



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 12$ ,  $BD = 13$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $4 \leq x \leq 28$ ,  $4 \leq y \leq 28$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $(\frac{2}{3}; 2]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $TXYZ$ , вершина  $Y$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $TU$ . Известно, что  $XU = \sqrt{3}$ ,  $TX = \sqrt{2}$ ,  $TZ = 2$ . Найдите длину ребра  $XZ$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача N1

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha + 2\beta) &= -\frac{1}{\sqrt{14}} & \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha &= \frac{2}{\sqrt{14}} \\ \left[ \begin{aligned} 2\alpha + 2\beta &= \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha + 2\beta &= \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \end{aligned} \right. & \left[ \begin{aligned} 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta &= \frac{2}{\sqrt{14}} \\ -\frac{2}{\sqrt{14}} \cdot \cos 2\beta &= \frac{2}{\sqrt{14}} \end{aligned} \right. & \left. \begin{aligned} 2\alpha &= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha &= \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha &= \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha &= \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

①  $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}$

②  $\begin{cases} 2\beta = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \\ 2\beta = -\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Пусть  $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = x$ ,  $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = y$  тогда  $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = -x$  знаем, что  $\arcsin \varphi + \arccos \varphi = \frac{\pi}{2}$   
универсально, что  $x + y = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{-x - y}{2} + \pi k & \textcircled{1} \\ \alpha &= \frac{-x + y}{2} + \pi k & \textcircled{2} \\ \alpha &= \frac{\pi + x + y}{2} + \pi k & \textcircled{3} \\ \alpha &= \frac{\pi + x - y}{2} + \pi k & \textcircled{4} \end{aligned}$$

1)  $\alpha = \frac{-(x+y)}{2} + \pi k = \frac{-\pi}{4} + \pi k \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -1$

3)  $\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{x+y}{2} + \pi k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \pi k = \frac{3\pi}{4} + \pi k = \frac{-\pi}{4} + \pi k \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -1$

2)  $\alpha = \frac{y-x}{2} + \pi k \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{y-x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos(y-x)}{1+\cos(y-x)}}$

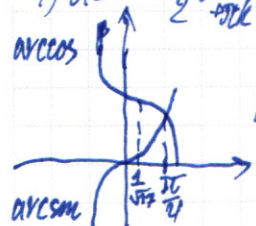
найдем  $\cos(y-x) = \cos y \cos x + \sin y \sin x$

$$\begin{aligned} \cos y &= \frac{1}{\sqrt{14}} & \sin x &= \frac{1}{\sqrt{14}} \\ y = \arccos \Rightarrow \sin y > 0 & \Rightarrow \sin y = \sqrt{1 - \frac{1}{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} & x = \arcsin \Rightarrow \cos x > 0 & \Rightarrow \cos x = \sqrt{1 - \frac{1}{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}} \end{aligned}$$

$$\cos(y-x) = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \frac{4}{\sqrt{14}} + \frac{4}{\sqrt{14}} \cdot \frac{1}{\sqrt{14}} = \frac{8}{14}$$

поэтому 2)  $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{14-8}{14+8}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

4)  $\alpha = \frac{\pi + x - y}{2} + \pi k = \frac{\pi - (y-x)}{2} + \pi k \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{1-\cos(\pi - (y-x))}{1+\cos(\pi - (y-x))}} = \sqrt{\frac{1+\cos(y-x)}{1-\cos(y-x)}} = \frac{5}{3}$



из графика видно, что  $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{14}}\right) = y \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], > x$  тогда  $\frac{y-x}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  и  $\frac{\pi - y + x}{2} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

поэтому в п. 2 и 4)  $\operatorname{tg} \alpha > 0$

Ответ:  $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

# Задача № 6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$f(x) = 18x^2 - 51x + 28$  - кв функ, график - парабола, ветви вверх

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{18 \cdot 4}{9} - \frac{51 \cdot 2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$$

$$f(2) = 72 - 102 + 28 = -2$$

$$x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$$

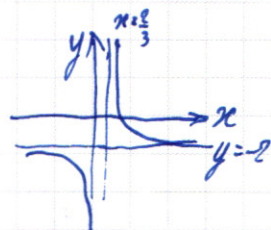
$$\begin{cases} \frac{2a}{3} + b \geq 2 \\ 2a + b \geq -2 \end{cases} \begin{cases} 2a + 3b \geq 6 \\ 2a + b \geq -2 \end{cases} \begin{cases} 6a + 9b \geq 6 \\ 2b \geq 8 \\ 4a \geq -12 \end{cases} \begin{cases} b \geq 4 \\ a \geq -3 \end{cases}$$

$g(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$  - дробно-рац. функ, график - гипербала

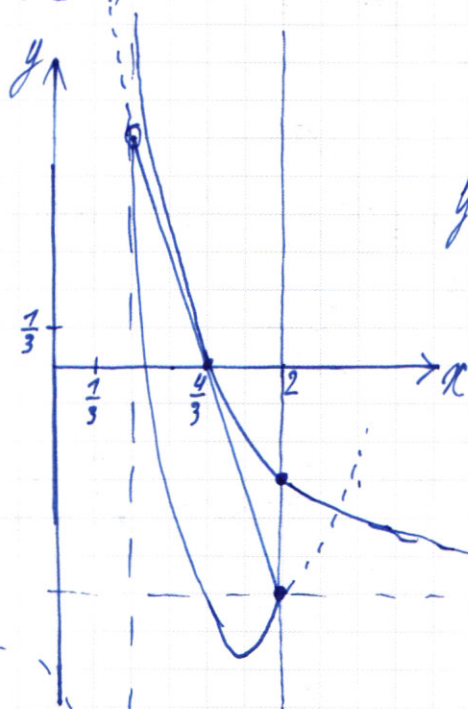
$$g(x) = -\left(\frac{6x-8}{3x-2}\right) = -\left(2 + \frac{-4}{3x-2}\right) = \frac{4}{3x-2} - 2$$

при  $x < \frac{2}{3}$   $g(x) < -2$

при  $x > \frac{2}{3}$   $g(x) > -2$



$$g(2) = \frac{8-12}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$$



Проверим прямую, образованную граничными значениями  $a$  и  $b$

$$y = -3x + 4 = f(x)$$

$$-3x + 4 = \frac{8-6x}{3x-2}$$

$$3x - 4 = \frac{6x-8}{3x-2}$$

$$3x - 4 \left(1 - \frac{2}{3x-2}\right) = 0$$

$$\frac{(3x-4)^2}{3x-2} = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

Получается, что ни поднять, ни опустить, ни повернуть эту прямую мы не можем, она единственна

Ответ:  $(-3; 4)$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание №5

$$f(ab) = f(a) + f(b) \quad f(p) = [p/4]$$

пусть  $\frac{x}{y} = z$ , тогда  $x = zy$ , тогда

$$f(z) < 0 \text{ и } f(x) = f(z) + f(y) \\ f(z) = f(x) - f(y)$$

$$f(x) - f(y) < 0$$

$f(x) < f(y)$  ищем все такие пары

рассмотрим значения  $f(x)$ ,  $x \in [4; 28]$

$$f(4) = 2 \quad f(2) = 0 \quad f(17) = 4$$

$$f(5) = 1 \quad f(18) = 0$$

$$f(6) = f(2) + f(3) = 0 \quad f(19) = 4$$

$$f(7) = 1 \quad f(20) = 1$$

$$f(8) = 3 \quad f(2) = 0 \quad f(21) = 1$$

$$f(9) = 2 \quad f(3) = 0 \quad f(22) = 2$$

$$f(10) = f(2) + f(5) = 1 \quad f(23) = 5$$

$$f(11) = 2 \quad f(24) = 0$$

$$f(12) = 0 \quad f(25) = 2$$

$$f(13) = 3 \quad f(26) = 3$$

$$f(14) = 1 \quad f(27) = 0$$

$$f(15) = 1 \quad f(28) = 1$$

$$f(16) = 0$$

Итого: 9 нулей, 8 единиц, 3 двойки, 2 тройки,  
2 четверки, 1 пятерка

если  $f(y) = 5$ , то  $f(x) = 4; 3; 2; 1; 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  на пятерку 24 числа - 24 пары

если  $f(y) = 4$ , то  $f(x) = 3; 2; 1; 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$  на четверку 22 числа -  $2 \cdot 22 = 44$  пары

по аналогии ещё  $2 \cdot 20 = 40$  пар,  $3 \cdot 14 = 42$  пара

и  $8 \cdot 9 = 72$  пары (к нулям подставляем ноль)

всего  $24 + 44 + 40 + 51 + 72 = 68 + 91 + 72 = 91 + 140 = 231$

Ответ: 231 пара

Задача №3

$$|x^2 - 26x| \cdot \log_5 12 + 26x \geq x^2 + 13 \log_5(26x - x^2)$$

$$26x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0; 26)$$

$$x^2 - 26x < 0$$

$$(26x - x^2) \log_5 12 + 26x - x^2 \geq 13 \log_5(26x - x^2)$$

$$a \log_b c = c \log_b a$$

$$(26x - x^2) \log_5 12 = \left( (26x - x^2) \log_{26x - x^2} 5 \right) \log_5(26x - x^2) = \left( 5 \log_5 12 \right) \log_5(26x - x^2) = 12 \log_5(26x - x^2)$$

$$12 \log_5(26x - x^2) - 13 \log_5(26x - x^2) \geq x^2 - 26x$$

$$26x - x^2 \geq (26x - x^2) \log_5 13 - (26x - x^2) \log_5 12 \quad \text{переведем обратно}$$

разделим на  $(26x - x^2)$  т.к.  $x \in (0; 26)$  знак не поменяется

$$1 \geq (26x - x^2)^{\log_5 13 - 1} - (26x - x^2)^{\log_5 12 - 1}$$

$$1 \geq (26x - x^2)^{\log_5 \frac{13}{5}} - (26x - x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}}$$

$$1 \geq (26x - x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}} \left( (26x - x^2)^{\log_5 \frac{13}{5}} - 1 \right)$$

$$1 \geq (26x - x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}} \left( \frac{1 - 26x + x^2}{26x - x^2} \right)$$

$$26x - x^2 = y$$

$$y \log_5 13 - y \log_5 12 - y \log_5 5 \leq 0 \rightarrow y \log_5 169 + y \log_5 144 - 2y \log_5 13 \cdot 12 \leq y \log_5 25$$

$$y^2 \log_5 13 + y^2 \log_5 12 - 3y^2 \leq 0$$

~~$$y^2 \log_5 \frac{13}{5} - y^2 \log_5 \frac{12}{5} - y^2$$~~

~~$$y^2 \log_5 169 \leq y^2 \log_5 144 - 2y^2 \log_5 25 + y^2 \log_5 25$$~~

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{14}} \cdot \sqrt{14} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$2\beta = \pm \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 2\beta = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{14}} = \pm \sqrt{\frac{10}{14}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sin \alpha \frac{2}{\sqrt{14}} + \cos \alpha \left(\pm \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{14}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$2 \sin \alpha + \sqrt{10}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \\ = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k \end{cases}$$

$$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k$$

$$2\alpha = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) + 2\pi k$$

$$\begin{cases} \alpha = \frac{\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) + \pi k}{2} \\ \alpha = \frac{\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) + \pi k}{2} \end{cases}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$$

$$1) \alpha = \frac{\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{14}}\right) + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt{14}}\right) + \pi k}{2} = \frac{y + x}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha} = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos \alpha + 1}{2}}$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$



$$\operatorname{tg} \frac{y+x}{2} = \frac{1 - \cos(y+x)}{1 + \cos(y+x)}$$

$$\cos(\pi - \alpha)$$



$$\begin{aligned} (3x-3)^2 &= 9x^2 - 18x + 9 \\ (y-6)^2 &= y^2 - 12y + 36 \\ y^2 - 12y + 36x^2 &= xy - 6x - y + 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^2 - 1 &= 0 \\ x &= \pm 1, y = 6 \end{aligned}$$

$$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 9$$

$$y - 6x = \sqrt{x^2 - 1} + (y-6)$$

$$9x^2 y^2 - 18x - 12y = 45$$

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{x^2 - 1} + (y-6) \\ 9x^2 y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 9$$



$$12^2 + 28 = 144 + 28 = 172 \neq 180$$

$$x \in (0; 26)$$

$$|x^2 - 26x| \log_5 12 + 26x \geq x^2 - 13 \log_5 (26x - x^2)$$

$$(26x - x^2) \log_5 12 + 26x \geq x^2 + 13 \log_5 (26x - x^2)$$

$$(26x - x^2) \log_5 12 + 26x \geq 13 \log_5 (26x - x^2)$$

$$\frac{8-6x}{3x-2} - \frac{6x-8}{3x-2} = \frac{8-12-4}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$-2 - \frac{4}{3x-2}$$

$$\frac{4}{3x-2} - 2$$

$$18x^2 - 51x + 28$$

$$D = 2607 - 2016$$

$$\frac{601}{-12}$$

$$\frac{608}{-15}$$

$$\frac{585}{18}$$

$$\frac{117}{3}$$

$$\frac{39}{3}$$

$$\frac{13}{13}$$

$$x \in \left[ \frac{6-51}{20}, \frac{51}{36} \right]$$

$$= 1 + \frac{15}{36} = 1 + \frac{5}{12}$$

$$\frac{18 \cdot 11}{9} - \frac{51 \cdot 2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28$$

$$20 - 34 + 28 = 14$$

$$18 \cdot 11 - 51 \cdot 2 + 28 = 198 - 102 + 28 = 124$$

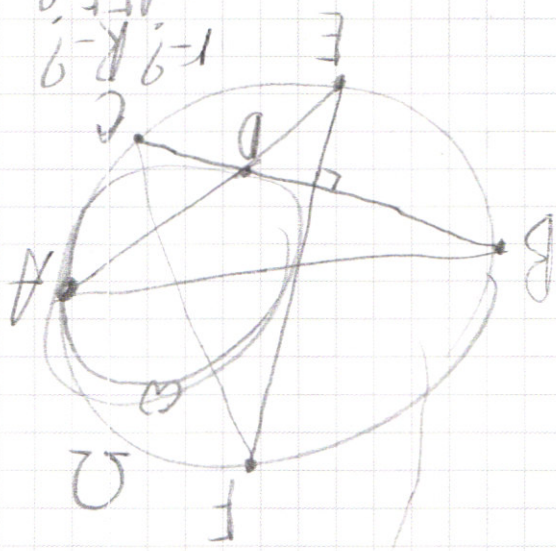
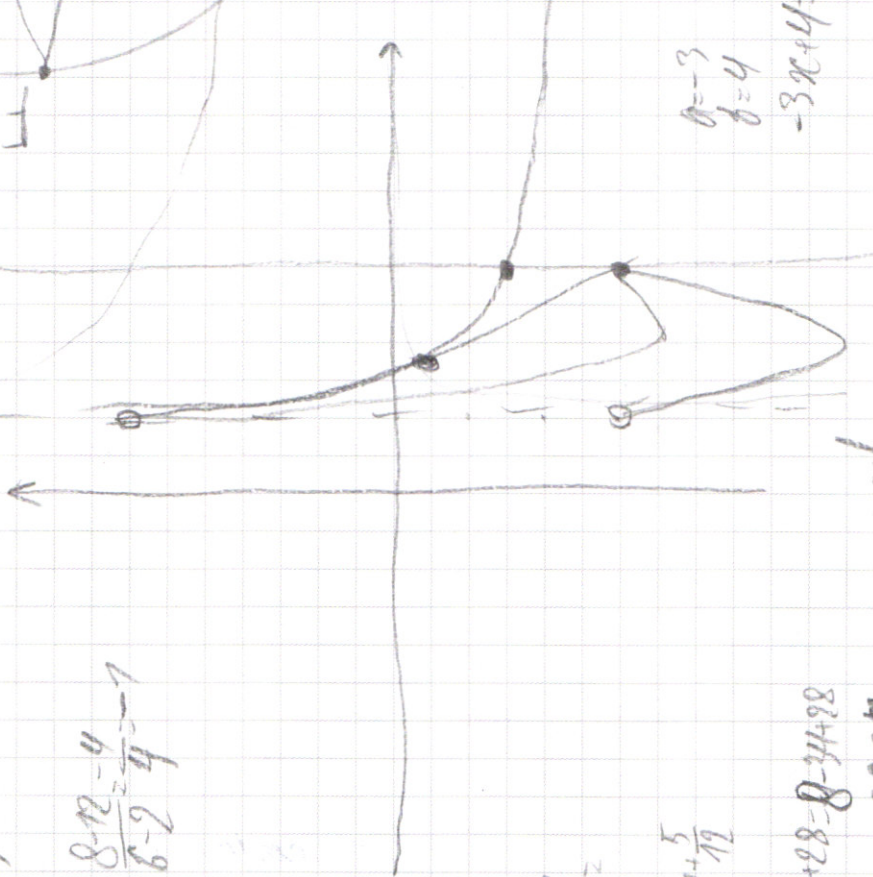
$$-1 \geq 20 + 6 \geq 2$$

$$20 + 6 \geq 2$$

$$60 + 6 \geq 8$$

$$26x - x^2 > 0$$

$$x^2 - 26x < 0$$



$$6x - 4^2 = 0$$

$$9x^2 - 24x + 16 = 0$$

$$\frac{8-6x}{9x-2}$$

$$\frac{6x-4}{3x-2} = \frac{8x-8}{3x-2}$$

$$\frac{9x^2-6x-12x+8-6x+8}{3x-2} = 0$$

$$\frac{9x^2-24x+16}{3x-2} = 0$$

$$a = -3$$

$$b = 4$$

$$-3x + 4 = 0$$

$$20 + 36 \geq 8$$

$$26 \geq 8$$

$$110 \geq 19$$

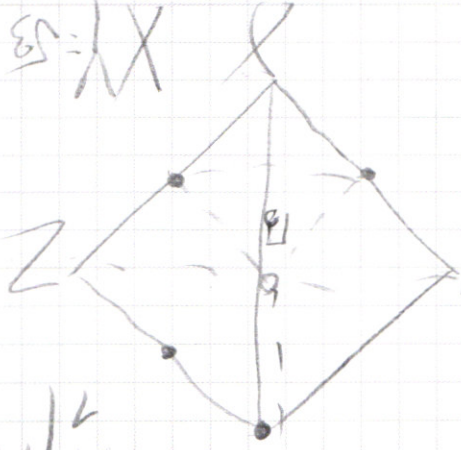
$$0 \geq -3$$

$TZ=2$

$XZ$

$TX=2$   
 $XY=3$

$[82:17]3h$   
 $[82:17]2x$



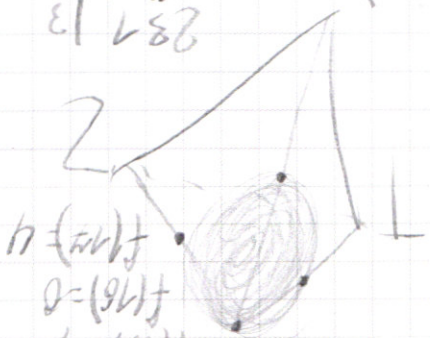
$f(17) = [0/14] = (0/1) f$   
 $f(16) = (9/1) f$   
 $f(14) = (0/1) f$

$Q \times Z$   
 $Z = \frac{h}{20}$   
 $nZ = x$

$v/v$   
 $w/w$   
 $t/t$   
 $z/z$

$f(13) = 5$   
 $f(12) = 4$   
 $f(11) = 3$   
 $f(10) = 2$   
 $f(9) = 1$   
 $f(8) = 1$   
 $f(7) = 1$

$f(11) = (20) f = (2) f$   
 $f(10) = (7) f = (0) f$



$(2) f + 1 = (11) f + 2 = (9) f$   
 $h = 11$   
 $17 = 26$

$f(14) = 1$   
 $f(13) = 1$   
 $f(12) = 0$   
 $f(11) = 4$

$y \geq y \log_5^{13} - y \log_5^{12}$   
 $0 \leq y \log_5^{13} - y \log_5^{12} - y \leq 0$   
 $y \log_5^{13} - y \log_5^{12} - y \leq y \log_5^{13}$

$FX = EX \Rightarrow AX = 2X f(13) = 3$

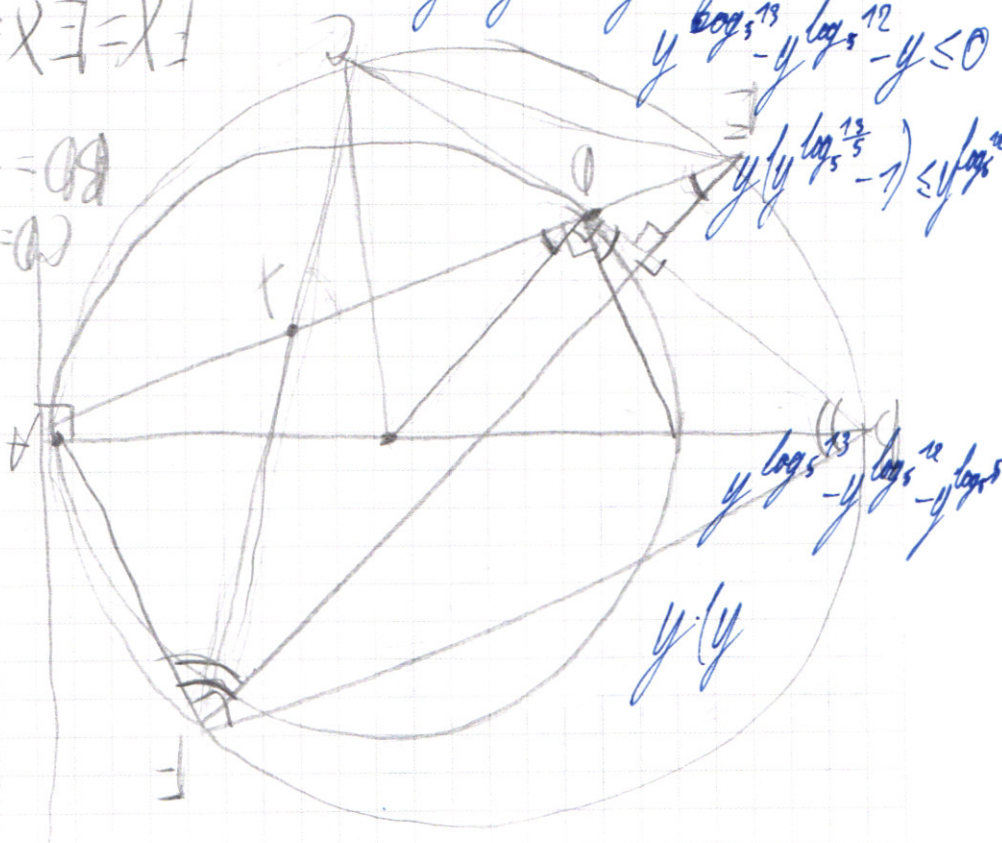
$f(12) = 2 f(11) = 2$   
 $BD = 13 f(11) = 2$   
 $CD = 12 f(10) = f(9) + f(8) = 1$

$f(9) = 2 f(8) = 0$   
 $f(8) = 3 f(7) = 0$   
 $f(7) = 0$

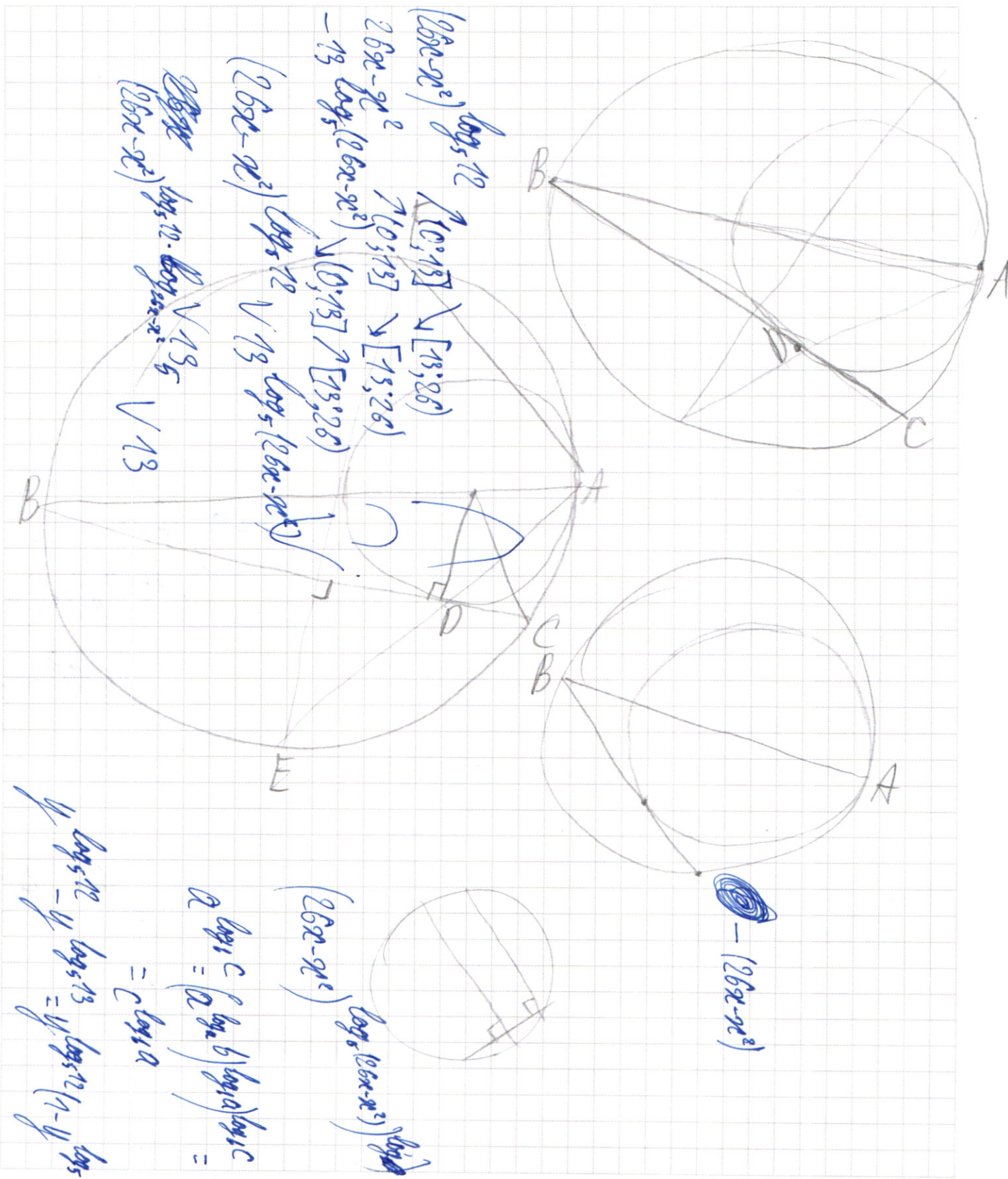
$f(6) + f(5) = f(6) = 0$   
 $f(5) = 1$

$f(4) = 2 f(3) = 0$

$d = \beta + \frac{2}{AC}$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Handwritten mathematical annotations on the diagrams:

- Top left:  $(260x - 9x^2) \sqrt{\log_5 12}$
- Below top left:  $260x - 9x^2$ ,  $-\sqrt{13} \sqrt{\log_5 (260x - 9x^2)}$
- Middle left:  $(260x - 9x^2) \sqrt{\log_5 12}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{13}$
- Bottom left:  $(260x - 9x^2) \sqrt{\log_5 12}$ ,  $\sqrt{13}$
- Bottom left equations:
 
$$a \sqrt{\log_5 12} = \sqrt{a \log_5 b} \sqrt{\log_5 a} \sqrt{\log_5 c} = \sqrt{a \log_5 a}$$

$$\sqrt{a \log_5 12} - \sqrt{a \log_5 13} = \sqrt{a \log_5 12} (1 - \sqrt{13})$$
- Bottom center:  $(260x - 9x^2) \sqrt{\log_5 (260x - 9x^2)}$
- Bottom right:  $(260x - 9x^2)$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
------

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)