МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

По ОДЗ $x^2+6x>0$, поэтому $|x^2+6x| = x^2+6x$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 4^{\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 5}$$

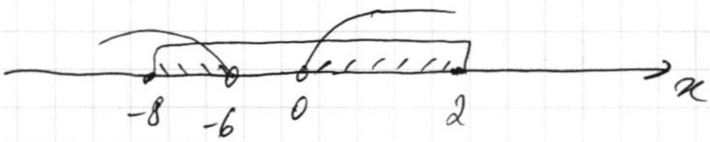
$$4^{\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 5} = 4^{\log_4 5\cdot\log_4(x^2+6x)} = 5^{\log_4(x^2+6x)}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$$

При любом $t>2$ $3^t+4^t<5^t$, поэтому необходимо, чтобы $t \leq 2$. Тогда $3^t+4^t \geq 5^t$.

$$\log_4(x^2+6x) \leq 2 = \log_4 16$$

$$\begin{cases} x^2+6x \leq 16 \\ x^2+6x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+6x-16 \leq 0 \\ x(x+6)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+8)(x-2) \leq 0 \\ x(x+6)>0 \end{cases}$$



Ответ: $[-8;-6)\cup(0;2]$

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\,(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \sin 2\alpha + \sin 4\beta\cos 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\,(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + \sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta) + \sin 4\beta\cos 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha =$

$= 2\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) = 2\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta)$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1)\\ 2\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17} & (2)\end{cases}$$

$\frac{(2)}{(1)}:\ 2\cos 2\beta = \frac{8\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{4}{\sqrt{17}},\ \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$(1):\ \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\frac{8\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = -1$

$8\operatorname{tg}\alpha + 1 - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 0 \Rightarrow 8\operatorname{tg}\alpha = -2,\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\frac{8\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$

$8\operatorname{tg}\alpha - 1 + \operatorname{tg}^2\alpha + 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 0 \Rightarrow -2\operatorname{tg}^2\alpha = 8\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0\\ \operatorname{tg}\alpha = \cancel{-\frac{1}{4}}\ -4\end{array}\right.$

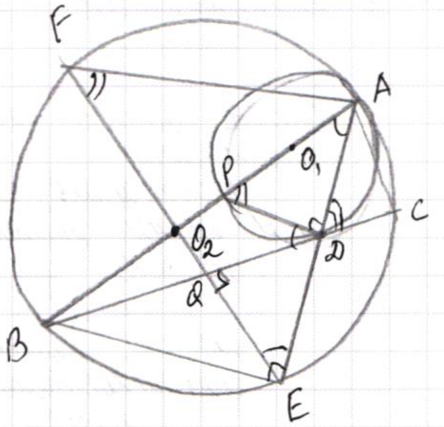
Ответ: $0;\ -\frac{1}{4};\ -4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Окружности касаются в т. A, поэтому диаметр AB проходит через центры обеих окружностей.

Пусть $\angle BAE = \alpha$, тогда $\angle BDP = \alpha$ (угол между хордой и касательной).

Пусть $\angle APD = \beta$, тогда по этому же св-ву $\angle ADC = \beta$.

$\angle ADC = \angle BDE$ (как вертикальные)

$\triangle QED$ — прямоугольный, поэтому $\angle FED = 90° - \beta = \alpha$

$\triangle BAE$ — прямоугольный (AB - диаметр), поэтому $\angle ABE = 90° - \alpha = \beta = \angle EFA$ (вписанные и опираются на одну дугу).

Значит, в $\triangle FEA$ $\angle A = 90°$, т.е. FE — диаметр. Т.к. $FE \perp BC$, $BQ = QC = \frac{9}{2}$, $DQ = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$

$\triangle ACD \sim \triangle EDQ$ по 2-м углам, значит, $\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{DQ} = \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{4}$

$AD = \frac{5}{4} DE.$

По св-ву пересекающихся хорд $BD \cdot CD = AD \cdot DE$

$\frac{5}{4} DE^2 = \frac{13}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{65}{4} \Rightarrow DE^2 = 13 \Rightarrow DE = \sqrt{13}.$

$AD = \frac{5\sqrt{13}}{4}$

$\cos\beta = \frac{CD}{AD} = \frac{5}{2} \cdot \frac{4}{5\sqrt{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}}$, $\sin\beta = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \angle AFE = \boxed{\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}}$

$\cancel{\cos\beta =} \sin\beta = \frac{AD}{2r} \Rightarrow r = \frac{AD}{2\sin\beta} = \frac{5\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{\sqrt{13}}{6} = \boxed{\frac{65}{24}}$

$\sin\beta = \frac{AE}{2R} \Rightarrow R = \frac{AE}{2\sin\beta} = \frac{9\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{\sqrt{13}}{6} = \boxed{\frac{117}{24}} = \frac{39}{8}$

$\triangle AEF$: $AF = 2R \cdot \cos\beta = \frac{39}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{39}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$S = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot AF \cdot \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{39}{4} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} = \boxed{\frac{351}{16}}$

Ответ: а) $\frac{39}{8}$; $\frac{65}{24}$; б) $\arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$; в) $\frac{351}{16}$

№6

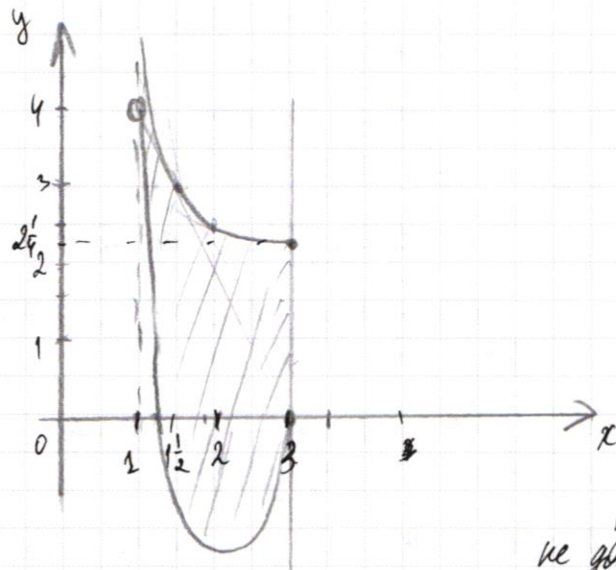
Преобразуем левую часть неравенства.

$$\frac{4x-3}{2x-2} = \frac{4x-4+1}{2x-2} = \frac{2(2x-2)+1}{2x-2} = 2+\frac{1}{2x-2}$$

$y = 2+\frac{1}{2x-2}$, график - гипербола

$y = 8x^2-34x+30 = 8(x-3)(x-\frac{10}{8})$ - парабола.

Изобразим графики обеих функций в координатах (x,y) на ~~$(0;1]$~~ $(1;3]$



Чтобы условие задачи выполнялось необходимо, чтобы все точки прямой $y=ax+b$ при $x\in(1;3]$ лежали внутри заштрихованной области.

Ясно, что $y(3) \geq 0$ и $y(1) \geq 4$

Но при этом прямая не должна выходить за пределы заштрихованной области.

Если прямая $y=ax+b$ проходит через т. $(3;0)$ и т. $(1;4)$, она коснётся гиперболы в т. $(\frac{3}{2};3)$, но не пересечёт её. Поэтому нам этот случай подходит.

(Касание следует из того, что ур-е $\frac{4x-3}{2x-2} = -2x+6$ имеет на $(1;3]$ 1 решение).

Если $y(3) > 0$, прямая обязательно пересечёт гиперболу на $(1;3]$, поэтому $y(3)=0$.

Аналогично можно сказать, что $y(1)=4$.

Поэтому нам подходят единственные значения a и b:

$a=-2$, $b=6$

Ответ: $(-2;6)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin^2\beta + 2\sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha -$

$4x-3 = 2ax^2 - 2ax + 2bx - 2b$ $\quad 4x-3 = 2ax^2 + 2ax + 2bx - 2b$

$-2\sin\beta\cos\beta\sin^2\alpha$

$2ax^2 + x(-4-2a+2b) - 2b + 3 = 0$

$2ax^2 + x(2a+2b-4) - 2b + 3 = 0$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha$

$D_1 = a^2 + b^2 + 4 - 2ab \cancel{+} 4b + 4a + 4ab - 6a =$

$\sin 2\alpha\cos^2 2\beta - \sin 2\alpha\sin^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha$

$D_1 = a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b -$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta + 1) = \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta - \sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta)$

$= a^2 + b^2 + 2ab + 4b - 10a + 4 = \quad + 4ab - 6a =$

$(a+b)^2 - 4b + 4 - 2a$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta) = 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta$

$(a+b)^2 = 4b + 2a - 4$

$2\cos 2\beta(\sin 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos 2\beta) = 2\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$= (a+b)^2 + 4b - 10a + 4 = 0$

$= a^2 + b^2 + 6ab - 10a - 4b + 4 = 0$

$2\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\sin\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$(a+b)^2 = -4 - 4b + 10a = \cancel{10a(}\ 10a + 4(1-b)$

$2\cos 2\beta = \frac{8}{17}\cdot\sqrt{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} \Rightarrow 2\cos^2\beta - 1 \Rightarrow 2\cos^2\beta = \frac{17+4\sqrt{17}}{17}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $-4-24-20$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{17}}(4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}(4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{8\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$8\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha = 0$

$4\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{8\operatorname{tg}\alpha + 1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$

$\operatorname{tg}\alpha(8\operatorname{tg}\alpha + 2) = 0$

$8\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + 1 + 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4x-3=-4x^2+4x+12x-12$

$4x^2-12x+9=0$

$9y^2-12xy+4x^2-3xy+2x+3y-2=0$

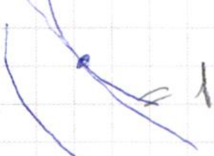
$x^2+2x+1+y^2+3y+\frac{9}{4}+8y^2-12xy+3x^2-3xy-\frac{21}{4}=0$

$9y^2+6xy+4x^2+6xy-\cancel{10}\,27xy-2$

$\frac{4x-3}{2x-2}=-2x+6$

$\frac{4x-3}{2x-2}=\frac{4x-4+1}{2x-2}$

$x^2+2xy+y^2-2x+xy-3y+2$



$=1+\frac{1}{2x-2}$

$1+\frac{1}{4}=1\frac{1}{4}$

$\frac{1}{2(x-1)}$

$\frac{4x-3}{2x-2}=x$

$x=\frac{1}{x}$

$2-\frac{3}{2}$

$CD=\frac{5}{2}$

$BD=\frac{13}{2}$

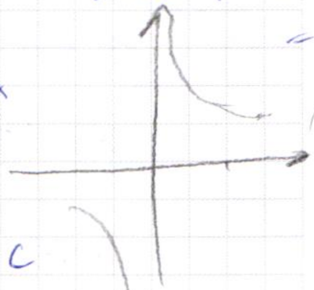
$BP(BP+R)=\frac{169}{4}$

$BQ=QC=\frac{9}{2}$

$2\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

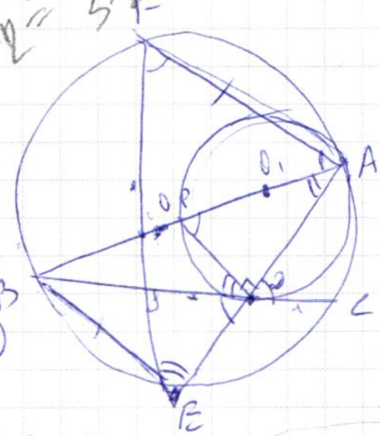
$\angle=60°$?

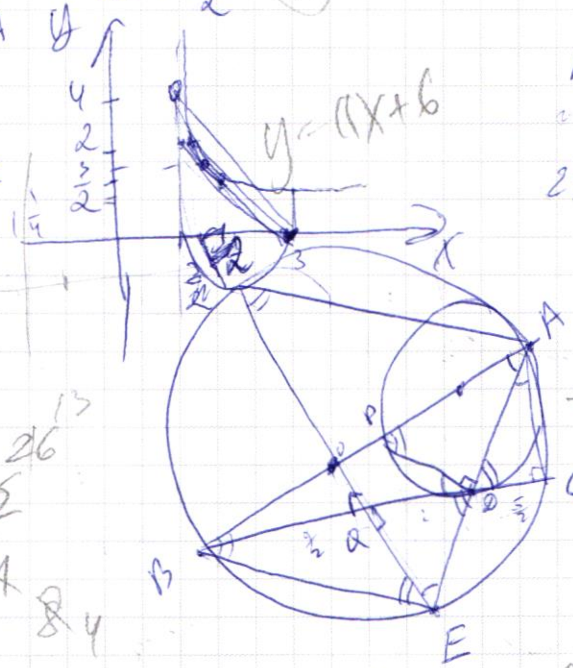
$=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}$



$2x^2-2x=4x-3$

$2x^2-6x+3=0$





$(2R-r)(2R)=$

$D_1=9-6=3$

$4R^2-2Rr=\frac{169}{4}$

$x=\frac{3+\sqrt{3}}{2}$

$\frac{39}{R}\quad\frac{52}{24}$

$BD\cdot CD=\frac{AD}{1}\cdot DF$

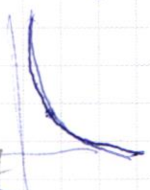
$\frac{AD}{DE}=\frac{5}{4}\Rightarrow AD=\frac{5}{4}DE$

$y(3)\in[0;\frac{5}{4}]$

$y(1)\geq 4$

$x>0$

$\frac{34}{16}=\frac{17}{8}$



$\cancel{AD}\;DE\cdot\frac{5}{4}DE=$

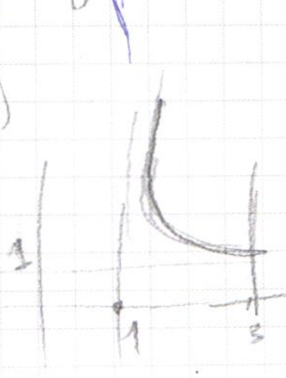
$\frac{117}{6}\quad\left(\frac{52}{24}\right)\quad\frac{3}{2}$

$\frac{7}{4}$

$189-240=-119$

$x_1=\frac{17-7}{8}=\frac{10}{8}\quad 1\frac{1}{2}\quad 2$

$x_2=3\quad 1\frac{3}{4}$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2+6x| = x^2+6x$

$3^{\log_3(x^2+6x)\cdot\log_4 5}$

$4^{\log_4 x^2+6x} - 4^{\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 5} =$

$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq 4\cdot 4^{\log_4(x^2+6x)}$

$\left(\frac{3}{4}\right) \geq 4 = \frac{3}{4}^{\log_{\frac{3}{4}} 4}$

$\log_4(x^2+6x) \geq \log_{\frac{3}{4}} 4 = \frac{1}{\log_4 \frac{3}{4}}$

$x^2+6x \geq 4^{\log_{\frac{3}{4}} 4} = 4^{\frac{1}{\log_4 \frac{3}{4}}} = \frac{4}{\frac{3}{4}} = \frac{16}{3}$

$\frac{\log_4(x^2+6x)\cancel{-}\log_4\frac{3}{4} - 1}{\log_4\frac{3}{4}} \geq 0$

$4^{\log_4(x^2+6x)}\left(4^{\log_4 5}-1\right) = 4^{\log_4(x^2+6x)+1}$

$4^{\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 5} - 4^{\log_4(x^2+6x)} =$

$= 4^{\log_4(x^2+6x)}\cdot(5-1) = 4\cdot 4^{\log_4(x^2+6x)}$

$4^{\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 5 - \log_4(x^2+6x)} =$

$= 4^{\log_4(x^2+6x)(\log_4 5 - 1)}$

$\log_{\frac{3}{4}} 4 = \frac{1}{\log_4\frac{3}{4}}$

$4^{\frac{16}{3}}$ $\frac{3}{4}$

log

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 4^{\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 5} = \left(4^{\log_4 5}\right)^{\log_4(x^2+6x)} =$

$= 5^{\log_4(x^2+6x)}$

$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4(x^2+6x)} + 1 \geq 4^{\log}$

$3^2+4^2 \geq 5^2$

$2 \leq 2$ $\quad 3^2+4^2 \geq 5^2$

$3^2+4^2 = 5^2$

$9+16=25$

$27+64 < 125$

$81+256 < 625\ldots$

$\log_4(x^2+6x) \leq 2$

$2 = -1$

$3^2+4^2 \geq 5^{-2}$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{16} = \frac{25}{9\cdot16} > \frac{9\cdot16}{25}$ $\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \frac{7}{12}$ $\frac{1}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

По ОДЗ $x^2+6x>0$, поэтому $|x^2+6x|=x^2+6x$.

$$3^{\log_4(x^2+6x)} \geqslant 4^{\log_4(x^2+6x)\cdot\log_4 5}-4^{\log_4(x^2+6x)}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} \geqslant 4^{\log_4(x^2+6x)}\left(4^{\log_4 5}-1\right)=4\cdot 4^{\log_4(x^2+6x)}$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} \geqslant 4\cdot 4^{\log_4(x^2+6x)} \quad \Big| : 4^{\log_4(x^2+6x)}>0$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4(x^2+6x)} \geqslant 4=\left(\frac{3}{4}\right)^{\log_{\frac{3}{4}}4}$$

$\left(\frac{3}{4}\right)^t$ - убывает

$$\log_4(x^2+6x) \leqslant \log_{\frac{3}{4}}4$$

$\log_4 t$ - возрастает

$$0<x^2+6x \leqslant 4^{\log_{\frac{3}{4}}4}$$

$$4^{\log_{\frac34}4}=4^{\frac{1}{\log_4\frac34}}=\frac{4}{\ }$$

$\boxed{\log_4(x^2+6x)\leqslant 2}$

$\frac{tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}=-\frac{8}{17}$

$1-tg^2\alpha+\frac{8}{17}+\frac{8}{17}tg^2\alpha=0$

$\sin(2\alpha+2\beta)=0$

$=\sin 2\alpha$

$\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~$2\alpha+2\beta=$~~

tg

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=$

$=\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha\\ \cos 2\alpha\end{array}\right.$

$tg^2\alpha=1$

$tg\alpha=\pm 1$

$\sqrt{3y(x-1)-2x(x-1)}=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$\sqrt{3}^2x^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}x+3+3y^2-2\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}y+\frac{4}{3}=\frac{1}{3}$

$9y^2-9xy+4x^2=2-3y-2x$

$9y(y-x)+4x(x-y)=4xy-2x-3y+2$

$x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3}$ $\quad \frac{13}{9}$ $\quad \frac{4}{3}-\frac{12}{9}$

$y \geqslant \frac{2}{3}x$

$9(4x-3)-2(x-1)$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{4}{9}\right)^2=\frac{1}{9}$

$16\cdot 4+27\cdot 3$

$64\cdot 4+27\cdot 3$ $\quad 125\cdot 5\cdot 5$

$y \geqslant \frac{2}{3}x+\frac{6}{9}$

$9y^2$ $\quad 3y(3y+1)+2x(2x+1)$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$\frac{4}{9}+\frac{3}{9}=\frac{7}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$(3y-2x)^2=\cancel{3y+}\,3y(\cancel{3}x-1)-2(x-1)$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$

$\cancel{3y(3y-x)}$

$9y(y-x)+4x(x-y)=2xy+2-2x-3y$

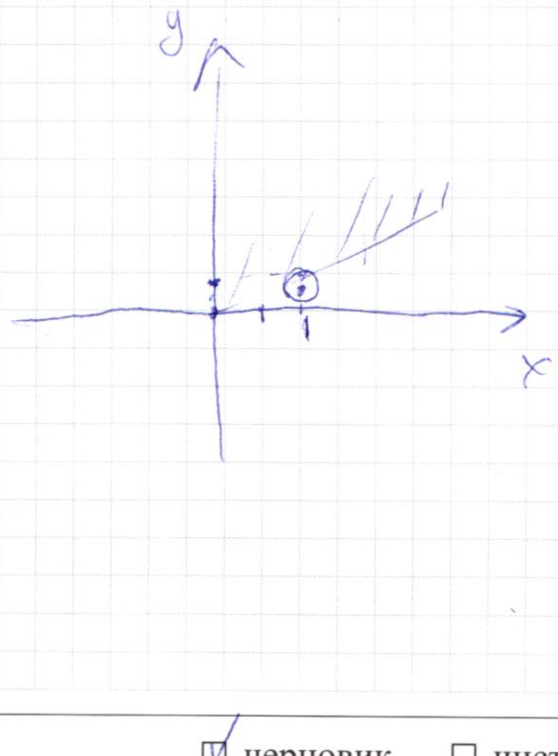
$(x-y)(4x-9y)=y(2x-3y)-2(x-1)$

$$-\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2-3xy+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$x^2+6y^2-15xy+8x+7y+2=0$

$3x(x-2)+y(3y-4)$

$2x-3y$



☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)