{AD} = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow$

Рассмотрим $\triangle AEF$. $\sin\angle AFE = \cos\angle CAD = \cos\angle AEF \Rightarrow \angle AFE + \angle AEF = 90° \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle EAF = 90°$

$\angle EAF = 90°$; $\angle EAF$ - вписанный $\Rightarrow EF$ - диаметр $\Omega \Rightarrow$
$\Rightarrow EF = 2R = 34.$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}AE\cdot EF\cdot\sin\angle AEF = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{17}\cdot 34\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = 136$

Ответ: $R = 17$; $r = \frac{275}{16}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$; $S_{AEF} = 136$.

№1 $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ (1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$ (2)

(2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

упростим левую часть $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+$
$+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=$
$=\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=$
$=2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)$.

$2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{5}$

из (1) получим $2\cdot\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{2}{5}\Rightarrow\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta=\pm\sqrt{-\cos 2\beta^2+1}\Rightarrow\sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$ или $\sin 2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+$
$+\cos 2\alpha\sin 2\beta\Rightarrow$ $\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$ или $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5}-$
$-\frac{\cos 2\alpha\cdot 2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

таким образом $\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha=-1$ (3) или $\sin 2\alpha-2\cos 2\alpha=-1$ (4)

~~т.к. если $\cos 2\alpha=0$, то si~~

~~т.к. $tg\alpha$~~ (3): $2\sin\alpha\cos\alpha+2(2\cos^2\alpha-1)=-1$ или
$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha=1$.

т.к. $tg\alpha$ определён $\Rightarrow\cos\alpha\neq0\Rightarrow$ поделим на $\cos^2\alpha$

$2\,tg\alpha+4=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

т.к. $tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, то $2tg\alpha+4=tg^2\alpha+1$
$tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0$

по теореме Виета $tg\alpha=-1$ $tg\alpha=3$.

(4) $2\sin\alpha\cos\alpha-2(2\cos^2\alpha-1)=-1$
$2\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha=-3$ $\big|:\cos^2\alpha\neq0$
$2tg\alpha-4=-\frac{3}{\cos^2\alpha}$
$2tg\alpha-4=-3(tg^2\alpha+1)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 4
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2tg\alpha - 4 = -3tg^2\alpha - 3$

$-3tg^2\alpha - 2tg\alpha + 1 = 0$

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

т.к. $a + c = b$ (где a, b, c - коэффициенты многочлена 2 степени),

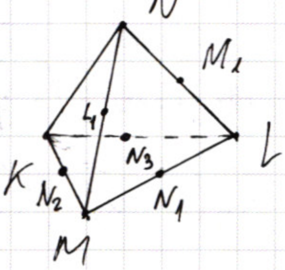
то $tg\alpha = -1$ $\quad tg\alpha = -\frac{-1}{3}$

$tg\alpha = \frac{1}{3}$

Таким образом $tg\alpha$ может принимать значения: $-1; \frac{1}{3}; 3$.

Ответ: $-1; \frac{1}{3}; 3$.

№7.



$KL = 3$

$KM = 1$

$MN = \sqrt{2}$

LM - ?, наименьший радиус сферы

Пусть M_1, L_1, N_1, N_2, N_3 — середины NL, MN, ML, KM, KL, соответственно.

~~Т.к.~~ В $\triangle MLN$ L_1, N_1 - середины MN и $ML \Rightarrow N_1L_1$ - средняя линия $\Rightarrow N_1L_1 \parallel NL$, $N_1L_1 = \frac{1}{2}NL = NM_1$.

Р. четырёхугольник $NL_1N_1M_1$ $\quad N_1L_1 \parallel NM_1$, $N_1L_1 = NM_1$ | по признаку $\Rightarrow NL_1N_1M_1$ - параллелограмм $\Rightarrow NL_1 = M_1N_1 = \frac{MN}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Так как N, M_1, L_1, N_1 - лежат на одной сфере и в 1 плоскости, то N_1, M_1, L_1, N - лежат на 1 окружности $\Rightarrow$ (т.к. $NL_1N_1M_1 - \square$) $N_1L_1NM_1$ - прямоугольник $\Rightarrow \angle N = \angle M_1 = \angle L_1 = \angle N_1 = 90°$

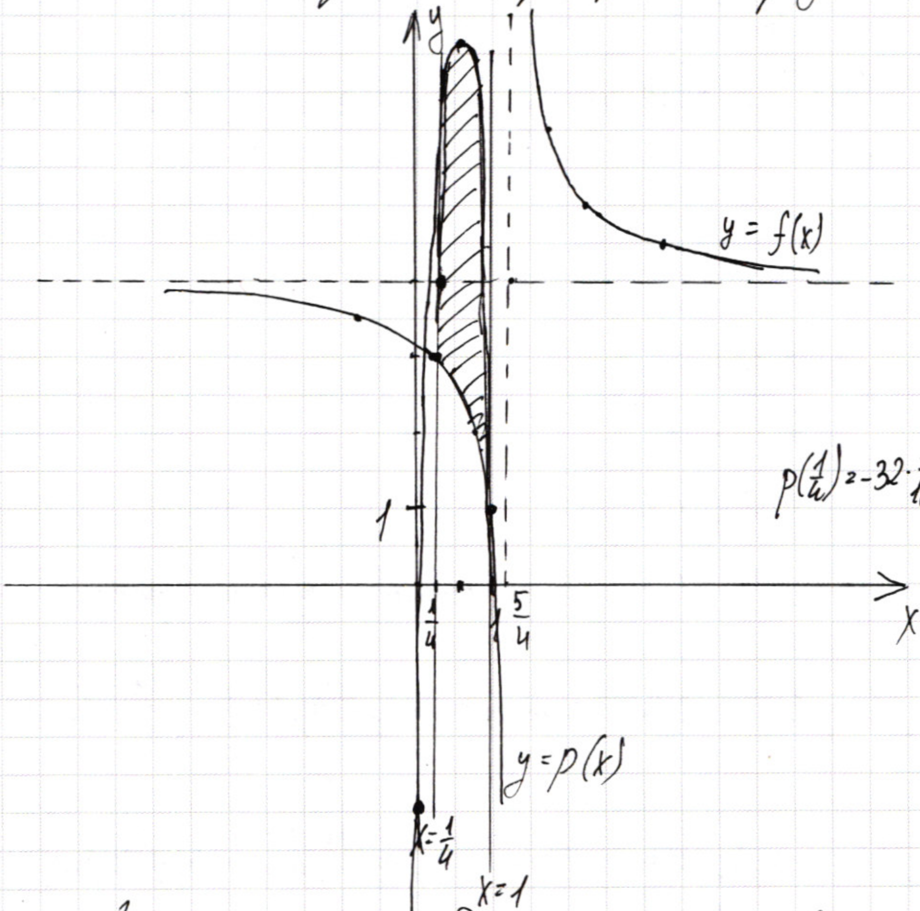
№6 $\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$.

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} \Rightarrow f(x) = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

$p(x) = -32x^2+32x-3$

$t(x) = ax+b$

Построим графики функций $f(x)$ и $p(x)$



$p(x) = -32x^2+36x-3$

$x_0 = \frac{-36}{2\cdot(-32)} = \frac{9}{16}$

$p(x_0) = -32\cdot\frac{9^2}{16^2} + 36\cdot\frac{9}{16} - 3$

$p(x_0) = 7\frac{1}{8}$

$p(1) = 1 \quad p(0) = -3$

$p(\frac{1}{4}) = -32\cdot\frac{1}{16} + \frac{36}{4} - 3 \Rightarrow p(\frac{1}{4}) = 4$

$f(1) = 0 \quad f(\frac{1}{4}) = 3.$

Заштрихуем область неравенства

Пусть $y = t(x)$ проходит через $(\frac{1}{4}; 4)$ и $(1; 0) \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{4} + b = 4 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a = -\frac{16}{3} \quad b = \frac{16}{3}$. Пусть ~~он~~ эта прямая ~~проходит~~ касается $f(x) \Rightarrow f'(x) = a \Rightarrow \frac{-1}{(x-\frac{5}{4})^2} = -\frac{16}{3} \Rightarrow x - \frac{5}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}$ или $x - \frac{5}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

$x = \frac{5+\sqrt{3}}{4} > 1 \Rightarrow$ ~~она~~ $x = \frac{5-\sqrt{3}}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\Rightarrow$ она пересекает $f(x) \Rightarrow$ не удовл. условию.~~

Пусть $y=t(x)$ проходит через $\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $(1;1) \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}a+b=4 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow a=-4 \quad b=5.$

Если $y=t(x)$ касается $f(x) \Rightarrow f'(x)=a$

$-\frac{1}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}=-4$

$x-\frac{5}{4}=\pm 2$

$x=-2+\frac{5}{4}<\frac{1}{4} \quad x=2+\frac{5}{4}>1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не касается на $x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$

$y=t(x)$ через $\left(\frac{1}{4};3\right)$ и $(1;1) \Rightarrow a=-\frac{8}{3}$

$b=-\frac{11}{3}$

& Условие касания $f'(x)=a$

$\frac{1}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}=-\frac{8}{3} \Rightarrow x-\frac{5}{4}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)