МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \underline{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

① $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$-\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} = +\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos\left(2\alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{1}{\sqrt5}$

$\alpha + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi n$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha =$

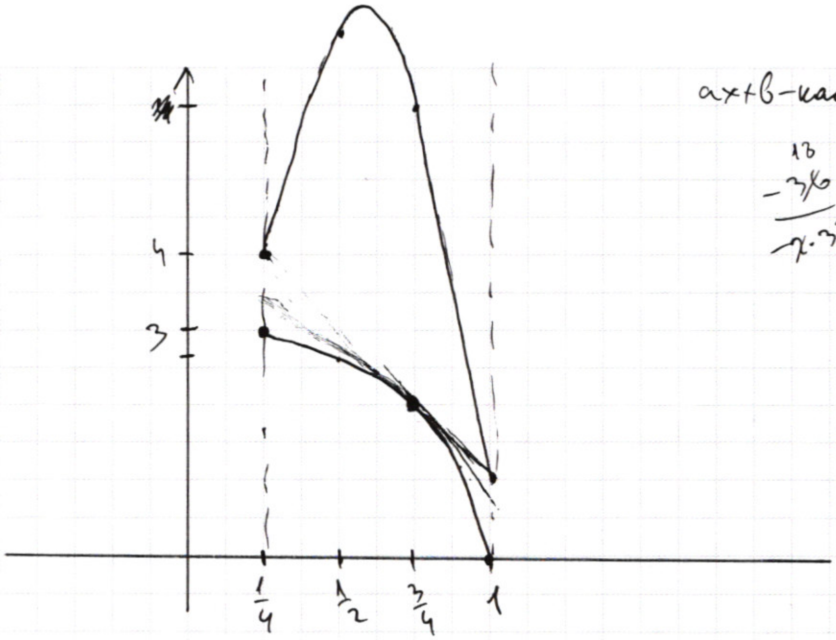
$= -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \pm \frac{4}{5} = -\frac{1}{5}$

$\left[\begin{array}{ll} \sin 2\alpha = -1 & \cos 2\alpha = 0 \\ \sin 2\alpha = \frac{3}{5} & \cos 2\alpha = \pm\frac{4}{5} \end{array}\right.$

$-\frac{3}{5} : \frac{9}{5} = -\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{9} \dots$



$ax+b$ — кас. к $\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$\frac{-3x_0}{-x \cdot 3^2} = 0 \frac{9}{16}$

$f'(x)\ \frac{16}{(4x-5)^2} = \frac{16}{(4x-5)^2}$

$ax+b$

$\frac{16}{(4x_0-5)^2} = a$

$f(\frac{1}{4}) = 4$

$f(1) = 1$

$\frac{1}{4}a + b = 4$

$a+b=1$

$ax+b \geq 4 + \frac{4}{4x-5}$

$(ax+b)(4x-5) \geq 16x-20+4$

$4ax^2 - 5ax + 4bx - 5b \geq 16x-16$

$4ax^2 - x(5a-4b+16) - 5b + 16 \geq 0$

$-16(4b-5b)$

$a+4b=16$

$a+b=1$

$3b=15$

$b=5$

$a=-4$

$25a^2 + 16b^2 + \cancel{256} - 40ab - 128b + 160a - \cancel{256} + 16 \cdot 5b$

$25a^2 + 16b^2 - 40ab - 128b + 160a - 16 \cdot 5b = 0$

$-(4x+5) \geq \frac{16x-16}{4x-5}$

$-16x^2 + 40x - 25 \geq 16x - 16$

$16x^2 - 24x + 9 \leq 0$

$(4x+3)^2 \leq 0$

$x = -\frac{3}{4}$

$\sin^2 + \cos^2 = 1$

$tg^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2}$

$\cos^2 = \frac{1}{16+1} = \frac{1}{17}$

$\sin^2 = 1 - \frac{1}{17} = \frac{16}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}}$ $\cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt5}$ $\boxed{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}}$ $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)=\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta\pm\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta\pm\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$

$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-1}$

$\sin 2(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)=2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin^2\alpha\cdot\cos\beta\cdot\sin\beta+$
$+\cos^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\alpha\cdot\sin^2\beta)=2(\frac12\sin 2\alpha\cdot\cos^2\beta+\frac12\sin 2\beta\cdot\sin^2\alpha+$
$+\frac12\sin 2\beta\cdot\cos^2\alpha+\frac12\sin 2\alpha\cdot\sin^2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin 2\alpha\cdot\sin^2\beta+\sin 2\beta\cdot\sin^2\alpha+$
$+\sin 2\beta\cdot\cos^2\alpha=\sin 2\alpha(\cos^2\beta+\sin^2\beta)+\sin 2\beta(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=$
$=\sin 2\alpha+\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt2}{2}+\sin 2\beta\frac{\sqrt2}{2}=-\frac{\sqrt2}{2\sqrt5}=-\frac{\sqrt{10}}{10}$

$\cos($

$\sin(2\alpha+2\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)=2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)=$
$=2(\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin\beta\cos\beta+\sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha-\sin^2\beta\sin\alpha\cos\alpha)=$
$=\sin 2\alpha\cos^2\beta-\sin 2\beta\sin^2\alpha+\sin 2\beta\cos^2\alpha-\sin 2\alpha\sin^2\beta=$
$=\sin 2\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+\sin 2\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$\boxed{\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}}$

$\sin 2\alpha=-\frac25-\sin(2\alpha+4\beta)=-\frac25-\left(-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta\pm\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta\right)$

$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac25$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta=-\frac15$

$\sin 2\beta=\pm\frac{2}{\sqrt5}$ $\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sqrt{x-12y} = \sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45; \end{cases}$$

$x-12y=\sqrt{\ }$

$x^2-24xy+144y^2$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$9(4y^2-4y+1)$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45+36+9$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$2xy-12y-x+6=-(x-6)\ -12$

$-2(6y-3)-x(1-2y)$

$2y(x-6)-(x-6)=(x-6)(2y-1)$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} a&=x-6 \\ b&=2y-1 \end{aligned}}$$

~~$x-12y=x-6-12y+6=(x-6)-6(2y-1)$~~

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab}, \\ a^2+9b^2=90; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+36b^2-12ab=ab, \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-13ab+36b^2=0, \end{cases}$$

$1690-540=1150$

$23 \cdot 23 = 529$

$90-9b^2+36b^2-13ab=0$

$90+27b^2-13ab=0$

$13ab=90+27b^2$

$a=\dfrac{90+27b^2}{13b}$

$x=a+6$

$y=\dfrac{b+1}{2}$

$ab=\dfrac{90+27b^2}{13}$

$a^2=\dfrac{90^2+27^2b^4+2\cdot 90\cdot 27b^2}{169b^2}+9b^2=90,$

$\dfrac{900+81b^4+540b^2}{169b^2}+b^2=10,$

$\dfrac{900+81b^4+540b^2+169b^4-1690b^2}{196b^2}=0$

$90-9\cdot\dfrac{18}{5}=\dfrac{450-162}{5}=\dfrac{388}{5}$

$450-162=388$

$388=4\cdot 97$

$250b^4-1150b^2+900=0$

$25b^4-115b^2+90=0,$

$5b^4-23b^2+18=0$

$D=529-360=169$

$b^2=\left[\begin{aligned} &\frac{23+13}{10}=\frac{36}{10}=\frac{18}{5} \\ &\frac{23-13}{10}=1 \end{aligned}\right.$

$-2\sqrt{\frac{97}{5}}+6+12\sqrt{\frac{2}{5}}-6=$

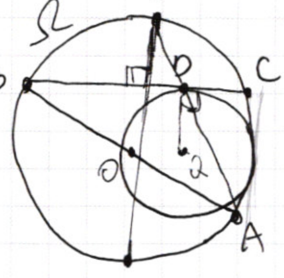
$-2\sqrt{\frac{324\cdot 2}{5}}-\sqrt{\frac{97\cdot 4}{5}}$

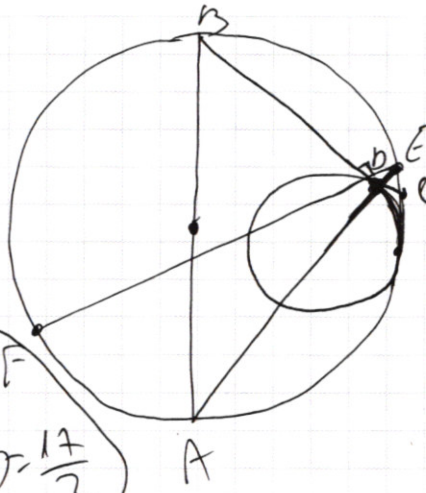
x	y
15	1
-3	0
$2\sqrt{\frac{97}{5}}+6$	$\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2}$
$-2\sqrt{\frac{97}{5}}+6$	$\frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1}{2}$

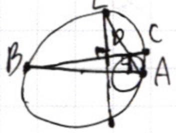
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$a^{\log_3(n-1)} + a^{\log_3(\ldots)} - a^{\log_3(n+1)}$







$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

1) Пусть $\angle BDE = \alpha$.

Тогда $\angle FED = 90 - \alpha$,

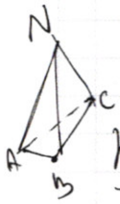
$\angle BEF = \alpha$, $\angle EBD = 90° - \alpha$

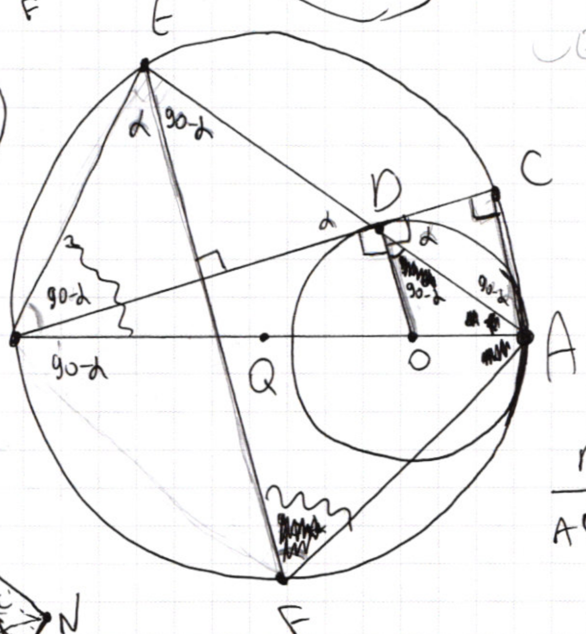
~~$\angle EBD = 90° - \alpha = \angle EFA$.~~

2) $\angle BCA = 90°$

O — центр ω.

$\angle ADC = \alpha$, $\angle ADO = 90° - \alpha$





$\cup EC = \cup FA$

$BD \cdot DC = ED \cdot DA$

$\angle EAF = 2\alpha$

$EA = AF$

$BC = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = \frac{32}{2} = 16$

$\frac{BD}{BC} = \frac{r}{AC}$

$\frac{17}{2} : 16$

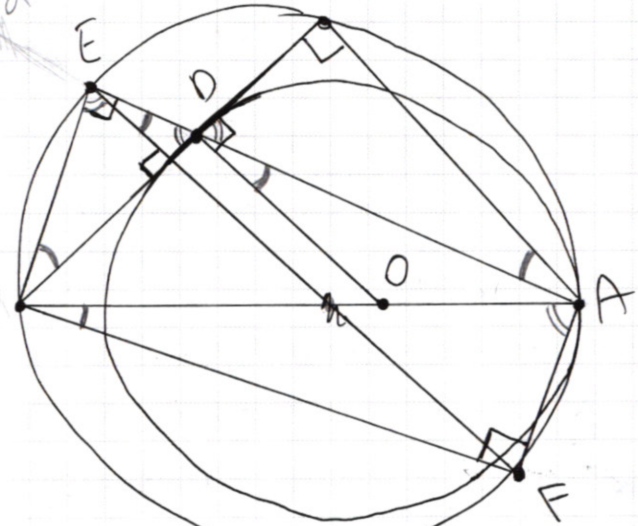
$\frac{17}{32}$

$\frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{2R - r}{2R} \Rightarrow$

$64R - 32r = 34R$

$30R = 32r$

$15R = 16r$



$\triangle BDO \sim \triangle BCA$

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{r}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{32}$

$34R = 64R - 32r$

$16r = 15R$

$32r = 17AC$ $\frac{15 \cdot 17}{16}$

$BD^2 = 2R(2R - 2r)$

$\frac{289}{4} = 2R(2R - \frac{15}{8}R)$

$\triangle BED \sim \triangle ACD$

$\frac{BD}{AD} = \frac{BE}{AC} = \frac{ED}{CD}$

$4R^2 - \frac{15}{4}R^2 =$

$r \cdot \frac{BC}{BD} = r \cdot \frac{16}{16 \cdot 17}$

$\frac{r \cdot 2}{17 \cdot 15} = \frac{17 \cdot 15 \cdot 2}{17 \cdot 15 \cdot 16}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$|x^2-10x|^{\log_3 4}-(x^2-10x) \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t^{\log_3 4}-t \geq 5^{\log_3(-t)}$

$(10x-x^2)^{\log_3 4}+(10x-x^2) \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t^{\log_3 4}+t \geq 5^{\log_3 t}$

$5^{\log_3 t}=\left(t^{\log_t 5}\right)^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 4}+t \geq t^{\log_3 5}$

$\cancel{t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}}=t^{\log_3 4}\left(t^{\log_3 5-\log_3 4}-1\right)=t^{\log_3 4}\left(t^{\log_3 \frac{5}{4}}-1\right)$

$\left(5^{\log_5 t}\right)^{\log_3 4}+5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$5^{\log_5 t\cdot\log_3 4}+5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$|x^2-10x|=t$

1) $x^2-10x<0$

$10x-x^2>0 \Rightarrow$

$x^2-10x<0 \Rightarrow$

$|x^2-10x|=10x-x^2$

$10x-x^2=t>0$

$\log_3 t\cdot\log_t 5=\log_3 5$

$=t^{\log_3 5}$

$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t^{1-\log_3 5}+t^{\log_3 4-\log_3 5} \geq 1$

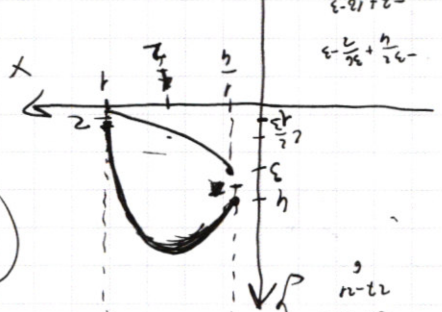
$t^{\log_3 \frac{3}{5}}+t^{\log_3 \frac{4}{5}} \geq 1$

$t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$1+1 \geq 5^{\log_3 1}$

$1+1 \geq 5^0=1$

$t^{\log_3 3}<t^{\log_3 4}$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45; \end{cases} \quad \begin{cases} x-6-12y+6=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}, \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9=45+36+9; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(2y-1)(x-6)}, \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90. \end{cases}$$

Пусть $x-6=a$, $2y-1=b$. Система примет вид:

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab}, \\ a^2+9b^2=90; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab, \\ a^2=90-9b^2; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=90-9b^2, \\ a^2-13ab+36b^2=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2=90-9b^2, \\ 90+27b^2-13ab=0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^2=90-9b^2, \\ a=\dfrac{90+27b^2}{13b}; \end{cases}$$ (т.к. $b=0$ не является решением)

$$\begin{cases} a^2=\dfrac{90^2+27^2b^4+2\cdot 90\cdot 27b^2}{169b^2}, \\ a^2=90-9b^2. \end{cases}$$

$$\frac{90^2+27^2b^4+2\cdot 90\cdot 27b^2}{169b^2}=90-9b^2,$$

$$\frac{900+81b^4+540b^2}{169b^2}=10-b^2,$$

$$900+81b^4+540b^2=1690b^2-169b^4,$$

$$250b^4-1150b^2+900=0,$$

$$5b^4-23b^2+18=0$$

$$D=23^2-4\cdot 5\cdot 18=169$$

$$b^2=\frac{23\pm 13}{10}$$

$$\left[\begin{aligned} b^2&=1, \\ b^2&=\frac{18}{5}. \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b^2 = 1, \\ a^2 = 81, \end{cases} \\ \begin{cases} b^2 = \frac{18}{5}, \\ a^2 = \frac{388}{5}. \end{cases}\end{array}\right.$$

Т.к. $ab \geq 0$, то

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} b = 1, \\ a = 9, \end{cases} \\ \begin{cases} b = -1, \\ a = -9, \end{cases} \\ \begin{cases} b = 3\sqrt{\frac{2}{5}}, \\ a = 2\sqrt{\frac{97}{5}}, \end{cases} \\ \begin{cases} b = -3\sqrt{\frac{2}{5}}, \\ a = -2\sqrt{\frac{97}{5}}. \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 15, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2\sqrt{\frac{97}{5}} + 6, \\ y = \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2\sqrt{\frac{97}{5}} + 6, \\ y = \frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}. \end{cases}\end{array}\right.$$

После подстановки в исходную систему получаем решение:

$(15;1)$; $\left(2\sqrt{\frac{97}{5}} + 6;\ \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}\right)$;

$\left(-2\sqrt{\frac{97}{5}} + 6;\ \frac{-3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}\right)$.

Ответ: $(15;1)$, $\left(2\sqrt{\frac{97}{5}} + 6;\ \frac{3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}\right)$, $\left(-2\sqrt{\frac{97}{5}} + 6;\ -\frac{3\sqrt{\frac{2}{5}} + 1}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = 2\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$, $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin\left((2\alpha+2\beta)+2\beta\right)+\sin 2\alpha = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta +$

$+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \sin 2\alpha =$

$= -\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -1 \ (\cos 2\alpha = 0), \\ \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \ (\cos 2\alpha = \pm\frac{4}{5}). \end{array}\right.$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - 1}$

$tg\alpha = \frac{-1}{0-1} = 1$

$tg\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}-1} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}} = -3$

$tg\alpha = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}-1} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{9}{5}} = -\frac{1}{3}$

Ответ: -3; $-\frac{1}{3}$; 1.

№3.

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$.

Т.к. $10x - x^2 > 0$, то $x^2 - 10x < 0$, и $|x^2 - 10x| = 10x - x^2$.

$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 (10x - x^2)}$.

Пусть $10x - x^2 = t$, $t > 0$:

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$,

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$,

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

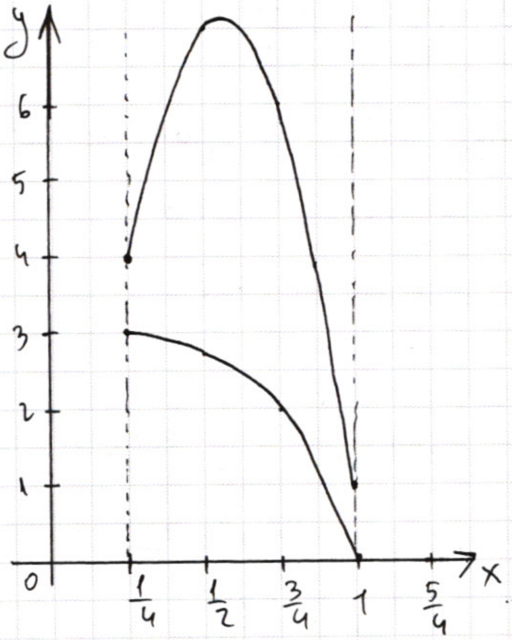
N6.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$y=\frac{16x-16}{4x-5} \Rightarrow y=4+\frac{4}{4x-5}$ – график-гипербола

$y=-32x^2+36x-3$ — график — парабола

Изобразим в одной системе координат:



$f(x)=ax+b$ – прямая

Чтобы на промежутке $[\frac{1}{4};1]$ выполнялось требуемое неравенство, прямая должна проходить между изображёнными линиями, при этом $3\le f(\frac{1}{4})\le 4$, $0\le f(1)\le 1$.

Заметим, что если $f(\frac{1}{4})=4$, $f(1)=1$, то есть $f(x)=-4x+5$, то: $-4x+5=\frac{16x-16}{4x-5}$,

$-16x^2+40x-25=16x-16$,

$16x^2-24x+9=0$,

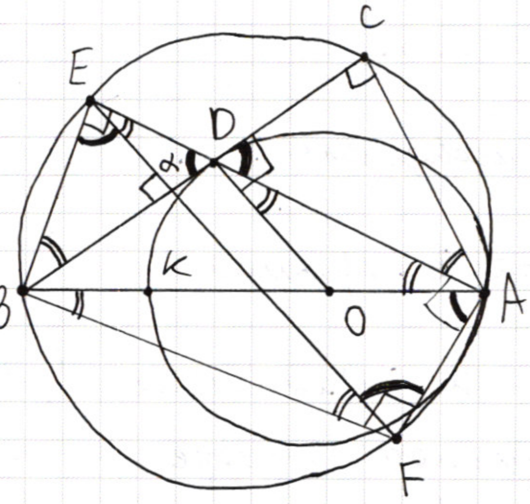
$(4x-3)^2=0$,

$x=\frac{3}{4}$ – то есть $f(x)$ является касательной к ветке гиперболы. Значит, прямую нельзя

„передвинуть" ниже и нельзя повернуть вокруг точки касания. Значит $(-4;5)$ — единственная пара чисел $(a;b)$, при которых неравенство верно для всех x на промежутке $[\frac{1}{4};1]$.

Ответ: $(-4;5)$.

№4.



1) Пусть O – центр ω, тогда $OD \perp BC \Rightarrow OD \parallel FE \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle BCA \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{r}{AC} = \frac{2R-r}{2R}$, где

R – радиус Ω, r – радиус ω.

Отсюда следует, что

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{32} \Rightarrow 16r = 15R$.

Пусть $AB \cap \omega = K$.

2) Т.к. BC – касательная к ω, то:

$BD^2 = BA \cdot BK \Rightarrow \frac{289}{4} = 2R(2R-2r) \Rightarrow \frac{289}{4} = 2R(2R - \frac{15}{8}R)$,

$4R^2 - \frac{15}{4}R^2 = \frac{289}{4}$,

$\frac{1}{4}R^2 = \frac{289}{4}$,

$R = 17 \Rightarrow r = \frac{255}{16}$.

3) Пусть $\angle EDB = \alpha$. Тогда ~~DEF=90°-α~~ $\angle CDA = \alpha$, $\angle ODA = 90° - \alpha = \angle OAD = \angle DAC$. Т.к. $\angle BFE = \angle BAE = 90° - \alpha$, то $\angle EFA = \alpha$.

$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{AC}{DC} = \operatorname{arctg} \frac{r \cdot BC}{BD \cdot CD} = \operatorname{arctg} \frac{255 \cdot 16 \cdot 2 \cdot 2}{17 \cdot 15 \cdot 16} = \operatorname{arctg} 4$

4) ~~$S_{EAF} = \frac{AF \cdot AE}{2}$, т.к. $\angle EAF = 90° - \alpha + \alpha = 90°$~~; $S_{EAF} = \frac{EF \cdot AF}{2} \cdot \sin\alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\alpha = 4 \Rightarrow \sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{tg^2\alpha+1} = \frac{16}{17} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

$AF = \cos\alpha \cdot EF = \cos\alpha \cdot 2R = 34 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{34}{\sqrt{17}}$

$S_{EAF} = \frac{34 \cdot \cancel{34}^{2}}{\sqrt{17}\cdot \cancel{2}} \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = 34 \cdot 4 = 136$

Ответ: 17 и $\frac{255}{16}$; $\operatorname{arctg} 4$; 136.