

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР _____

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 25$, $2 \leq y \leq 25$ и $f(x/y) < 0$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN . Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$f(1) = \lfloor \frac{1}{4} \rfloor = 0$$

$$f(2) = \lfloor \frac{2}{4} \rfloor = 0$$

$$f(3) = \lfloor \frac{3}{4} \rfloor = 0$$

$$f(4) = f(1) + f(3) = 0$$

$$f(5) = \lfloor \frac{5}{4} \rfloor = 1$$

$$f(6) = f(2) + f(4) = 0$$

$$f(7) = \lfloor \frac{7}{4} \rfloor = 1$$

$$f(8) = 0 + 0 = 0$$

$$f(9) = f(3) + f(6) = 0$$

$$f(10) = f(2) + f(8) = 0 + 1 = 1$$

$$f(11) = \lfloor \frac{11}{4} \rfloor = 2$$

$$f(12) = f(4) + f(8) = 0$$

$$f(13) = \lfloor \frac{13}{4} \rfloor = 3$$

$$f(14) = \lfloor \frac{14}{4} \rfloor = f(4) + f(10) = 1$$

$$f(15) = 1$$

$$f(16) = \lfloor \frac{16}{4} \rfloor = 4$$

$$f(17) = \lfloor \frac{17}{4} \rfloor = 4$$

$$f(18) = 0$$

$$f(19) = \lfloor \frac{19}{4} \rfloor = 4$$

$$f(20) = 4$$

Ответ: 256

$$f(21) = 1$$

$$f(22) = 2$$

$$f(23) = \lfloor \frac{23}{4} \rfloor = 5$$

$$f(24) = 0$$

$$f(25) = 2$$

$$f(2) = 2$$

23
12
46
23
256

$$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(y) < 0$$

у может быть только четным числом

$$230 \cdot 120 \cdot 23 = 256$$

Значит, чтобы выполнялось условие задачи необходимо, чтобы прямая $ax+by$ проходила через точку $(-4; 3)$ и чтобы $ax+by$ только переменился с $ax+by$ от 0 до $ax+by$, значения между $ax+by$ 1 и $\frac{5}{4}$

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + b = 3 \\ \frac{a}{4} + b = \end{cases}$$

$$a \cdot 0 + b = 0$$

$$b = -\frac{a}{4}$$

$$1 \leq -\frac{b}{a} \leq \frac{5}{4}$$

$$b = 3 - \frac{a}{4}$$

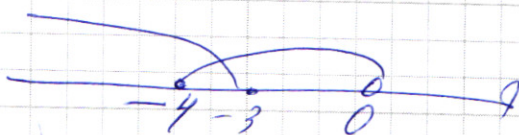
$$1 \leq -\frac{3 - \frac{a}{4}}{a} \leq \frac{5}{4}$$

$$\begin{cases} \frac{\frac{a}{4} - 3}{a} \geq 1 \\ \frac{\frac{a}{4} - 3}{a} \leq \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a-12}{a} \geq 4 \\ \frac{a-12}{a} \leq 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{3a-12}{a} \geq 0 \\ -\frac{4a-12}{a} \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3a+12}{a} \leq 0 \\ \frac{4a+12}{a} \geq 0 \end{cases}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

$$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$$

$$f'(x) = \frac{-46}{(4x-5)^2} = 0$$

$f(x)$ монотонно убывает
 $x = \frac{5}{4}$ - вертикальная асимптота

$$g(x) = -32x^2 + 36x - 3$$

парабола, ветви вниз

$$32x^2 - 36x + 3 = 0$$

$$D = 324 - 96 = 228$$

$$x_1 = \frac{18 + \sqrt{228}}{32} > 1$$

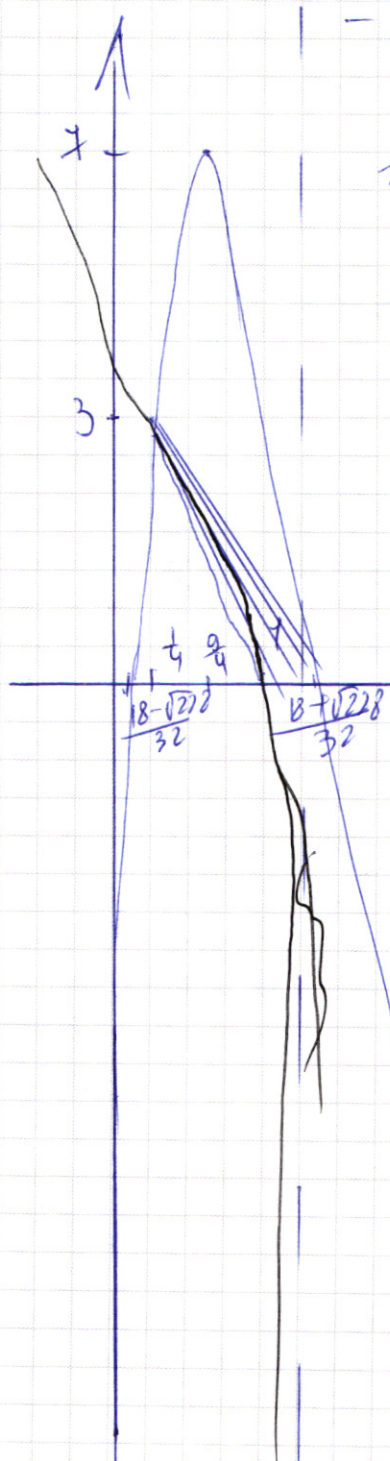
$$x_2 = \frac{18 - \sqrt{228}}{32} < \frac{1}{4}$$

$$g'(x) = -64x + 36 = 0$$

$$64x = 36$$

$$x = \frac{36}{64} ; x = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{9}{16}\right) &= \\ &= -32\left(\frac{81}{256}\right) + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 = \\ &= -\frac{81}{8} + \frac{10 \cdot 9}{8} - 3 = \frac{81 - 24}{8} = \\ &= \frac{57}{8} \end{aligned}$$



$$16x - 16 = (-32x^2 + 36x - 3)(4x - 5)$$

$$-128x^3 + 1600x^2 + 1440x^2 - 180x - 120$$

$$+ 15 = 16x - 16$$

$$128x^3 - 304x^2 + 1208x - 31 = 0$$

$$384x^2 - 608x + 1208 = 0$$

$$192x^2 - 304x + 104 = 0$$

$$86x$$

$$96x^2 - 156x + 52 = 0$$

$$48x^2 - 78x + 26 = 0$$

$$24x^2 - 39x + 13 = 0$$

$$x = 39^\circ - 24.13.84$$

$$\begin{array}{r} 8 \\ 39 \\ 39 \\ \hline 351 \\ 11710 \\ \hline 1521 \\ \hline 273 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 98 \quad 96 \\ 17 \quad 13 \\ \hline 228 \\ 96 \\ \hline 1248 \end{array}$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{32}{16} + \frac{36}{9} - 3 =$$

$$= -2 + 4 - 3 = 3$$

$g(x)$ и $f(x)$ пересекаются
в точке $\frac{1}{4}$;
 $g(1) = 1 \Rightarrow$ больше $f(x)$ и $g(x)$
не пересекаются

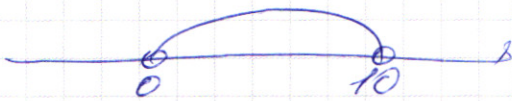
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$100 + (x^2 - 100) \log_3(4) \Rightarrow x^2 + 5 \log_3(100 - x^2)$$

ОДЗ

$$x^2 - 100 < 0$$



$$\frac{100 - x^2}{x^2 + 5 \log_3(100 - x^2)}$$

(с учетом ОДЗ)

$$t = 100 - x^2$$

$$t + t \log_3(4) \Rightarrow 5 \log_3(t)$$

$$3^{\log_3(t)} + 4^{\log_3(t)} \Rightarrow 5^{\log_3(t)}$$

$$k = \log_3(t)$$

$$3^k + 4^k \Rightarrow 5^k$$

$$3^k + 4^k = 5^k$$

имеет единствен-
ное решение $k=1$, т.е. $(3; 4; 5)$ - Пифа-
горова тройка.

При $k \leq 2$ условие будет
выполняться.

$$\log_3(100 - x^2) \leq 2$$

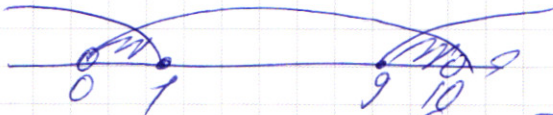
$$100 - x^2 \leq 9$$

$$x^2 - 100 + 9 \geq 0$$

$$\frac{x}{4} = \sqrt{5 - 9} = 4^2$$

$$v_1 = 5 - 4 = 1$$

$$v_2 = 5 - 4 = 1$$



Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\left\{ \begin{aligned} \sin(2\alpha + 2\beta) &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha &= -\frac{2}{5} \end{aligned} \right.$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2 \sin\left(\frac{2\alpha + 2\alpha + 4\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{2\alpha - 2\alpha + 4\beta}{2}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\beta = \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= \sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{5} / \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 2 \cos 2\alpha = -1$$

4)

$$\frac{2 + \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} \pm 2 \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg} \alpha} = -1$$

$$t = \operatorname{tg} \alpha$$

$$\frac{2t}{1+t} \pm 2 \frac{1-t^2}{1+t} = -1$$

$$2t \pm 2 - 2t^2 = -1 - t^2$$

$$1) \quad 2t + 2 - 2t^2 + 1 + t^2 = 0$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = 1 + 2 = 3$$

$$t_2 = -1$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 3 = 2^2$$

2)

$$2t - 2 + 2t^2 - 1 - t^2$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\frac{D^2}{4} = 1 + 3 = 2^2$$

$$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = -1$$

Ответ: $-1; \frac{1}{3}; 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

Умножим:

$$x \geq 2y$$

003

$$\begin{aligned} 2xy - 12y - x + 6 &= 0 \\ x(2y-1) - 6(2y-1) &= 0 \\ (2y-1)(x-6) &= 0 \\ \begin{cases} 2y-1 \\ x-6 \end{cases} &= 0 \\ \begin{cases} y < \frac{1}{2} \\ x < 6 \end{cases} \end{aligned}$$

$$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$$

$$x^2 + x - 26xy + 144y^2 + 12y - 6 = 0$$

$$x^2 + x(1-26y) + 144y^2 + 12y - 6 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 1 - 52y + 676y^2 - 576y^2 = 48y + 242 \\ &= 100y^2 - 100y + 25 = (5(2y-1))^2 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{26y-1 \pm 5(2y-1)}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{26y-1 \pm 5(2y-1)}{2}$$

$$\textcircled{1} \quad x_1 = \frac{26y+10y-6}{2} = 12y-3$$

$$\textcircled{2} \quad x_2 = \frac{26y-1-10y+5}{2} = 8y+2$$

$$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y = 45$$

$$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$$

$$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$\textcircled{1} \quad (12y-9)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$3(2y-1)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$(2y-1)^2 = \frac{90}{12} = \frac{15}{6} = \frac{15}{2}$$

$$2y-1 = \pm \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$\begin{cases} y_1 = \frac{1+\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} \\ y_2 = \frac{1-\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad y_1 = \frac{1+\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}$$

$$\varphi_1 = 9\left(1+\sqrt{\frac{15}{2}}\right) - 3 = 6 + 9\sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$y_2 = \frac{1-\sqrt{\frac{15}{2}}}{2}$$

$$\varphi_2 = 9\left(1-\sqrt{\frac{15}{2}}\right) - 3 = 6 - 9\sqrt{\frac{15}{2}}$$

Проверим целые части

$$6 + 9\sqrt{\frac{15}{2}} \neq 6 + 6\sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$3\sqrt{\frac{15}{2}} \neq 0$$

верно

$$6 - 9\sqrt{\frac{15}{2}} \neq 6 - 6\sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$-3\sqrt{\frac{15}{2}} \neq 0$$

нет решений.

значит, ответ в $\textcircled{1}$

$$\begin{cases} \varphi = 6 + 9\sqrt{\frac{15}{2}} \\ y = \frac{1+\sqrt{\frac{15}{2}}}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$x = 2y + 2$$

$$(2y - 4)^2 + 9(2y - 1)^2 = 90$$

$$2(2y - 1)^2 + 9(2y - 1)^2 = 90$$

$$(2y - 1)^2 = \frac{90}{11}$$

$$2y - 1 = \pm \sqrt{\frac{90}{11}}$$

4

$$y = \frac{1 + \sqrt{\frac{90}{11}}}{2}$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{\frac{90}{11}}}{2}$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{\frac{90}{11}}}{2}$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{\frac{90}{11}}}{2}$$

$$x = 4 + 4\sqrt{\frac{90}{11}} + 2 = 6 + 4\sqrt{\frac{90}{11}}$$

$$x = 4 - 4\sqrt{\frac{90}{11}} + 2 = 6 - 4\sqrt{\frac{90}{11}}$$

Проверка условия $x \geq 2y$

$$6 + 4\sqrt{\frac{90}{11}} \geq 6 + 6\sqrt{\frac{90}{11}}$$

$$-2\sqrt{\frac{90}{11}} \geq 0$$

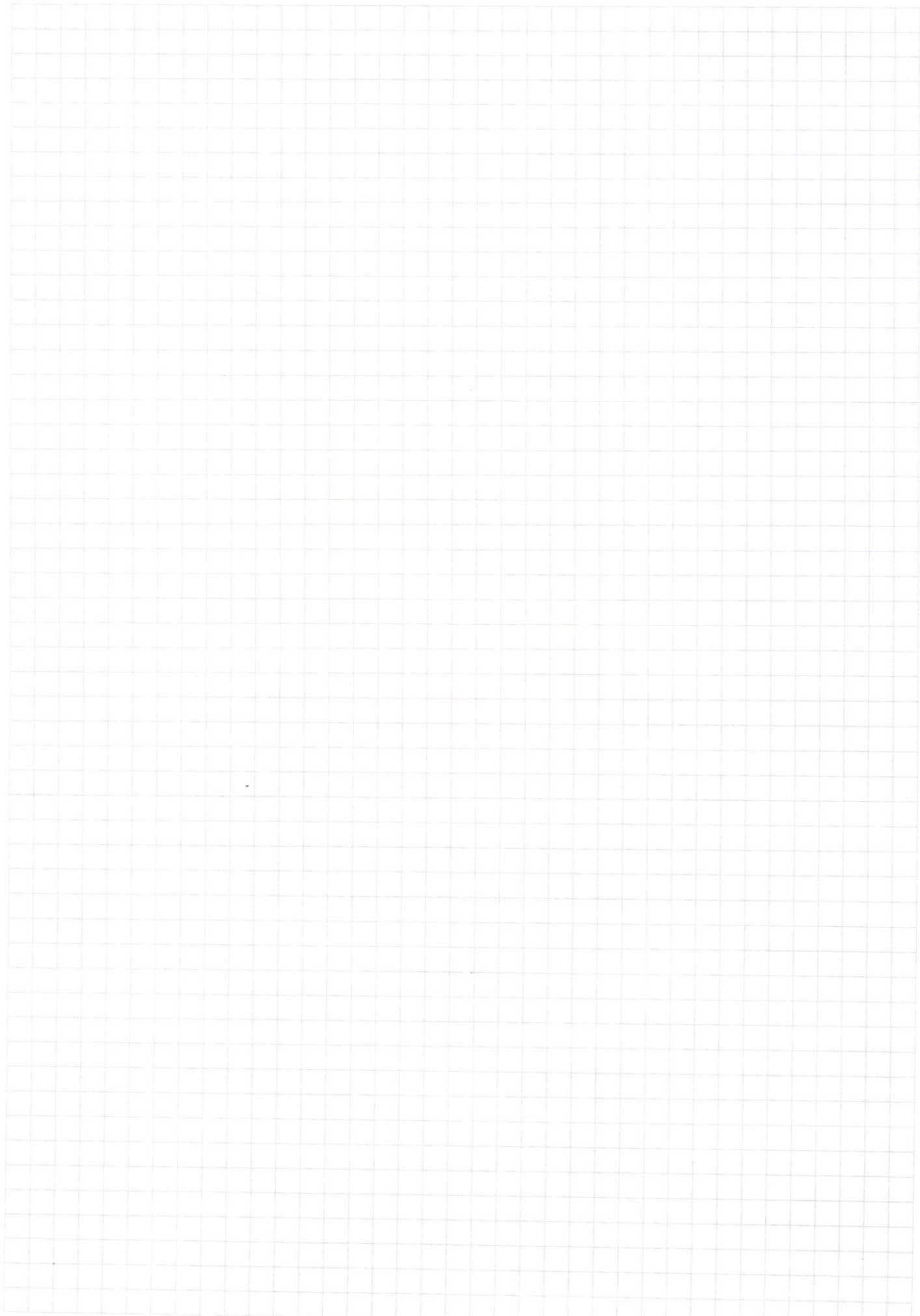
неверно

$$6 - 4\sqrt{\frac{90}{11}} \geq 6 - 6\sqrt{\frac{90}{11}}$$

$$2\sqrt{\frac{90}{11}} \geq 0$$

верно

Ответ: $\left(6 - 4\sqrt{\frac{90}{11}}; \frac{1 - \sqrt{\frac{90}{11}}}{2} \right)$
 $\left(6 + 9\sqrt{\frac{15}{2}}; \frac{1 + \sqrt{\frac{15}{2}}}{2} \right)$



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \pm \lg_3\left(\frac{3}{5}\right) \left(1 \pm \lg_3\left(\frac{4}{3}\right)\right) = 1 \\ & \lg_3\left(\pm \lg_3\left(\frac{3}{5}\right)\right) + \lg_3\left(1 \pm \lg_3\left(\frac{4}{3}\right)\right) = 0 \\ & \lg_3\left(\frac{3}{5}\right) \lg_3(1) + \lg_3(1 \pm) \end{aligned}$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} + 32x - 36x + 3 = 0$$

$$\begin{array}{r} 32 \\ 4 \\ \hline 128 \end{array}$$

$$16x-16 + (32x^2 - 36x + 3)(4x-5) = 0$$

$$16x-16 + 128x^3 - 160x^2 - 144x + 180x + 120 - 15 = 0$$

$$128x^3 - 160x^2 + 64x - 51 = 0$$

$$\begin{array}{r} 128 \\ 3 \\ \hline 384 \end{array}$$

$$384x^2 - 320x + 64 = 0$$

$$192x^2 - 160x + 32 = 0$$

~~8x~~

$$8086x^2 - 80x + 16 = 0$$

$$43x^2 - 40x + 8 = 0$$

$$x = 400 - 49 \cdot 8 = 56$$

$$t + t \log_3(4) \geq 5 \log_3(2) \quad ; \quad t$$

$$1 + t \log_3\left(\frac{4}{3}\right) \geq 5 + t \log_3\left(\frac{5}{3}\right)$$

$$t \log_3\left(\frac{5}{3}\right) - t \log_3\left(\frac{4}{3}\right) \leq 1$$

$$t \log_3\left(\frac{5}{3}\right) - t \log_3\left(1 + \frac{1}{3}\right) - 2 \log_3\left(\frac{4}{3}\right) \leq 1$$

$$9 \cdot 2 + 6 \cdot 4 = 125$$

$$k = 3$$

$$3 + 4 = 5$$

$$k = 1$$

Интервалы имеют:

Множество $k=2$ не является...

Линейная...

$$3k + 4 = 5k$$

$$f(x) = 3x + 4$$

$$3k + 4 \geq 5k$$

$$3 \log_3(4) + 4 \log_3(4) \geq 5 \log_3(4)$$

$$7 + 7 \log_3(4) \geq 5 \log_3(4)$$

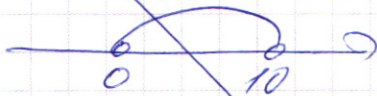
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$100 + |10^2 - 10x| \log_3(4) \Rightarrow x^2 + 5 \log_3(100 - x^2)$$

OD3

$$100 - x^2 > 0 \quad ; \quad 10^2 - 10x < 0$$



$$100 + (100 - x^2) \log_3(4) \Rightarrow x^2 + 5 \log_3(100 - x^2)$$

$$(100 - x^2) + (100 - x^2) \log_3(4) - 5 \log_3(100 - x^2) \Rightarrow 0$$

$$t = 100 - x^2 \quad t > 0$$

$$t + t \log_3(4) - 5 \log_3(t) \Rightarrow 0$$

$$t + t \log_3(4) + \log_3(5) \Rightarrow 0 \quad | : t$$

$$1 + \log_3\left(\frac{4}{3}\right) + \log_3\left(\frac{5}{3}\right) \Rightarrow 0$$

$$\log_3\left(\frac{4}{3}\right) + \log_3\left(\frac{5}{3}\right) \Rightarrow -1$$

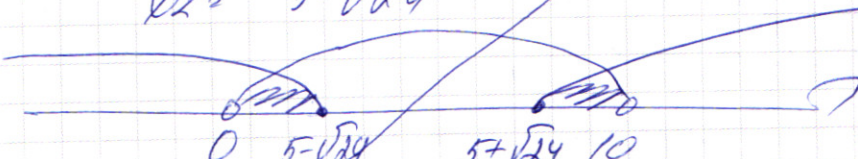
$$\log_3\left(\frac{4}{3}\right) \log_3\left(\frac{5}{3}\right) - \log_3\left(\frac{5}{3} \cdot \frac{4}{3}\right) \Rightarrow 1$$

$$\log_3\left(\frac{4}{3}\right) (1 - \log_3\left(\frac{5}{3}\right)) \Rightarrow 1$$

$$p = 25 - 1 = 24$$

$$x_1 = 5 + \sqrt{24}$$

$$x_2 = 5 - \sqrt{24}$$



Ответ: $(0; 5 - \sqrt{24}] \cup [5 + \sqrt{24}; 10)$

№3

$$10x + |x^2 - 10x| \lg_3(4) \geq x^2 + 5 \lg_3(10x - x^2)$$

ОДЗ

$$10x - x^2 > 0$$

$$x^2 - 10x < 0$$

$$|x^2 - 10x| = 10x - x^2$$

(Судитом ОДЗ)

~~$$(10x - x^2) + |x^2 - 10x| \lg_3(4) \geq 5 \lg_3(10x - x^2)$$~~

~~$$t = 10x - x^2, \quad t > 0$$

$$t + t \lg_3(4) \geq 5 \lg_3(t)$$

$$t + t \lg_3(4) \geq t \lg_3(5) \quad | : t \lg_3(5)$$~~

~~$$1 + \lg_3(5) \geq \lg_3(5)$$~~

~~$$1 + \lg_3(5) \geq 1$$~~

~~$$1 + \lg_3(5) + \lg_3(5/4) \geq 1$$~~

~~$$1 + \lg_3(5) + \lg_3(5/4) + \lg_3(4/3) \geq 1$$~~

~~$$1 + \lg_3(5) + \lg_3(5/3) \geq 1$$~~

~~$$\lg_3(5/3) \lg_3(4) \lg_3(1 + \lg_3(5/3)) \geq 0$$~~

~~$$1 + \lg_3(5/3) \geq 1, \quad \text{т.к.}$$~~

~~$$1 + \lg_3(5/3) \geq 0 \Rightarrow$$~~

~~$$\lg_3(1 + \lg_3(5/3)) > 0$$~~

~~$$\lg_3(5/3) < 0, \quad \text{т.к. } 5/3 < 1; 3 > 1$$~~

Итого имеем.

~~$$\lg_3(t) \leq 0$$~~

~~$$10x - x^2 \leq 1$$~~

~~$$x^2 - 10x + 1 \geq 0$$~~



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

②

$$v = 2y + 2$$

$$(2y - 4)^2 + 9(2y - 1)^2 = 90$$

$$2(2y - 1)^2 + 9(2y - 1)^2 = 90$$

$$(2y - 1)^2 = \frac{90}{11}$$

$$2y - 1 = \pm \sqrt{\frac{90}{11}}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{90}{11}}}{2}$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{\frac{90}{11}}}{2}$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{\frac{90}{11}}}{2} \text{ н.к.}$$

$$v = 4\left(1 + \sqrt{\frac{90}{11}}\right) + 2 = 6 + 4\sqrt{\frac{90}{11}}$$

$$2) \quad y < \frac{1}{2}$$

$$p_1 = \cancel{10y+1} \quad 12y-3$$

$$p_2 = 8y+2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(x) = -32x^2 + 36x - 3$$

$$f'(x) = -64x + 36 = 0$$

$$64x = 36$$

$$x = \frac{36}{64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$-32 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^2 + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 =$$

$$= -\frac{32 \cdot 81}{16 \cdot 8} + \frac{18 \cdot 9}{8} - 3 = -\frac{81}{8} + \frac{162}{8} - 3 =$$

$$= \frac{81}{8} - 3 = \frac{81 - 24}{8} = \frac{57}{8}$$

$$\begin{array}{r} \cdot 10 \\ 81 \\ -24 \\ \hline 57 \end{array}$$

№3

$$10x + \sqrt{x^2 - 10x} \log_3(4) \geq x^2 + 5 \log_3(10x - x^2)$$

OD 3

$$10x + (10x - x^2) \log_3(4) \geq x^2 + 5 \log_3(10x - x^2)$$

$$t + t \log_3(4) - 5 \log_3(t) \geq 0$$

$$t + 4 \log_3(t) \geq 5 \log_3(t)$$

$$t + t \log_3(4) \geq t \log_3(5) \quad | : t \log_3(5)$$

$$1 + \log_3(4) \geq \log_3(5)$$

$$1 + \log_3(3) - \log_3(5) + \log_3\left(\frac{4}{3}\right) \geq 1$$

$$1 + \log_3\left(\frac{3}{5}\right) + \log_3\left(\frac{4}{3}\right) \geq 1$$

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{5} \cdot x$$

$$1 + \log_3\left(\frac{3}{5}\right) + \log_3\left(\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{3}\right) \geq 1$$

$$1 + \log_3\left(\frac{3}{5}\right) + \log_3\left(\frac{3}{5}\right) + \log_3\left(\frac{4}{3}\right) \geq 1$$

$$1 + \log_3\left(\frac{3}{5}\right) \left(1 + \log_3\left(\frac{4}{3}\right)\right) \geq 1$$

$$\log_3\left(\frac{3}{5}\right) \log_3\left(1 + \log_3\left(\frac{4}{3}\right)\right) \geq 0$$

$$10x - x^2 \geq 1$$

$$x^2 - 10x + 1 \leq 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(x) = \frac{4}{4x-5} \quad ; \quad f'(x) = 0-16$$

$$\frac{4}{4x-5}$$

$$\begin{array}{r|l} x & 1 \\ \hline y & -4 \\ & -\frac{4}{25} \end{array}$$

$$\frac{4}{-25}$$

$$\begin{array}{r} 10 \\ 324 \\ - 96 \\ \hline 228 \end{array}$$

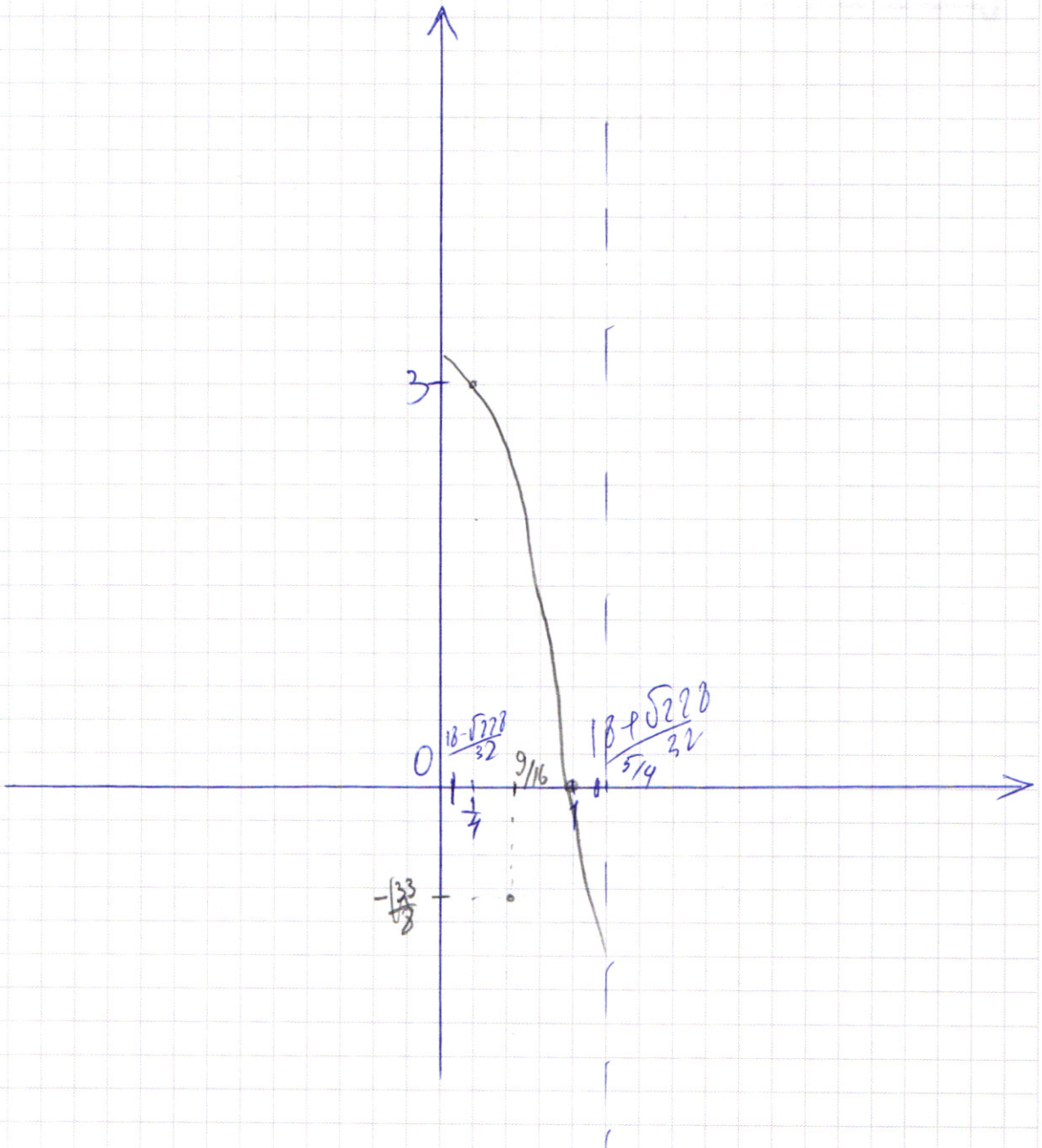
$$-32x^2 + 36x - 3 = 0$$

$$32x^2 - 36x + 3 = 0$$

$$D = 324 - 96 = 228$$

$$x_1 = \frac{18 + \sqrt{228}}{32} > 1$$

$$x_2 = \frac{18 - \sqrt{228}}{32}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\text{№3} \quad 10x + |x^2 - 10x| \log_3(4) \geq x^2 + 5 \log_3(10x - x^2)$$

ОДЗ

$$10x - x^2 > 0$$

$$x^2 - 10x < 0$$

$$10x + (10x - x^2) \log_3(4) \geq x^2 + (10x - x^2) \log_3(5)$$

$$t = 10x - x^2$$

$$t + t \log_3(4) \geq t \log_3(5) \quad | :t$$

$$t + t \log_3(4) - 1 \geq t \log_3(5) - 1$$

$$t \log_3(4) - t \log_3(5) - 1 \geq -1$$

$$10 - 2x$$

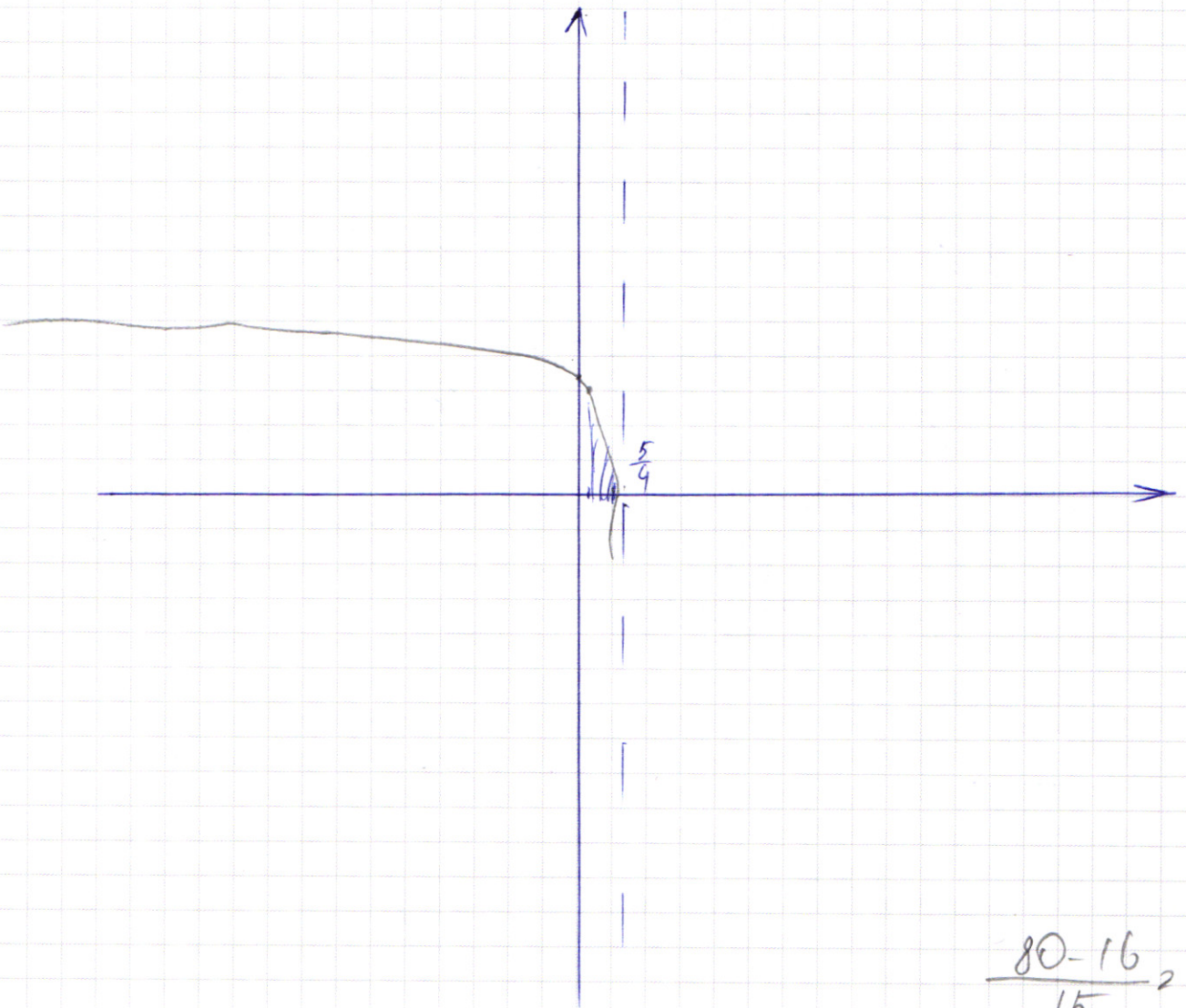
$$t \log_3(5) - 1 - t \log_3(4) - 1 \leq -1$$

50 - 25 = 25

N/6

$$ay+6 \Rightarrow \frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$$

$$ay+6 \leq -32x^2 + 30x - 3$$



x	1	2	3	4	5	5
y	0	16/3	3	16/5		

$$\frac{80-16}{15} = \frac{64}{15}$$

$$\frac{16}{3}$$

$$\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\frac{-80-16}{-25} = \frac{96}{25}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$$

$$f'(x) = \frac{16(4x-5) - 64(16x-16)}{(4x-5)^2} = 0$$

$$64x - 80 - 16x + 16 = 0$$

$$48x - 64 = 0 \Rightarrow x = \frac{8}{3}$$

Упр

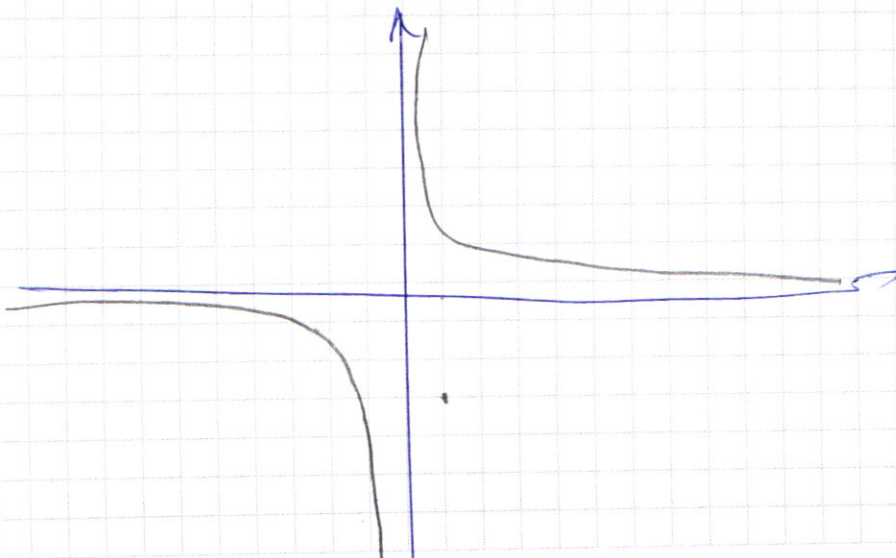
~~$$y_{\text{н}} = f'(x)(x-x_0) + f(x_0)$$~~

$$y_{\text{н}} = k(x) + b$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \frac{8}{3}} \frac{f(x)}{x} = \frac{16x-16}{4x^2-5x} \Big|_{x=\frac{8}{3}} = 0$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \frac{8}{3}} f(x) - kx = \frac{16x-16}{4x-5} \Big|_{x=\frac{8}{3}} = \frac{16 \cdot \frac{8}{3} - 16}{4 \cdot \frac{8}{3} - 5} = \frac{64 - 48}{10 - 5} = \frac{16}{5}$$

$$y_{\text{н}} = \frac{16x-16}{4x-5}$$



$$f(x) = -32x^2 + 36x - 3$$

$$D = 18^2 - 32 \cdot 3 = 228$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ - 96 \\ \hline 228 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{18}{32}$$

$$32x^2 - 36x + 3 = 0$$

$$D = 324 - 96 = 228$$

$$x_1 = \frac{18 + \sqrt{228}}{32} \rightarrow 1$$

$$x_2 = \frac{18 - \sqrt{228}}{32} \leftarrow \frac{1}{4}$$

$$18 - \sqrt{228} \checkmark 8$$

$$100$$

$$10 \sqrt{228}$$

$$100 \leftarrow 228$$

$$32x^2 - 36x + 3$$

$$64x - 36$$

$$x = \frac{36}{64} = \frac{12}{32} = \frac{9}{16}$$

$$-32 \cdot \left(\frac{9}{16}\right)^2 + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 =$$

$$= -20 \cdot \frac{81}{16} + \frac{1809}{8} - 3 =$$

$$= \frac{-81}{8} + \frac{72}{8} - 3 = \frac{-9}{8} - 3 = \frac{-9-24}{8} = -\frac{33}{8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

цел:

$$x \geq 12y$$

003:

$$2xy - 12y - x + 6 \geq 0$$

$$y(2y - 1) - 6(2y - 1) \geq 0$$

$$(2y - 1)(y - 6) \geq 0$$

$$\begin{cases} y \geq 6 \\ y \geq \frac{1}{2} \\ y < 6 \\ y \leq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$$

$$x^2 - 26xy + x + 144y^2 + 12y - 6 = 0$$

$$x^2 + x(1 - 26y) + 144y^2 + 12y - 6 = 0$$

$$D = (1 - 26y)^2 - 4(144y^2 + 12y - 6) =$$

$$= 1 - 52y + 676y^2 - 576y^2 - 48y + 24 =$$

$$= 100y^2 - 100y + 25 = 25(4y - 1)^2 =$$

$$= (5|4y - 1)^2$$

$$x_1 = \frac{26y - 1 + 5|4y - 1}{2}$$

$$x_2 = \frac{26y - 1 - 5|4y - 1}{2}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 144 \\ 4 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y = 45$$

$$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$$

$$(x - 6)^2 + 9(2y - 1)^2 = 90$$

$$1) y = \frac{1}{2}$$

$$\textcircled{1} x_1 = \frac{26y-1+10y-5}{2} = \frac{36y-6}{2} = 18y-3$$

$$\textcircled{2} x_2 = \frac{26y-1-10y+5}{2} = 8y+2$$

$$\textcircled{1} (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$(18y-9)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$3(2y-1)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$12(2y-1)^2 = 90$$

$$(2y-1)^2 = \frac{90}{12} = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$

$$2y-1 = \pm \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{15}{2}}}{2}$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{\frac{15}{2}}}{2} \quad \text{н.к.}$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{\frac{15}{2}}}{2} \quad \text{н.к.}$$

$$x = 9\left(1 + \sqrt{\frac{15}{2}}\right) - 3 = 6 + 9\sqrt{\frac{15}{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$$

$$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$$

$$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y = 45$$

$$(x-6)^2 - 36 + 36y^2 - 36y = 45$$

$$(x-6)^2 + 36(y-\frac{1}{2})^2 - 36 = 45$$

$$(x-6)^2 + 36(y-\frac{1}{2})^2 = 81$$

$$\frac{(x-6)^2}{81} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{\frac{81}{36}} = 1$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 26 \\ 26 \\ \hline 756 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$$

$$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y - 45 = 0$$

$$D = 36 - 36y^2 + 36y + 45 = 0$$

$$= -36y^2 + 36y + 81 = 0$$

$$x^2 - 24xy + 144y^2 = 24y - 12y - x + 6$$

$$x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0$$

$$x^2 + x(1 - 26y) + 144y^2 + 12y - 6 = 0$$

$$D = 1 - 52y + 676y^2 - 576y^2 - 48y + 24 = 0$$

$$= 100y^2 - 100y + 25 = 0$$

$$= 25(4y^2 - 4y + 1) = 25(2y-1)^2$$

$$x_1 = \frac{26y-1 + 5|2y-1|}{2}$$

$$x_2 = \frac{26y-1 - 5|2y-1|}{2}$$

$$1) y \geq \frac{1}{2} ; x \geq 6 \text{ (ODS)}$$

$$v_1 = \frac{26y-1+10y-5}{2} = \frac{36y-6}{2} = 18y-3$$

$$v_2 = \frac{26y-1-10y+5}{2} = \frac{16y+4}{2} = 8y+2$$

①

$$(v-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

~~$$(v-6)^2 + 9(36)$$~~

$$(18y-3-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$(18y-9)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$3(2y-1)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$12(2y-1)^2 = 90$$

$$(2y-1)^2 = \frac{45}{6} = \frac{15}{2}$$

$$2y-1 = \pm \sqrt{\frac{15}{2}}$$

$$y = \frac{1 \pm \sqrt{\frac{15}{2}}}{2}$$

~~✗~~

$$y = \frac{1 + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}}{2} \text{ подходит}$$

$$y = \frac{1 - \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}}{2} \text{ не подг.}$$

$$v = \frac{18}{2} \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}\right) - 3 = 9 + 9\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}} - 3 = 6 + 9\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{2}}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} \text{№ 1} \quad & \begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \\ & 2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = -\frac{2}{5} \\ & \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = -\frac{1}{5} \\ & -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos(2\beta) = -\frac{1}{5} \\ & \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos 2\beta &= \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\beta &= \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}} = \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + 2\beta) &= \sin \alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos \alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \cos \alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{2 + \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \pm \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{2 + t}{1 + t^2} \pm \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \cdot 2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ & 2 + t + (1 - t^2) \cdot 2 = -(1 + t^2) \\ & 2 + t + (1 - t^2) \cdot 2 = -1 - t^2 \\ & 2 + t + 2 - 2t^2 = -1 - t^2 \\ & t^2 - 2t - 3 = 0 \\ & t_1 = 3, \quad t_2 = -1 \end{aligned}$$

2)

$$2t - (1-t^2) \cdot 2 = -1 + t^2$$

$$2t - 2 + 2t^2 + 1 + t^2 = 0$$

$$3t^2 + 2t - 1 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 1 + 3 = 2^2$$

$$t_1 = \frac{-1+2}{3} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 = -1$$

Ответ: $\frac{1}{3}; -1; 3$

$$\text{N2} \begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

ООЗ

$$2xy + 6 \geq 12y + x$$

$$2xy - 12y + 6 - x \geq 0$$

$$2y(x-6) - (x-6) \geq 0$$

$$(x-6)(2y-1) \geq 0$$

$$\begin{cases} x \geq 6 \\ y \geq \frac{1}{2} \\ x \leq 6 \\ y < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Усл:

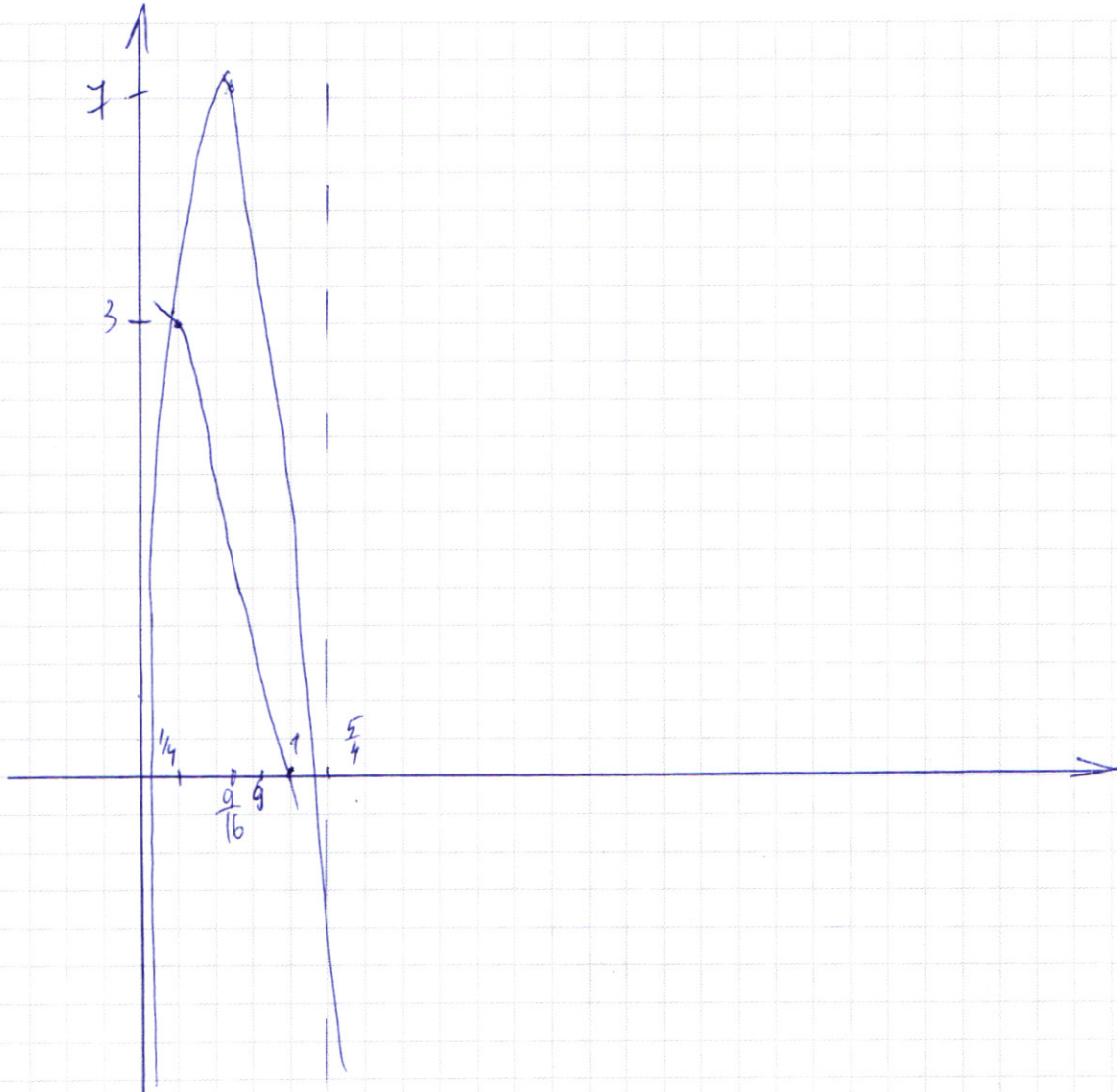
$$x \geq 12y$$

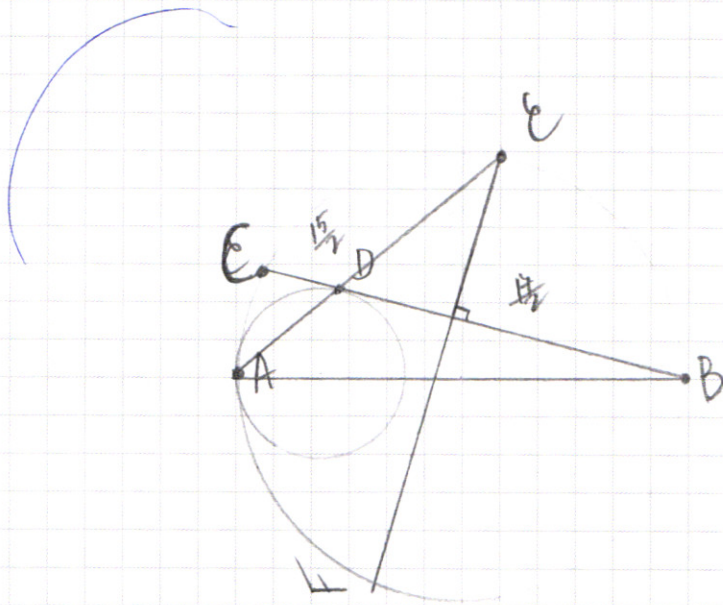
$$x^2 + 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 0 \quad 90$$

$$(x+6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$$f(x)$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = \left\lfloor \frac{p}{4} \right\rfloor$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b)$$

$$f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f(2) = \left\lfloor \frac{2}{4} \right\rfloor = 0$$

$$f(3) = 0$$

$$f(4) = 0 \quad f(2) + f(2) = 0$$

$$f(5) = 1$$

$$f(8) = 0$$

$$f(6) = 0$$

$$f(9) = 0$$

$$f(7) = 1$$

$$f(10) = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~2~~ ~~у~~ ~~д~~ ~~д~~

$$\textcircled{L} (8y+2-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$(8y-4)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$2(2y-1)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$$

$$(2y-1)^2 = \frac{90}{11}$$

$$2y-1 = \pm \sqrt{\frac{90}{11}}$$

$$y = \frac{1 + \sqrt{\frac{90}{11}}}{2}$$

$$y = \frac{1 - \sqrt{\frac{90}{11}}}{2} \quad \text{н.к.}$$

$$D = 4\left(1 - \sqrt{\frac{90}{11}}\right) + 2 = 6 - 4\sqrt{\frac{90}{11}}$$

$$6 - 4\sqrt{\frac{90}{11}} - 6 + 6\sqrt{\frac{90}{11}} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{90}{11}} \quad 4\left(\frac{90}{11}\right)$$

$$2\left(6 - 4\sqrt{\frac{90}{11}}\right)\left(\frac{1 - \sqrt{\frac{90}{11}}}{2}\right) - 6 + 6\sqrt{\frac{90}{11}} - 6 + 4\sqrt{\frac{90}{11}} +$$

$$+ 6 =$$

$$= 6 - 6\sqrt{\frac{90}{11}} - 4\sqrt{\frac{90}{11}} + 4 \cdot \frac{90}{11} - 12 + 6 +$$

$$+ 10\sqrt{\frac{90}{11}} = 4 \cdot \frac{90}{11}$$

$$6 + 9\sqrt{\frac{90}{11}} - 6 + 6\sqrt{\frac{90}{11}}$$

$$6 + 9\sqrt{\frac{90}{11}} - 6 - 6\sqrt{\frac{90}{11}} = 3\sqrt{\frac{90}{11}}$$

$$2\left(6 + 9\sqrt{\frac{90}{11}}\right)\left(\frac{1 + \sqrt{\frac{90}{11}}}{2}\right) - 6 - 6\sqrt{\frac{90}{11}} - 6 - 9\sqrt{\frac{90}{11}} +$$

$$+ 6 =$$

$$= 6 + 6\sqrt{\frac{90}{11}} + 9\sqrt{\frac{90}{11}} + 9\sqrt{\frac{90}{11}}^2 - 6 - 6\sqrt{\frac{90}{11}} - 6 - 9\sqrt{\frac{90}{11}} + 6$$

~~здесь~~

Подставьте в I

$$\frac{\frac{16}{4} - 16}{1 - 5} = \frac{-12}{-4} = 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

$$f(x) = \frac{16x-10+4}{4x-5} = \frac{16x-6}{4x-5}; \quad x = \frac{5}{4} - \text{верт. асимпт.}$$

$$f'(x) = \frac{44}{(4x-5)^2} - \frac{16}{(4x-5)^2} = 0$$

$$f(x) \downarrow$$

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 3$$

$$f(1) = 0$$

$$g(x) = -32x^2 + 36x - 3$$

$$g'(x) = -64x + 36 = 0$$

$$64x = 36$$

$$x = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

$$g\left(\frac{9}{16}\right) = -32\left(\frac{9}{16}\right)^2 + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 =$$

$$= -32 \cdot \frac{81}{256} + \frac{18 \cdot 9}{8} - 3 =$$

$$= -\frac{81}{8} + \frac{162}{8} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = \frac{81-24}{8} =$$

$$= \frac{57}{8}$$

$$32x^2 - 36x + 3 = 0; \quad D = 324 - 96 = 228$$

$$x_1 = \frac{18 + \sqrt{228}}{32} > 1$$

$$x_2 = \frac{18 - \sqrt{228}}{32} < \frac{1}{4}$$

