МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

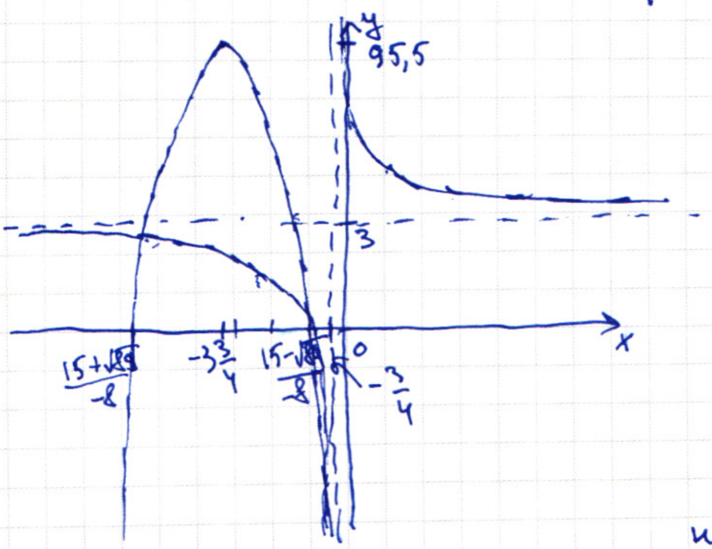
$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$$3+\frac{2}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$y=3+\frac{2}{4x+3}$ – гипербола; асимптоты: $x=-\frac{3}{4}$ и $y=3$

$y=-8x^2-30x-17$ – парабола с вершиной в $(-3\frac{3}{4};\ 95,5)$

Построим схематичный рисунок:



Найдем т. пересечения параболы и гиперболы:

$$3+\frac{2}{4x+3}=-8x^2-30x-17$$

$$1=(-4x^2-15x-10)(4x+3)$$

$$-4x^3-12x^2-60x^2-45x-40x-31=0$$

Как видно из рисунка, например $a=0;\ b=3$ подходит: $y=3$.

Гипербола пересекает ось OX в точке $(-\frac{11}{12};0)$.

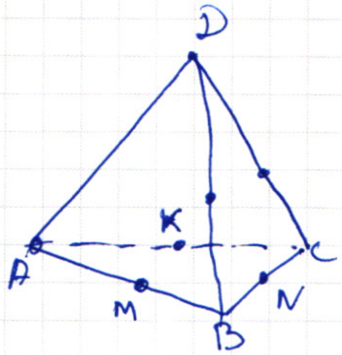
№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$,

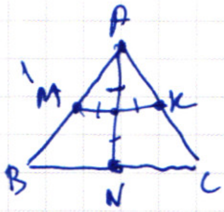
т.е. $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

№7.



Очевидно, что наименьший радиус у сферы, описанной около ABCD будет в случае, если (ABC) будет плоскостью, проходящей через диаметральное сечение сферы.

Центр сферы равноудален от A, M, K, N:



Средняя линия MK = AN. Наименьший радиус может быть в случае, если ABC – равносторонний треугольник. ~~AN~~ $\cos\angle BAN = \cos 30^\circ = \frac{AN}{AB}$;

$AN = AB\cos 30^\circ = 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $R = \frac{AN}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Ответ: $R_{min} = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = -\frac{4}{5\cdot 2\sin(2\alpha+2\beta)} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

По осн. триг. тожд.: $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$-\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad |\cdot 5\sqrt{5}$

$-10\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha = -5$

$-20\sin\alpha\cos\alpha + 10\cos^2\alpha - 5 = -5$

$\cos\alpha(\cos\alpha - 2\sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha \text{ не сущ.}\\ \cos\alpha - 2\sin\alpha = 0;\end{array}\right.$

$-2\,\text{tg}\,\alpha = -1; \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{1}{2}$

2) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad |\cdot 5\sqrt{5}$

$-10\sin 2\alpha - 5\cos 2\alpha = -5$

$-20\sin\alpha\cos\alpha - 10\cos^2\alpha + 5 = -5$

$-20\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{10\cos^2\alpha} + \cancel{10\cos^2\alpha} + 10\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(\sin\alpha - 2\cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = 0\\ \sin\alpha - 2\cos\alpha = 0; \quad \text{tg}\,\alpha = 2\end{array}\right.$

Корней ≥ 3 по условию $\Rightarrow$ проверка не нужна.

Ответ: $2; \frac{1}{2}; 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-x-2y+2\geq 0$

Рассмотрим второе уравнение:

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$ (1)

Рассмотрим первое уравнение. Возведем обе его части в квадрат. Это будет равносильно, если:

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0 \end{cases}$$

Решим уравнение как квадратное относительно x:

$x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2=0$

$D=1-10y+25y^2-4(4y^2+2y-2)=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=$
$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_1=\frac{5y-1+(3y-3)}{2}=\frac{5y-1+3y-3}{2}=\frac{8y-4}{2}=4y-2$

$x_2=\frac{5y-1-(3y-3)}{2}=\frac{5y-1-3y+3}{2}=\frac{2y+2}{2}=y+1$

Если $x=4y-2$, то: (подставляю в (1)):

$(4y-2-2)^2+(3y-3)^2=25$

$16(y-1)^2+9(y-1)^2=25;$ $25(y-1)^2=25;$ $(y-1)^2=1$

$(y-1)^2=1$

$|y-1|=1$

1) $y=2$; 2) $y=0$.

Проверим, подходят ли корни под ОДЗ:

1) $y=2$; $x=4y-2$; $x=6$

2) $y=0$; $x=4y-2$; $x=-2$.

$x-2y\geqslant 0$

1) $6-2\cdot 2\geqslant 0$ – верно

2) $-2+0\geqslant 0$ – не верно, корень не удовлетворяет условию.

Если $x=y+1$, то: (подставляю в (1)):

$(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$10(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=2,5$

$|y-1|^2=\sqrt{2,5}$

1) $y=1+\sqrt{2,5}$; 2) $=1-\sqrt{2,5}$

$x=y+1$;

1) $y=1+\sqrt{2,5}$; $x=2+\sqrt{2,5}$;

2) $y=1-\sqrt{2,5}$; $x=2-\sqrt{2,5}$;

Проверим, подходят ли корни под ОДЗ:

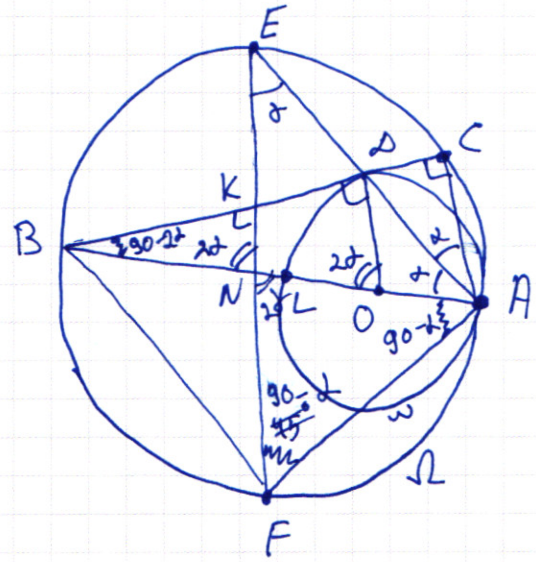
$x-2y\geqslant 0$:

1) $2+\sqrt{2,5}-2-2\sqrt{2,5}=-\sqrt{2,5}\geqslant 0$ – неверно, корень не удовлетворяет условию.

2) $2-\sqrt{2,5}-2+2\sqrt{2,5}=\sqrt{2,5}\geqslant 0$ – верно.

Ответ: $(2-\sqrt{2,5};\ 1-\sqrt{2,5})$; $(6;\ 2)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4.

Пусть $BC \cap EF = K$;

$BA \cap EF = N$;

$BA \cap \omega = L$;

O-центр ω;

Отметим, что если окружности ω и Ω касаются внутренним образом, что их диаметры, проходящие через точку A, лежат на одной прямой: AL-диаметр ω; AB-диаметр Ω.

$\angle BCA = 90^\circ$ (опирается на AB); $\angle BDO = 90^\circ$ (касательная $BD \perp OD$ -радиусу ω); $\angle BKN = 90^\circ$ - по условию.

Пусть $\angle DAB = \alpha$; тогда $\angle BOD = 2\alpha$ (центральный угол окружности ω); $\angle BNK = \angle BOD = 2\alpha$ как соответственные углы. Из $\triangle BKN$: $\angle KBN = 90 - 2\alpha$; из $\triangle BCA$: $\angle CAD + \alpha + (90 - 2\alpha) = 90$; $\angle CAD = \alpha$; значит, AD-биссектриса $\angle BAC$; $\breve{BE} = \breve{EC}$; $\angle BFA$ опирается на диаметр $AB \Rightarrow \angle BFA = 90^\circ$;

~~$\angle BFE = \angle AFE$ (опираются на равные дуги) $= 45^\circ$~~;

Поскольку E-середина дуги BC, то EF делит хорду BC пополам; $BK = KC = \frac{BC}{2} = \frac{17+8}{2} = 12,5$. При этом N-центр Ω, т.е. EF-диаметр Ω.

$\triangle BDO \sim \triangle BCA$ по трем углам: $\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{AB}$;

По теореме о ~~хо~~ касательной и секущей:
$BD^2 = BL \cdot BA$.

Пусть R - радиус Ω, r - радиус ω.

Имеем систему:

$$\begin{cases} \frac{17}{25} = \frac{BO}{AB} = \frac{2R-r}{2R} \\ 17^2 = (2R-2r)2R \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34R = 50R - 25r \\ 17^2 = 4R^2 - 4Rr \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16R = 25r \\ 17^2 = 4R^2 - 4Rr \end{cases}$$

$$\begin{cases} r = \frac{16R}{25} \\ 289 = 4R^2 - \frac{4 \cdot 16R^2}{25} \end{cases}$$

Решим второе уравнение:

$289 = \frac{36R^2}{25}$; $R^2 = \frac{289 \cdot 25}{36}$; $R > 0 \Rightarrow R = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$

$r = \frac{16R}{25} = \frac{16 \cdot \frac{85}{6}}{25} = \frac{16 \cdot 85}{6 \cdot 25} = \frac{8 \cdot 17}{3 \cdot 5} = \frac{136}{15}$

$\angle AFE = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha$;

Из $\triangle BCA$:

$\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{2R} = \frac{25}{2 \cdot \frac{85}{6}} = \frac{25 \cdot 3}{85} = \frac{5 \cdot 3}{17} = \frac{15}{17}$

По основному тригон. тождеству:

$\cos 2\alpha = \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{15^2}{17^2}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32}{17^2}} = \frac{8}{17}$ ($\cos 2\alpha > 0$, т.к. $2\alpha < \frac{\pi}{2}$)

Из $\triangle BCA$: $\cos 2\alpha = \frac{CA}{AB}$; $AC = AB \cdot \cos 2\alpha = \frac{85}{3} \cdot \frac{8}{17} = \frac{40}{3}$;

Из $\triangle DCA$: $tg\,\alpha = \frac{DC}{AC} = \frac{8 \cdot 3}{40} = \frac{3}{5}$; $\alpha = arctg\,\frac{3}{5}$.

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle AFE = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{3}{5}$

Поскольку EF-диаметр и N-центр Ω, то $NE = NA$, т.е. $\angle NEA = \angle NAE = \alpha$; в $\triangle EFA$: $\angle EAF = 180 - (90 - \alpha + \alpha) = 90°$; $\angle BAF = 90 - \alpha = \angle AFN$

Из $\triangle FNA$: $\angle FNA = 180 - (180 - 2\alpha) = 2\alpha$;

По т. косинусов:

$AF^2 = NF^2 + AN^2 - 2NF \cdot AN \cdot \cos 2\alpha$

$AF^2 = \left(\frac{85}{6}\right)^2 \cdot 2 - 2 \cdot 2 \cdot \frac{85}{6} \cdot \frac{8}{17}$

$AF^2 = \frac{85^2}{18} - \frac{5 \cdot 16}{3} = \frac{85^2 - 480}{18}$

$AF = \frac{\sqrt{85^2 - 480}}{3\sqrt{2}}$;

$S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} EF \cdot AF \cdot \sin(90 - \alpha)$; или:

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE$.

По т. косинусов в $\triangle EAN$: ($\angle ENA = 180 - 2\alpha$):

$EA^2 = NE^2 + AN^2 - 2NE \cdot AN \cdot \cos(180 - 2\alpha)$

$EA^2 = 2 \cdot \left(\frac{85}{6}\right)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \frac{85}{6} \cdot \frac{8}{17}$

$EA^2 = \frac{85^2}{18} + \frac{5 \cdot 16}{3} = \frac{85^2 + 480}{18}$; $EA = \frac{\sqrt{85^2 + 480}}{3\sqrt{2}}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE = \frac{\sqrt{85^2 - 480}}{3\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{85^2 + 480}}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{85^4 - 480^2}}{18}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle AEF = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{3}{5}$; $S_{\triangle AEF} = \frac{\sqrt{85^4 - 480^2}}{18}$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

~~sin 2α cos~~

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac45$

$\cos 2\beta = -\frac{4}{5\cdot 2\cdot \sin(2\alpha+2\beta)} = -\frac{2\sqrt5}{5}$

По осн. триг. тождеству: $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{20}{25}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$-\frac{2\sqrt5}{5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad|\cdot 5\sqrt5$

$-10\sin 2\alpha + 5\cos 2\alpha = -5$

$-20\sin\alpha\cos\alpha + 10\cos^2\alpha - 5 + 5 = 0$

$2\cos^2\alpha - 20\sin\alpha\cos\alpha + 4 = 0$

$\cos^2\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha + 2 = 0$

~~$\cos\alpha = \sin\alpha 5 \pm\sqrt{25\sin^2\alpha - 2}$~~

~~Возведем в квадрат:~~

~~1) $\cos^2\alpha = 25 - 10\sqrt{25\sin^2\alpha-2} + 25\sin^2\alpha - 2$~~

~~$\cos^2\alpha = 23 + 25 - 25\cos^2\alpha - 10\sqrt{25\sin^2\alpha-2}$~~

~~$-26\cos^2\alpha + 48 = 10\sqrt{25\sin^2\alpha-2}$~~

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$;

~~1) $\cos^2\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha + 25\sin^2\alpha = 25\sin^2\alpha - 2$~~

~~$\cos^2\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha + 2 = 0$~~

~~$\cos\alpha = \sin\alpha 5 \pm\sqrt{25\sin^2\alpha-2}$~~

2) $-10\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -5$

$-20\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 + 5 = 0$

$\cos^2\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha + 3 = 0$

$\cos^2\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$-2\cos^2\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$

$-3tg^2\alpha - 10tg\,\alpha - 2 = 0$

$tg\,\alpha = \frac{5\pm\sqrt{25-6}}{-3} = \frac{5\pm\sqrt{19}}{-3}$.

~~cos~~

$\cos^2\alpha - 10\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$ $\quad|:\cos^2\alpha$

$2tg^2\alpha - 10tg\,\alpha + 3 = 0$

$tg\,\alpha = \frac{5\pm\sqrt{25-6}}{2} = \frac{5\pm\sqrt{19}}{2}$. Корней ≥ 3, => проверка не нужна.

Ответ: $\frac{5-\sqrt{19}}{2}$; $\frac{5+\sqrt{19}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

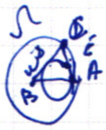
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

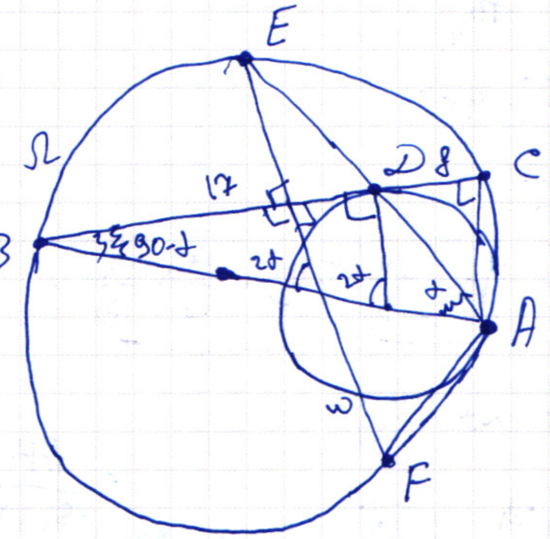
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4





$\angle AFE$ - ? R; r - ?

$S_{\triangle AEF}$ - ?

$BD^2 = BL \cdot BA$

$\frac{17}{25} = \frac{BO}{AB}$;

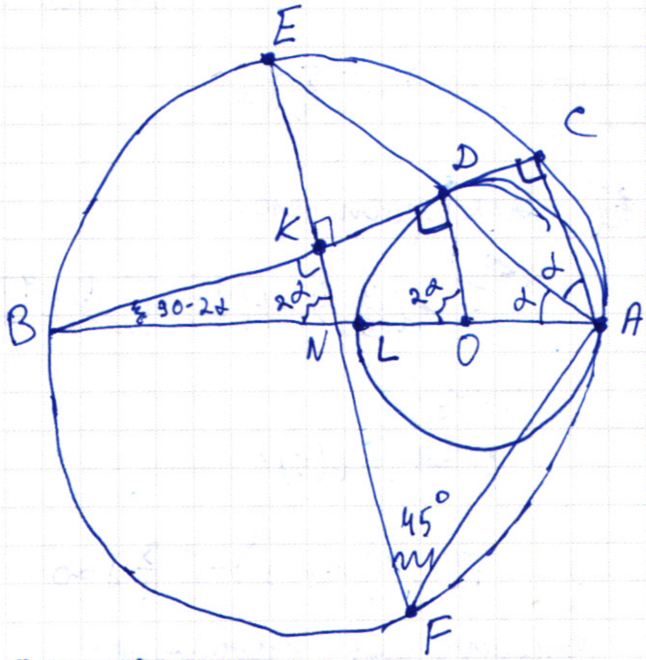
$17^2 = (2R-2r)2R$ $\frac{64}{25}R^2$

$\frac{17}{25} = 2R - r$

$\cancel{17}$ $\frac{85}{6}$

$\frac{8 \cdot 85}{25 \cdot 3}$

$\frac{\times 17}{136}$



$EF \cap BC = K$.

$BA \cap EF = N$

O - центр ω.

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{AB}$;

$\frac{17}{25} = \frac{BO}{AB}$;

N - центр Ω, т.к. $\angle EAB = \frac{1}{2}\angle BNE$.

$\boxed{\frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R}}$ 3

90-

$\alpha + 90 - 2\alpha = 90 - \alpha$

$\angle CBA = 90 - 2\alpha$; $\Rightarrow \angle DAC = CAD = \alpha$; $\overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EA} \Rightarrow BK = KC$.

$\frac{BN}{BA} = \frac{\frac{25}{2}}{25} = \frac{1}{2}$;

$\frac{BD}{BK} = \frac{17}{\frac{25}{2}} = \boxed{\frac{34}{25} = \frac{BO}{BN} = \frac{2R-r}{R}}$

$\angle EFA = 45°$. ($\angle BFA = 90°$)

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$34R = 50R - 25r$

$25r = 16R$

$\frac{R}{r} = \frac{25}{16}$

$r = \cancel{\frac{16R}{25}} \longrightarrow 289 = \frac{4 \cdot r^2 \cdot 25}{16_4} - 4 \cdot r^2$

$R = \frac{25}{16} r$

$BD^2 = BL \cdot LA$

$17^2 = 2r \cdot (2R - 2r)$

$289 = 4Rr - 4r^2$

$289 = \frac{25r^2}{4} - 4r^2$

$289 = \frac{9r^2}{4}$

$17 = \frac{3}{2} r; \ \boxed{\cancel{r = \frac{34}{3}}}; \ \boxed{\cancel{R = \frac{25}{16} \cdot \frac{34}{3}}}$

$\triangle DCA$ и α

$\angle EFA = 90 - \alpha = \angle CDA$

$\angle$

$90 - 2\alpha + \alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} =$

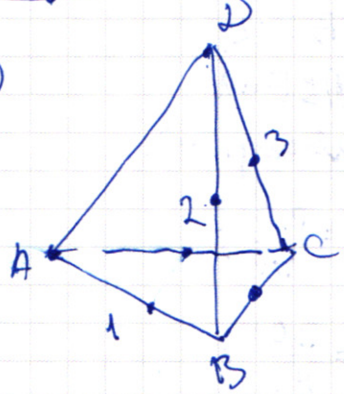
$\cos 2\alpha = \frac{AC}{BA}$

$\frac{(17^2 - 15^2)}{17^2} = \sqrt{\frac{2 \cdot 32}{17}} = \sqrt{17}$

$\frac{AF}{\sin\alpha} = 2R$

$AF = 2R\sin\alpha$

7



$\cancel{x}^{\log_{12} m} + fm \geq m^{\log_{12} 13}$

5 $f\left(\frac{20}{4}\right) = f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

Для простых:

$x<y$: $\cancel{f\left(\frac{4}{20}\right) = f\left(\frac{1}{5}\right) = \left[\frac{1}{5} \cdot \ldots\right] =}$

$x>y$:

$f\left(\frac{20}{4}\right) = f(5)$;

$f\left(\frac{15}{5}\right) = f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

Перебор для простых;

$f(24) = \underset{f(4)+f(2)}{f(8)} + f(3) = f(2) + f(2) + f(2) + f(3) =$

$= \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{2}{4}\right] + \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(6) $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$\frac{3(4x+3)+2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le$

$\boxed{x \ne -\frac{3}{4}}$

$y=3+\frac{2}{4x+3}$ - гипербола

$y=-8x^2-30x-17$ - пар. $\Leftarrow m=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{4}=-3\frac{3}{4}$

$-8x^2-30x-17=0$

$x_{1,2}=\frac{15\pm\sqrt{225-136}}{-8}=\frac{15\pm\sqrt{89}}{-8}$

$3=-\frac{2}{4x+3}$

$-2=12x+9$

$12x=-11$

$x=-\frac{11}{12}$

$y=-8\cdot\frac{225}{16}+30\cdot\frac{15}{4}-17=$

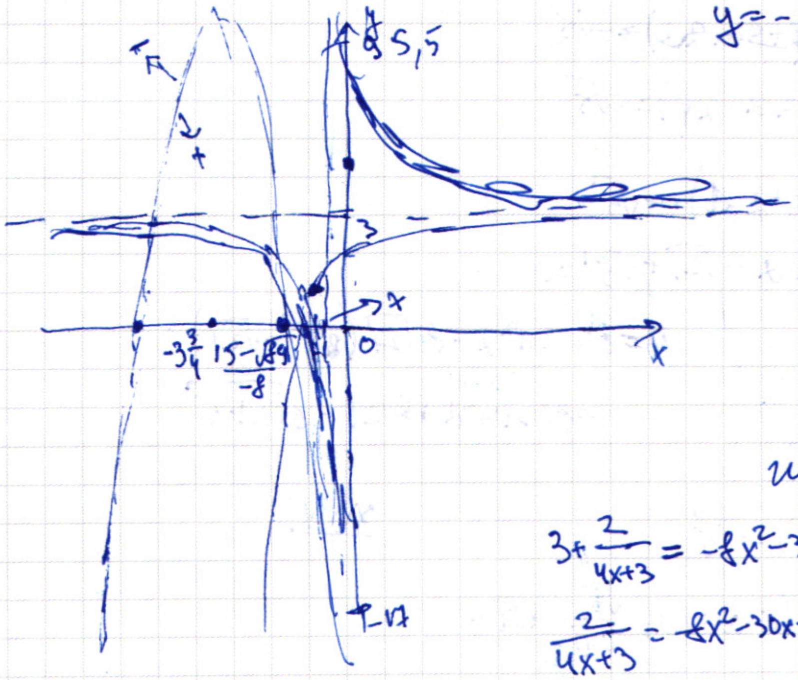
$=-\frac{225}{2}+225-17=$

$=-\frac{225}{2}+208=$

$=208-112,5=$

$=95,5$

$m: \left(-3\frac{3}{4}; 95,5\right)$



гипербола: $x=0$: $y=3+\frac{2}{3}$

$x=1$: $y=3+\frac{2}{7}$

$x=-1$: $y=3-\frac{2}{1}=1$

$y=3$ - асимптота

$x=-2$: $y=3-\frac{2}{5}$

$3+\frac{2}{4x+3}=-8x^2-30x-17$

$\frac{2}{4x+3}=-8x^2-30x-20$

$(4x+3)(-4x^2-15x-10)$

~~$2\log_{12}(x^2+18x) \ge \log_{12} 5x^2$~~

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}-(x^2+18x)^{\log_{12}13} \ge -x^2-18x$

$\log_{12}\frac{5^{\log_{12}(x^2+18x)}}{}$

① $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac45$$

$$-2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta=-\frac45$$

$$\cos2\beta=\frac45\cdot\frac{\sqrt5}{2}=\frac{2\sqrt5}{5}\ ;\quad \sin2\beta=\frac{\sqrt{21}}{5}$$

$$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\frac{2\sqrt5}{5}\sin2\alpha+\frac{\sqrt{21}}{5}\cos2\alpha=-\frac{\sqrt5}{5}$$

$$2\sqrt5\sin2\alpha+\sqrt{21}\cos2\alpha=-\sqrt5$$

$$\sqrt{41}\left(\frac{2\sqrt5}{\sqrt{41}}\sin2\alpha+\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{41}}\cos2\alpha\right)=-\sqrt5$$

$$\cancel{\cos2\varphi}\ \sin2\varphi$$

$$\cancel{\sqrt{41}\cdot\sin(2\varphi+2\alpha)=-\sqrt5}$$

$$\sqrt{41}\cdot\sin(2\alpha-2\varphi)=-\sqrt5$$

$$4\sqrt5\sin\alpha\cos\alpha+\sqrt{21}\cdot(2\cos^2\alpha-1)=-\sqrt5$$

$$2\sqrt{21}\cos^2\alpha+4\sqrt5\sin\alpha\cos\alpha-\sqrt{21}+\sqrt5=0$$

$$\cos\alpha=\frac{-4\sqrt5\sin\alpha\pm\sqrt D}{4\sqrt{21}}\ ;\quad D=80\sin^2\alpha-8\sqrt{21}(\sqrt5-\sqrt{21})=$$

$$=80\sin^2\alpha+8\cdot21-8\sqrt{21\cdot5}$$

$\sin\alpha$

$$\sqrt{41}\cos(2\varphi-2\alpha)=-\sqrt5$$

$$2\varphi-2\alpha=\pm\left(\pi-\arccos\frac{\sqrt5}{\sqrt{41}}\right)+2\pi n$$

$$\sin2\alpha\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha$$

$$-20\sin\alpha\cos\alpha+1-2\sin^2\alpha=-5$$

$$\sin^2\alpha+10\sin\alpha\cos\alpha-3=0$$

$$\sin\alpha=-5\cos\alpha\pm\sqrt{25\cos^2\alpha+3}=-5\cos\alpha\pm\sqrt{28-25\sin^2\alpha}$$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$ $tg\,\alpha-?$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac45$

$-2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta=-\frac45$

$\cos2\beta=\frac45\cdot\frac{\sqrt5}{2}=\frac{2\sqrt5}{5}$; ОТТ: $\sin2\beta=\sqrt{1-\frac{20}{25}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{\frac{2\sqrt5}{5\sin2\alpha}}\cos2\beta\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+\cos2\alpha\cdot$

$\frac{2\sqrt5}{5}\cdot\sin2\alpha+\frac{\sqrt{21}}{5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$; $|\cdot5$

$2\sqrt5\sin2\alpha+\sqrt{21}\cos2\alpha=-\frac{5}{\sqrt5}$

Доп.угол: $\sqrt{20+21}\left(\underset{\cos\varphi}{\frac{2\sqrt5}{\sqrt{41}}}\sin2\alpha+\frac{\sqrt{21}}{\sqrt{41}}\cos2\alpha\right)=-\frac{5}{\sqrt5}$

② $\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}\\x^2+9y^2-4x-18y=12\end{cases}$ ОДЗ: ~~xy-x-2y+2~~

$\begin{cases}x^2-4xy+4y^2=xy-x+2y+2\\x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25\end{cases}$

$\underset{2\cdot3\cdot3}{18}$

~~x^2+x~~ $\begin{cases}x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0\\(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2=0\\(x-2)^2+(3y-3)^2=5^2\end{cases}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2=0$

$D=1-10y+25y^2-4(4y^2+2y-2)=1-10y+25y^2-16y^2+8y+8=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_{1,2}=\frac{5y-1\pm(3y-3)}{2}=$ 1) $\frac{5y-1+3y-3}{2}=\frac{8y-4}{2}=4y-2$

2) $\frac{5y-1-3y+3}{2}=\frac{2y+2}{2}=y+2$

Подставим в (2): $(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

1) $x=4y-2$: $(4y-4)^2+(3y-3)^2=25$

$16(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$y=2$ или $y=0$

$x=6$ $x=-2$

или: ~~$16(y^2-2y+1)+9(y^2-2y$~~

$25(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=1$;

2) $x=y+2$:

$16(y)^2+9(y-1)^2=25$

$16y^2+9y^2-18y+9=25$

$25y^2-18y-16=0$

$y_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+400}}{25}=\frac{9\pm\sqrt{481}}{25}$

$\times\begin{array}{r}25\\16\end{array}$ $+\begin{array}{r}150\\25\end{array}$ 400

③ $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

ОДЗ: $x(x+18)>0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

по ОДЗ >0.

$5^{\log_{12}x(x+18)}+x^2\geq \cancel{x^{2\log_{12}13}+(18x)^{\log_{12}13}}-18$

$5^{\log m}-m^{\log 13}$

~~log~~ ~~log~~$_{12}$: $x^{2\log_{12}13}$

~~log~~$_{12}$ $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq(x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\cancel{\log_{12}(x^2+18x)}}+18$ $\log_{12}(5^{\log_{12}(x^2+18x)}\cdot x^2)\geq\log_{12}\left(\frac{(x^2+18x)^{\log_{12}13}}{18x}\right)$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)