# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина $N$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $KN$. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра $LM$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

## Задание №1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

Пусть $2\alpha + 2\beta = x$; $2\beta = y$.

Тогда $2\alpha + 4\beta = x+y$; $2\alpha = x - y$

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(x+y) + \sin(x-y) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin x\cos y + \sin y \cos x + \sin x \cos y - \sin y \cos x = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\sin x \cos y = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos y = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

Случай №1: $\sin y = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

Тогда $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$; $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

$\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 3 \\ \operatorname{tg}\alpha = -1. \end{array}\right.$

Случай №2: $\sin y = -\frac{2}{\sqrt5}$

Тогда $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$; $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 3$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$

$\operatorname{tg}\alpha = -1.$

## Задание №5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

Пусть $a = y$; $b = \frac{x}{y}$

Тогда $ab = x$, и $f(x) = f(y) + f(\frac{x}{y})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$

Если $f(\frac{x}{y}) < 0$, то $f(x) < f(y)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдем $f(a)$ для всех $2 \le a \le 25$, $a \in \mathbb{N}$, таких, что:

$a$ простое

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$a$ составное

$f(4) = 2f(2) = \cancel{1}\ 0$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(8) = 3f(2) = 0$

$f(9) = 2f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(12) = 2f(2) + f(3) = 0$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = 4f(2) = 0$

$f(18) = f(2) + 2f(3) = 0$

$f(20) = 2f(2) + f(5) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(24) = 3f(2) + f(3) = 0$

$f(25) = 2f(5) = 2$

Рассмотрим количество $x$ и количество $y$ ~~...~~ ($x, y \in \mathbb{N}$; $2 \le x, y \le 25$), ~~...~~ таких, что $f(x) < f(y)$, если: количество пар:

- $f(x) = 0$: $x$: 10; $y$: 14. 140
- $f(x) = 1$: $x$: 7; $y$: 7. 49

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$f(x)=2: \quad x: 3; \quad y: 4$ 12

$f(x)=3: \quad x: 1 \quad y: 3$ 3

$f(x)=4: \quad x: 2; \quad y: 1$ 2

$f(x)=5: \quad x: 1; \quad y: 0$ 0

Тогда общее количество пар $(x; y)$ составит:

$140+49+12+3+2+0=140+61+5=206$

Ответ: 206 пар.

Задание №2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-6-12y+6=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ (x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)-45=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $x-6=a$; $2y-1=b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\left(\frac{a}{b}\right)+36=0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=9 \\ \frac{a}{b}=4 \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ a^2+9b^2=90 \\ a-6b\geq 0 \\ ab\geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=9b \\ a=4b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=90 \\ a-6b\geq 0 \end{cases}$$

$a$ и $b$ одного знака, условие $ab\geq 0$ выполняется

Случай №1: $a=9b$

$$\begin{cases} a=9b \\ 81b^2+9b^2=90 \\ 9b-6b\geq 0 \end{cases}$$

Случай №2: $a=4b$

$$\begin{cases} a=4b \\ 16b^2+9b^2=90 \\ 4b-6b\geq 0 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} a = 9b \\ 90b^2 = 90 \\ b \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 9b \\ \left[\begin{array}{l} b = 1 \\ b = -1 \end{array}\right. \\ b \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b = 1 \\ a = 9. \end{cases}$

$\begin{cases} a = 4b \\ 25b^2 = 90 \\ 4b - 6b \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 4b \\ b^2 = \frac{9 \cdot 10}{25} \\ -2b \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} a = 4b \\ \left[\begin{array}{l} b = \frac{3\sqrt{10}}{5} \\ b = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right. \\ b \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} b = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ a = -\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$

$\begin{cases} x - 6 = 9 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 15 \\ 2y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$

~~$\begin{cases} x - 6 = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ 2y - 1 = -\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} x = \frac{6 - 3\sqrt{10}}{5} \\ 2y = \frac{1 - 12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$~~

~~$\begin{cases} x = \frac{6 - 3\sqrt{10}}{5} \\ y = \frac{1 - 12\sqrt{10}}{10} \end{cases}$~~

~~Ответ: $(15; 1)$; $\left(\frac{6 - 3\sqrt{10}}{5}; \frac{1 -}{}\right.$~~

Случай №2 (продолжение):

$\begin{cases} x - 6 = \frac{-12\sqrt{10}}{5} \\ 2y - 1 = \frac{-3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{6 - 12\sqrt{10}}{5} \\ 2y = \frac{1 - 3\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \frac{6 - 12\sqrt{10}}{5} \\ y = \frac{1 - 3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$

Ответ: $(15; 1)$; $\left(\frac{6 - 12\sqrt{10}}{5}; \frac{1 - 3\sqrt{10}}{10}\right)$

Задание № 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$y_1 = \frac{16x-16}{4x-5}$

$y_1 = \frac{16x-20+4}{4x-5}$

$y_1 = 4 + \frac{4}{4x-5}$

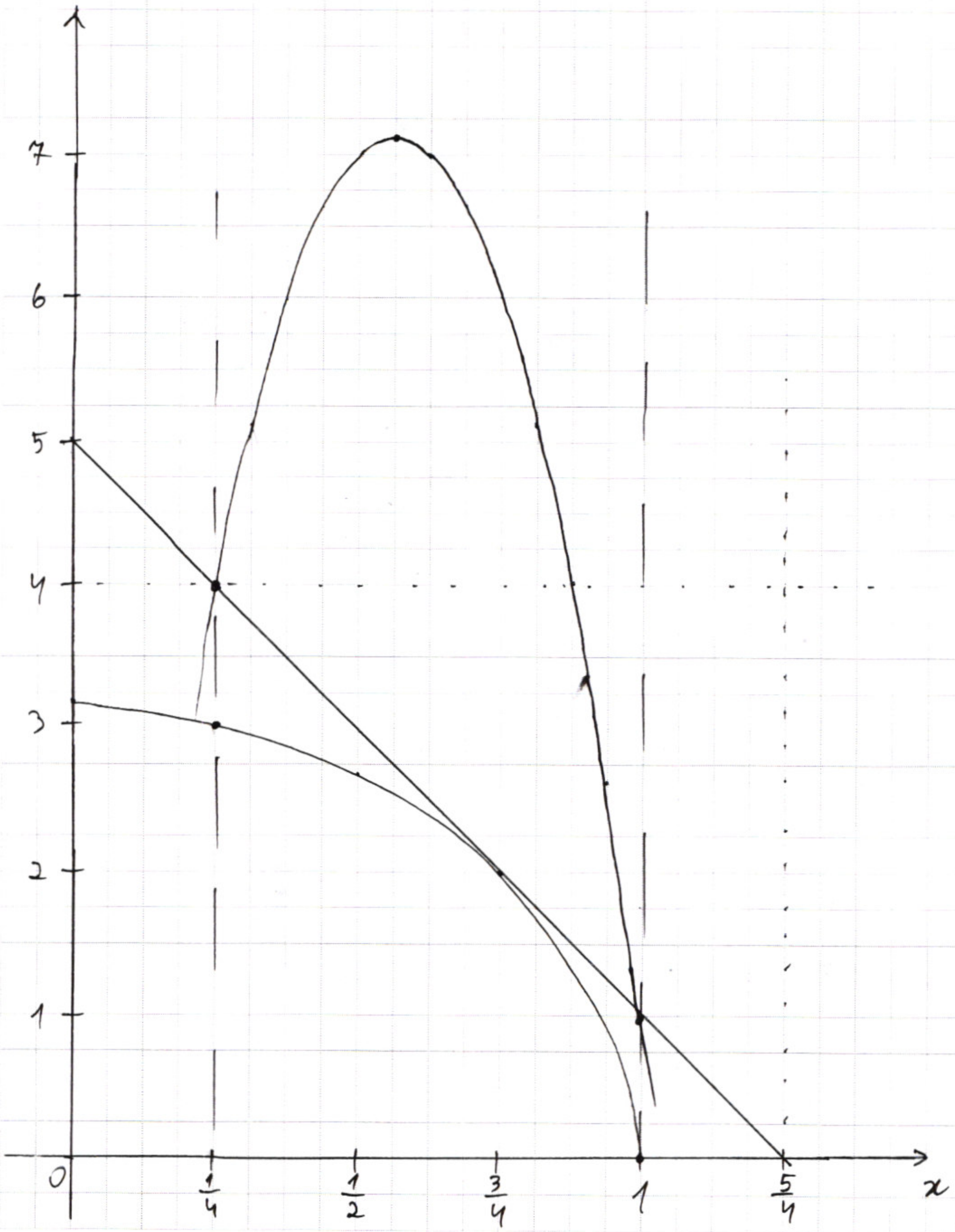
$y_1 = \frac{1}{x-\frac{5}{4}} + 4$

$y_2 = ax+b$

$y_3 = -32x^2+36x-3$

$y_3 = -32\left(x-\frac{9}{16}\right)^2 + \frac{81}{8} - 3$

$y_3 = -32\left(x-\frac{9}{16}\right)^2 + 7\frac{1}{8}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чтобы выполнялось неравенство, необходимо, чтобы отрезок прямой $y=ax+b$ в диапазоне $x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$ лежал под графиком функции $y=-32x^2+36x-3$ и над графиком функции $y=\frac{16x-16}{4x-5}$

~~$y=$~~ $\frac{16\cdot\frac{1}{4}-16}{4\cdot\frac{1}{4}-5}=\frac{4-16}{1-5}=\frac{-12}{-4}=3$

$y=\frac{16x-16}{4x-5}$ пересекает прямую $x=\frac{1}{4}$ в т. $\left(\frac{1}{4};3\right)$

$\frac{16\cdot1-16}{4\cdot1-5}=\frac{0}{4-1}=0$

$y=\frac{16x-16}{4x-5}$ пересекает прямую $x=1$ в т. $(1;0)$

$-32\cdot\frac{1}{16}+36\cdot\frac{1}{4}-3=-2+9-3=4$

$y=-32x^2+36x-3$ пересекает прямую $x=\frac{1}{4}$ в т. $\left(\frac{1}{4};4\right)$

$-32\cdot1+36\cdot1-3=-32+36-3=1.$

$y=-32x^2+36x-3$ пересекает прямую $x=1$ в т. $(1;1)$

Значит, концы отрезка прямой $y=ax+b$ должны лежать на отрезках, соединяющих точки $\left(\frac{1}{4};3\right)$ и $\left(\frac{1}{4};4\right)$; $(1;0)$ и $(1;1)$.

Рассмотрим самый „высоко" расположенный из таких отрезков: соединяющий точки $\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $(1;1)$.

Тогда $a=-4$; $b=5$ (из графика).

~~Проверим~~ Проверим неравенства:

$(-4x+5)-(-32x^2+36x-3)=32x^2-40x+8=$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

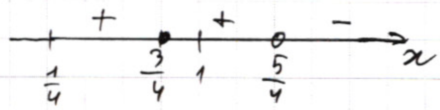
$= 4x^2 - 5 + 1 = (4x-1)(x-1)$

$(4x-1)(x-1) \le 0$ при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$, значит, при этих $x$ неравенство $-4x+5 \le -32x^2+36x-3$ верно.

$$(-4x+5) - \frac{16x-16}{4x-5} = -\left(\frac{(4x-5)^2+16x-16}{4x-5}\right) = -\left(\frac{16x^2-40x+25+16x-16}{4x-5}\right) =$$

$$= -\left(\frac{16x^2-24+9}{4x-5}\right) = -\frac{(4x-3)^2}{4x-5} = \frac{(4x-3)^2}{5-4x}$$

$\frac{(4x-3)^2}{5-4x} \ge 0$




В диапазоне $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ неравенство верно.

При $x = \frac{3}{4}$ $\frac{(4x-3)^2}{5-4x} = 0$, значит $-4x+5 = \frac{16x-16}{4x-5}$

Прямая $-4x+5$ касается графика $y = \frac{16x-16}{4x-5}$

Значит, никакие отрезки, расположенные „ниже" выбранного, не подходят, так как они будут пересекать график $y = \frac{16x-16}{4x-5}$ (см. рисунок).

Значит, $a = -4$; $b = 5$ — единственное решение.

Ответ: $(-4; 5)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

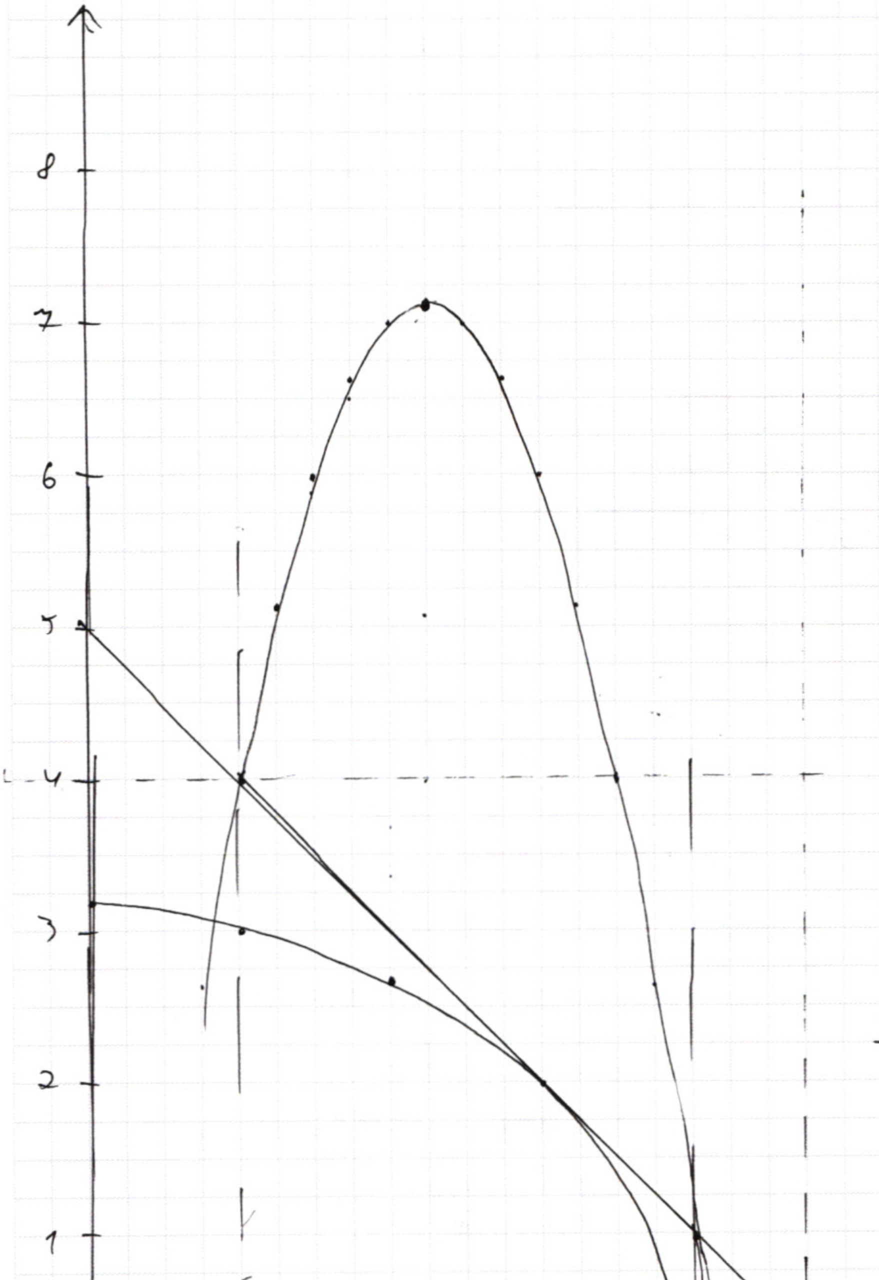
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{5}{4} = -\frac{3}{4}$ $\quad$ $\frac{3}{4} - 1\frac{1}{4} = \frac{3}{4} - \frac{5}{4} = \frac{1}{2}$ $\quad \cdot \frac{4}{5}$




$a = -4; \quad b = 5.$

$\frac{16x - 16}{4x - 5} + 4x - 5 = 0$

$\frac{16x + 16x^2 - 40x + 25 - 16}{4x - 5} = 0$

$16x^2 - 24x + 9 = 0$

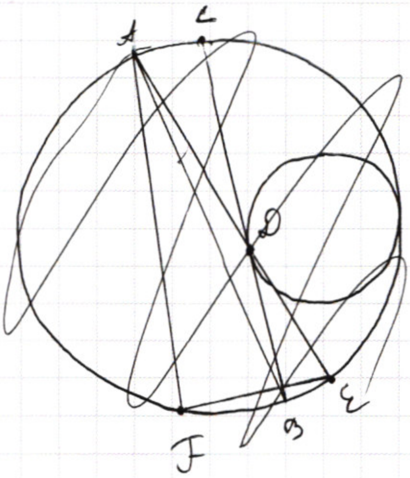
$(4x - 3)^2 = 0$

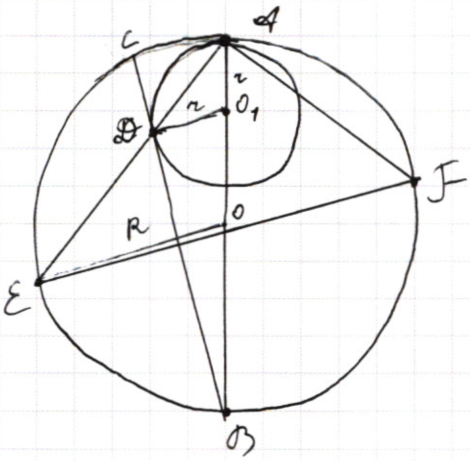
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)




$AD = x \quad AE = \frac{R}{r}x$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$$

$$AD \cdot DE = CD \cdot BD$$

$$x \cdot \left(\frac{R}{r}x - x\right) = \frac{17 \cdot 15}{4}$$

$$x^2\left(\frac{R-r}{r}\right) = \frac{17 \cdot 15}{4}$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 6 - 12y + 6 = \sqrt{2y(x-6) - (x-6)} \\ (x^2 - 12x + 36) + (36y^2 - 36y + 9) - 45 = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

$a - 6b = \sqrt{ab}$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0.$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\left(\frac{a}{b}\right) + 36 = 0$

$t^2 - 13t + 36 = 0$

$(t-9)(t-4) = 0$

1) $a = 9b$

$81b^2 + 9b^2 = 90$

$90b^2 = 90$

$b^2 = 1$

$\begin{cases} b = \pm 1 \\ a = \pm 9 \end{cases}$

19

2) $a = 4b$

$16b^2 + 9b^2 = 90$

$25b^2 = 90$

$b = \pm \frac{3\sqrt{10}}{5}$

$a = \pm \frac{12\sqrt{10}}{5}$

невозможно:

$a - 6b \quad 4b - 6b = -2b$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $2\alpha + 2\beta = x$;

$2\beta = y$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(x+y) + \sin(x-y) = -\frac{2}{5}$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x + \sin x \cos y -$

$- \sin y \cos x = 2 \sin x \cos y = -\frac{2}{5}$

$\begin{cases} \sin x \cos y = -\frac{1}{5} \\ \sin x = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$ $\cos y = \frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

1. $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{-1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5} \sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2 \sin\alpha \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -1$

$3\cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 \sin^2\alpha = 0$

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

$tg^2\alpha + 2 tg\alpha - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 1 \\ tg\,\alpha = -3 \end{array}\right.$

2. $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$ $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5} \sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5} \cos 2\alpha = -\frac{1}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha - \cancel{\cos 2\alpha}$ $\quad 2\cos 2\alpha = -1$

$\cancel{2\sin}$ $\quad 2\cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 1$

$2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 1$

$\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$3\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha - 1 = 0$

$tg\,\alpha = -1$

$tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

Ответ: $1;\ -1;\ -3;\ \frac{1}{3}.$

$32^{\log_2 4} = 32^2 = 2^{10}$

3) $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} + (10x - x^2) \geq 0$

$(10x - x^2)\left((10x - x^2)^{\log_3 4 - \log_3 3} - (10x - x^2)^{\log_3 5 - \log_3 3} + 1\right) \geq 0$

2). $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 6 = a \\ 2y - 1 = b \end{cases}$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$

$(a - 6b)^2 = ab$

$a^2 - 12ab + 36b^2 = ab$

$\cancel{(a-b)^2 = ab}$

$\cancel{a^2 - 2ab + b^2 = ab}$

$\cancel{a^2 - 3ab + b^2 = 0}$

$a^2 + 9b^2 + $

$3ab + 8b^2 = 90$

$a^2 = 90 - 9b^2 = 9(10 - b^2)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{a^2 - 12ab + 36b^2 = ab}$$

$$\cancel{90 - 9b^2 - 13\sqrt{9(10-b^2)}\,b + 36b^2 = 0}$$

$$\cancel{27b^2 + 90 - 39b\sqrt{10-b^2} = 0}$$

б) $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$$\frac{16x-16}{4x-5} - (ax+b) = \frac{16x - 4ax^2 + 5ax - 4bx + 5b - 16}{4x-5} =$$

$$\cancel{= \frac{-4ax^2 + (5a - 4b + 16)x + (5b-16)}{4x-5} =}$$

$$\cancel{= \frac{4ax^2 - 5a}{}}$$

$$y_1 = \frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x - 1\frac{1}{4}}$$

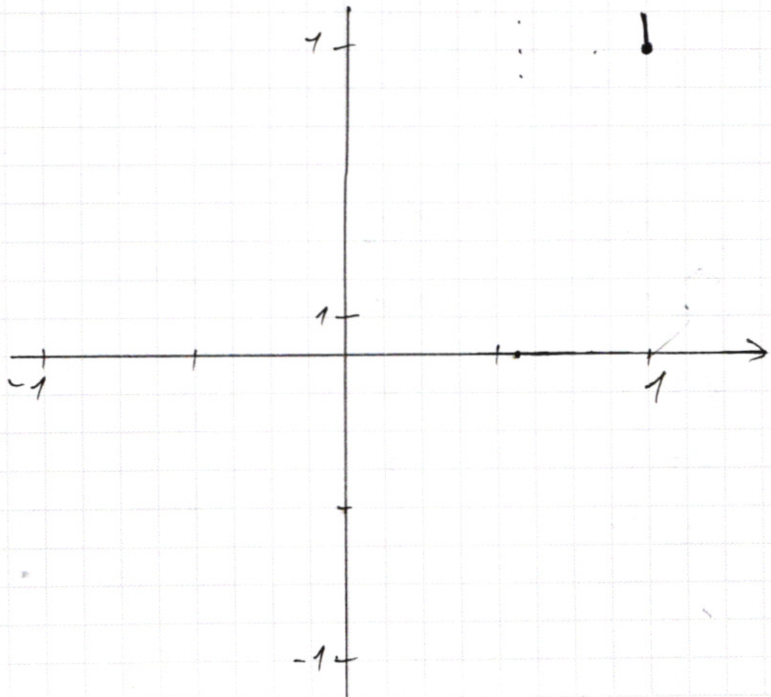
$$y_2 = ax + b$$

$$\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{81}{8} = 10\frac{1}{8}$$

$$y_3 = -32x^2 + 36x - 3 = -32\left(x - \frac{9}{16}\right) + 10\frac{1}{8} - 3 = -32\left(x - \frac{9}{16}\right) + 7\frac{1}{8}$$

$$32\left(x - \frac{9}{16}\right)^2 = 32\left(x^2 - \frac{9}{8}x + \frac{81}{256}\right) = -32x^2 + 36x - \frac{81}{8}$$




$-32 \cdot 1 + 36 \cdot 1 - 3 =$

$-32 + 36 - 3 = 1$

$-32 \cdot \frac{1}{4}$

$-32 \cdot \frac{1}{16} + 36 \cdot \frac{1}{4} - 3 =$

$= -2 + 9 - 3 = 4$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

5) $f(a\,b) = f(a) + f(b)$

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$\underline{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y).}$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = \left[\frac{1}{2}\right] = 0$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(8) = 3f(2) = 0$

$f(9) = 2f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(12) = 2f(2) + f(3) = 0$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = 4f(2) = 0$

$f(18) = f(2) + 2f(3) = 0$

$f(20) = 2f(2) + f(5) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(24) = f(12) + f(2) = 0$

$f(25) = 2f(5) = 2.$

$f(x) < f(y)$

$f(x) = 0$: $x = 10$; $y = 14$ $\quad 140 +$

$f(\cancel{x}) = 1$: $x = 7$ $\quad y = 7$ $\quad 49 +$ $\quad 189$

$f(y) = 2$: $x = 3$; $\quad y = 4$ $\quad 12 +$ $\quad 201$

$f(x) = 3$; $x = 1$ $\quad y = 3$ $\quad 3 +$ $\quad 204$

$f(x) = 4$; $x = 2$ $\quad y = 1$ $\quad 2$ $\quad 206.$

Ответ: 206 пар.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)