МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $tg\alpha = ?$

Решение:

1) Замена: $x = 2\alpha+2\beta$.

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(x+2\beta)+\sin(x-2\beta) = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\sin x\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = -\frac{\cancel{2}\cdot\sqrt{17}}{17\cdot\cancel{2}\cdot(-1)} = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ (из О.Т.Т.)

2): $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

(1): $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\Big|\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1.$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha - 4 = -1.$ $\Big| : \cos^2\alpha$ ($\cos\alpha\neq 0$, т.к. $0+0-4\neq-1$.)

$2tg\alpha + 8 - \frac{3}{\cos^2\alpha} = 0$

$2tg\alpha + 8 - 3\cdot(tg^2+1) = 0$ $\frac{1}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha+1$ (сл. из О.Т.Т)

$-3tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0$ $-3tg^2\alpha+5tg-3tg\alpha+5=0$

~~$-tg^2\alpha+5=0$~~ $(-3tg\alpha+5)\cdot(tg\alpha+1)=0$

~~$tg^2\alpha = -5$ (Ø). $tg^2\alpha=5 \Rightarrow tg\alpha=\pm\sqrt{5}$.~~ $=0 \Rightarrow tg\alpha = \frac{5}{3}$

$tg\alpha = -1$

(2): $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$: $\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1.$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 8\cos^2\alpha + 4 = -1.$ $\Big| : \cos^2\alpha$ ($\cos\alpha\neq0$, т.к. $0-0+4\neq-1$).

$2tg\alpha - 8 + \frac{5}{\cos^2\alpha} = 0$

$2tg\alpha - 8 + 5(tg^2\alpha+1) = 0.$

$2tg\alpha - 3 + 5tg^2\alpha = 0.$

$5tg^2\alpha + 5tg\alpha - 3tg\alpha - 3 = 0$

$(5tg - 3)\cdot(tg\alpha+1) = 0.$

$tg\alpha = \frac{3}{5}.$ $tg\alpha = -1.$

Ответ: $tg\alpha = -1$

$tg\alpha = \frac{3}{5}$

$tg\alpha = \frac{5}{3}$

№2.

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45 \end{cases}$$

Замена: $b = y-6$, $a = x-1$

$9x^2+y^2-18x-12y = (3x-3)^2+(y-6)^2 = 90.$

☐ черновик   ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$y-6x = b+\cancel{6}-6a-\cancel{6} = b-6a$; $\sqrt{(x-1)\cdot(y-6)} = \sqrt{ab}$

$ab \geq 0$, $b-6a \geq 0$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

(1): $b^2-12ab+36a^2-ab=0$.
$b^2-13ab+36a^2=0$
$(b-9a)\cdot(b-4a)=0$.

$b=9a$
$b=4a$.

(2): $b=9a \Rightarrow 90a^2=90 \Rightarrow a=\pm 1 \Rightarrow b=\pm 9 \to$ уд. только $a=1; b=9$
$b=4a \Rightarrow 25a^2=90 \Rightarrow a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow b=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5}$ т.к. $-9+6<0$.

$\Downarrow$ уд. только $a=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$; $b=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$.

Обр. замена:
$x-1=a \Rightarrow x=a+1$: 2; $\frac{5-3\sqrt{10}}{5}$
$y-6=b \Rightarrow y=b+6$: 15; $\frac{30-12\sqrt{10}}{5}$.

Ответ: $(2;15)$, $\left(\frac{5-3\sqrt{10}}{5}; \frac{30-12\sqrt{10}}{5}\right)$.

№ 3.

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0 \Rightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$. замена: $a=26x-x^2$

$a^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5 a}$

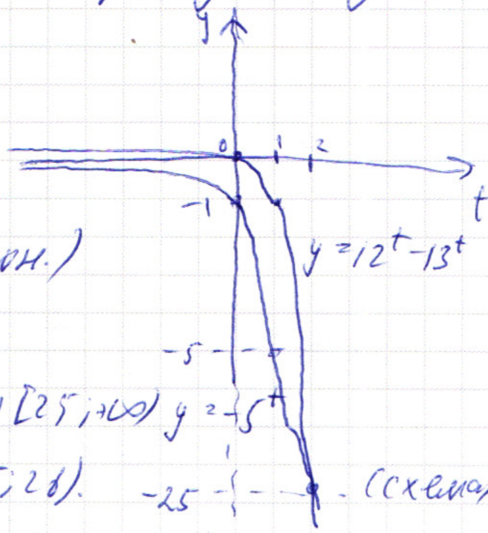
$12^{\log_5 a}-13^{\log_5 a} \geq -a^{\log_5 5} \Rightarrow \geq -5^{\log_5 a}$

$t=\log_5 a \Rightarrow 12^t-13^t \geq -5^t$

$26x-x^2>0$
$x^2-26x<0$
$x\cdot(x-26)<0$
$\Downarrow$
$(0;26)$.

$y=12^t-13^t$ — монотонно убывает Оде показ. функц
$y=-5^t$ — монотонно убывает $\Rightarrow$ пересекутся в одной точке.

$13^t=12^t+5^t \to t=2$
$\Downarrow$
$t\leq 2$.
$\Downarrow$
$\log_5 a \leq 2$ $2=\log_5 25$
$4\cdot(a-25)\leq 0$ (рацион.)
$a\leq 25$.



Обр. зам.: $26x-x^2\leq 25$
$x^2-26x+25\geq 0$
$(x-25)\cdot(x-1)\geq 0 \Rightarrow (-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

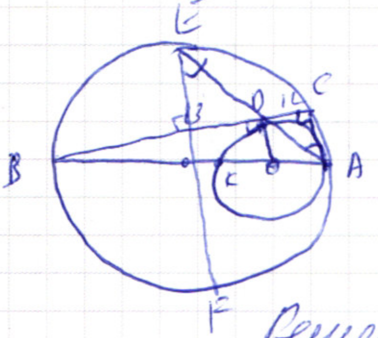
с уч. $26x-x^2>0 \Rightarrow (0;1]\cup[25;26)$.

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Дано: Ω, ω – окр. $\Omega \cap \omega$ = т. A. AB – диам. $AD \cap \Omega$ = т. E, ℓ – F $\perp$ BC. CD = 12, BD = 13.

Найти: 1) r, R = ? 2) $\angle AFE$ = ? 3) S_{AEF} = ?

Решение:

1) $\angle BCA = 90°$ (т.к. опир. на AB)

$\angle BDO = 90°$ (т.к. угол между кас. и радиусом) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDO \sim \triangle BCA$ (т.к. $\angle B$ – общий, по 2 углам) $\Rightarrow \frac{BO}{BD} = \frac{BA}{BC}$

$BO = 2R - r \quad AB = 2R \Rightarrow \frac{2R - r}{13} = \frac{2R}{25} \quad 26R = 50R - 25r$

$24R = 25r \Rightarrow r = \frac{24}{25} R$

2) По т. о кв. кас.:

$BD^2 = BK \cdot BA = 2R \cdot (2R - 2r) = 4R^2 - 4Rr = 169$

$4R^2 - 4 \cdot R \cdot \frac{24}{25} R = 169. \qquad \frac{4R^2}{25} = 169 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{169 \cdot 25}{4}} = 32{,}5$

$r = \frac{24}{25} \cdot 32{,}5 = 31{,}2$

3) $\angle AEF = \angle CAD$ (как накрест леж. при $AC \parallel EF$ (т.к. $\angle EBC = 90°$)).

$tg \angle CAD = \frac{12}{AC} = \frac{12 \cdot 13}{25 r} = \frac{\cancel{12} \cdot 13}{25 \cdot \cancel{31{,}2}_{2{,}4}} = 0{,}2.$

$\underset{\alpha}{\angle AEF} = arctg(0{,}2). \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{0{,}04 + 1} = \frac{1}{1{,}04}.$

$\sin^2\alpha = \frac{0{,}04}{1{,}04}$

$\sin\alpha = \frac{0{,}2}{\sqrt{1{,}04}} = \frac{0{,}2}{\sqrt{0{,}04 \cdot 26}} = \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$

Ответ: $\angle A\cancel{E}E$ $\quad R = 32{,}5$

$r = 31{,}2$

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [p/4]$ $\quad x, y \in \mathbb{N}$

для простого. $(x;y)$: $4 \le x \le 28$
$4 \le y \le 28$

$ab \to xy$ - ~~сложное~~
(составное) число. $\Rightarrow f(ab) \ne \left[\frac{ab}{4}\right]$. $f(x/y) < 0$

Простые числа из промежутка: 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

$f(5) = 1$. $\quad f(17) = 4$
$f(7) = 1$ $\quad f(19) = 4$ $\quad f(5) = f(7) = 1$.
$f(11) = 2$ $\quad f(23) = 5$.
$f(13) = 3$ $\quad f(35) = 2$.

№6.

$\frac{8-6x}{3x-2} \ge ax+b \ge 18x^2 - 51x + 28$ $\qquad x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$$\begin{cases} ax+b \le \frac{8-6x}{3x-2} \\ ax+b \ge 18x^2-51x+28 \end{cases}$$

$\cancel{18x^2 - (51+a)x + 28 - b \le 0}$

$\frac{3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b - 8 + 6x}{3x-2} \le 0$

$\cancel{D = (51+a)^2 - 4\cdot(28-b)\cdot 18 =}$
$\cancel{= 2601 + 102a + a^2 - 2016 + 72b = 0}$
$585 + 102a + a^2 + 72b = 0$.

$x = 2$: $\quad x \ne \frac{2}{3}$.
$\frac{-4}{4} \ge 2a + b \ge \underset{(-2)}{72 - 102 + 28}$

$-1 \ge 2a + b \ge -2$

$x \to \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{8-6x}{3x-2} \to \infty$ $\qquad 18\cdot\frac{4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$.

$\cancel{ax+b}$ $\quad \frac{2}{3}a + b \ge 2$

$$\begin{cases} \begin{cases} 2a+b \le -1 & b \le -1-2a \\ 2a+b \ge -2 & b \ge -2-2a \end{cases} \\ \frac{2}{3}a + b \ge 2 & b \ge 2 - \frac{2}{3}a \end{cases}$$

$-\frac{6x-8}{3x-2} - b \ge ax \ge 18x^2 - 51x + 28 - b$

$-\left(2 - \frac{4}{3x-2}\right) - b \ge ax \ge 18x^2 - 51x + 28 - b$

$\frac{4}{3x-2} - 2 - b \ge ax \ge 18x^2 - 51x + 28 - b$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

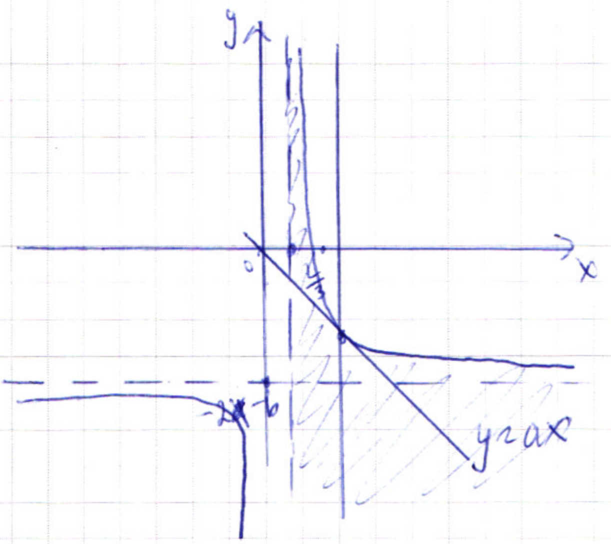


Схема для задачи 6.

$y = ax <$ гиперболы.

$y = ax = \frac{8-6x}{3x-2} - b$

$0 = \frac{8-6x-3bx+2b-3ax^2+2ax}{3x-2}$

$3ax^2 - (2a-3b-6)x - 2b - 8 = 0$

$y = 18x^2 - 51x + 28 - b =$

$= 18\cdot\left(x^2 - \frac{17}{6}x + \frac{14}{9}\right) - b =$

$= 18\left(\left(x-\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{17^2}{144} + \frac{14}{9}\right) - b = 18\cdot\left(x-\frac{17}{12}\right)^2 + 18\cdot\frac{224-289}{144} - b =$

$= 18\cdot\left(\left(x-\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{65}{144}\right) - b = 18\left(x-\frac{17}{12}\right)^2 - \frac{65}{8} - b$

$x = \frac{17}{12} \Rightarrow y = -\frac{65}{8} - b$

$3ax^2-2ax+3bx-2b-8+6x$

$3ax^2-(2a-3b-6)x-(2b+8)=0.$

$D=(2a-3b-6)^2+3a\cdot4\cdot(2b+8)=4a^2-6ab-12a-\cancel{6}ab+9b^2+18b-$

$-12a+18b+36=4a^2-12ab+9b^2+36b-24a+36$

$(2a-3b)^2$

$(2a-6)^2+\ldots 3b\cdot(\ldots 12b+3b-12a)$

$36b-24a+36>0$

$3b-2a+3>0.$

$\boxed{a<\frac{3b+3}{2}}$

$x=\frac{2a-3b-6+}{}$

$\frac{8-6x}{3x-2}=-\frac{6x-8}{3x-2}=-\left(2-\frac{4}{3x-2}\right)=\frac{4}{3x-2}-2.\ y=\frac{4}{3x-2}$

$18x^2-51x+28=0.=6x^2-17x+\frac{28}{3}=0.\quad x^2-\frac{17}{6}x+\frac{28}{18}=0.$

$D=2601-4\cdot18\cdot28=585.$

$\left(x-\frac{17}{12}\right)^2-\frac{65}{144}=0.$

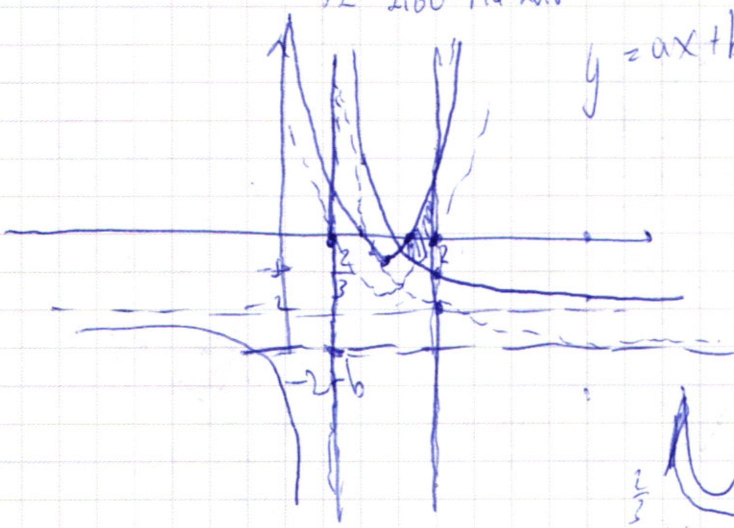
72 2160-144=2016

$\frac{28}{18}-\frac{289}{144}=\frac{224-289}{144}=$

$38\cdot8=$

$=-\frac{65}{144}.$

$y=ax+b.$



$t=\frac{1}{b}$

$f(at)=f(t)+f(a)=$

$=f(a)+f\left(\frac{1}{b}\right)$

$f(at)<0.$

$f(a)+f\left(\frac{1}{b}\right)<0.$

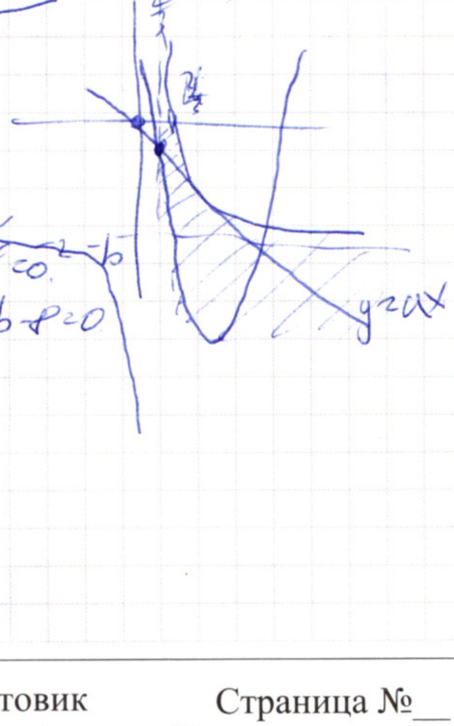
$\frac{8-6x}{3x-2}\ 18x^2-51x+28=$

$=3\cdot18.$

$ax=\frac{8-6x}{3x-2}-b.$

~~$\frac{8-6x-3bx+2b-3ax^2+2ax}{3x-2}=0.$~~

$3ax^2+x\cdot(3b+6-2a)-2b-8=0$



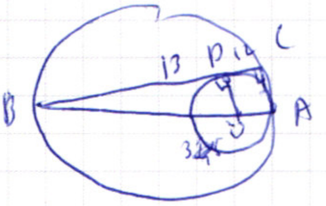
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$169 = 4Rr\ 4R\ (2R-2r)\cdot 2R = 4R^2 - 4Rr.$

$\left(\frac{R5}{13}r\right)^2 +$ $\quad \frac{2R-r}{13} = \frac{2R}{25}$

$169 = 4R^2 - \frac{96R^2}{25}$ $\quad 50R - 25r = 26R.$

$24R = 25r$

AB = 65.

AO = 62,4.

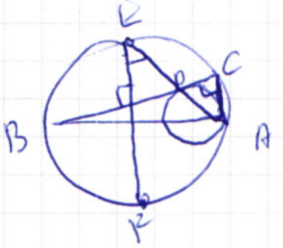
$\frac{4R^2}{25} = 169.$ $\quad R = \frac{13\cdot 5}{2} = 32{,}5.$ $\quad r = \frac{24}{25}R.$

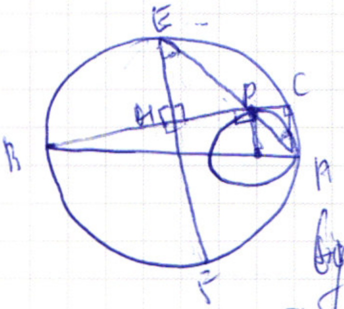
$\frac{BO}{BP} = \frac{BA}{BC}$ $\quad \frac{65-31{,}2}{13} = \frac{65}{25}.$ $\quad r = \frac{24}{25}\cdot 32{,}5 = \frac{325\cdot 24}{10\cdot 25} = \frac{240+72}{10} = 31{,}2.$

13 25

$\frac{33{,}8}{13} = \frac{13}{5}.$ $\quad 169 = 169.$

$\begin{cases} r = 31{,}2. \\ R = 32{,}5. \end{cases}$

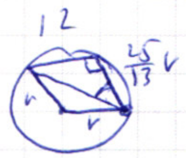




r = 31,2 $\quad \frac{r}{x}$ $\quad tg\alpha = \frac{CD}{AP}$

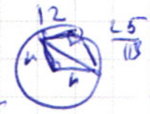
$tg\alpha = \frac{DH}{EH}.$ $\quad$ EH $\quad tg\alpha =$

CDX.



$\frac{EH}{AC} =$

$tg\alpha\ \frac{12\cdot 13}{25r} = \frac{12\cdot 13}{25\cdot 31{,}2} = 0{,}2$



$S_{AEF} = \sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\cdot EF\cdot AE.$ $\quad \alpha = arctg(0{,}2).$

$f \in Q. > 0.$ $\quad f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [p/4].$

$18x^2 - 51x + 28 \le \frac{8-6x}{3x-2}.$

$\frac{54x^3 - 36x^2 - 153x^2 + 102x + 84x - 56 - 8 + 6x}{3x-2} \le 0$

$\frac{54x^3 - 189x^2 + 192x - 64}{3x-2} \le 0$

2.

54 − 189 + 192 − 64

432 − 756 + 384 − 64

816. 60

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$b^2-13ab+36a^2=0$

$D=9a^2-36a^2\cdot 4$. $9a^2-144a=9(a^2-16)$

$a\geq 4$.

$b=\frac{3a+3\sqrt{a^2-16}}{2}$

$b=\frac{3a-3\sqrt{a^2+16}}{2}$

$9a^2+\frac{9\cdot(a^2+2a\sqrt{a^2-16}+a^2-16)}{4}=90$. 10. $|\cdot 4$.

$\times\frac{28}{28}$ 224 56 784

$4a^2+2a^2+2a\sqrt{a^2-16}-16=40$.

$\boxed{3a^2\geq 28}$

$28\cdot 28=784$

$6a^2-56=2a\sqrt{a^2-16}$ $|:2$

$3a^2-28=a\sqrt{a^2-16}$

$a=x-1$ $x=a+1$

$b=y-6$. $y=b+6$

$y-6x=b+6-6a-6=b-6a$.

$9a^4-168a^2+784=a^4-16a^2$.

$8a^4-152a^2+784=0$. $|:8$

$a^4-19a^2+98=0$

$D=361-98\cdot 4=$

$360+32=392$.

$9a^2+b^2=90$.

$b-6a=\sqrt{ab}$

$b^2-13ab+36a^2=0$.

$D=169a^2-144a^2=25a^2$,

$b=\frac{13a+5a}{2}=9a$

$b=\frac{13a-5a}{2}=4a$.

$9a^2+81a^2=90$.

$a=1$; -1.

$a=1$ — не уд.

$b=9$; -9.

$9a^2+16a^2=90$

$a^2=\frac{90}{25}$. $a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}\Rightarrow b=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5}$

$\boxed{b-6a\geq 0}$

$ab\geq 0$ — один знак $a=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$; $b=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$.

уд.

Обр. замена: $x-1=1\Rightarrow x=2$.

$y-6=9\Rightarrow y=15$

уд.

$x=\frac{5-3\sqrt{10}}{5}$

$y=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}$

Ответ: две пары

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26-x^2)}$

$26x-x^2>0\Rightarrow x^2-26x<0$.

$x\cdot(x-26)<0$

$\boxed{(0;26)}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26-x^2)}$

$(-a)^{\log_5 5}=5^{\log_5 -a}=5^{-\log_5 a}=5^{-\log}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}-(26-x^2)^{\log_5 13}\geq x^2-26x$

$a^{\log_5 12}-a^{\log_5 13}\geq(-a)^{\log_5 5}$

$12^{\log_5 a}-13^{\log_5 a}\geq 5^{\log_5 a}$.

$\frac{1}{5^{-\log_5 a}}$

$12^t-13^t\geq 5^t$

>1 >1.

$13^t>12^t$. 5^t

$12^t-13^t\geq\left(\frac{1}{5}\right)^t$

$12^t-13^t\geq 5^{-t}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

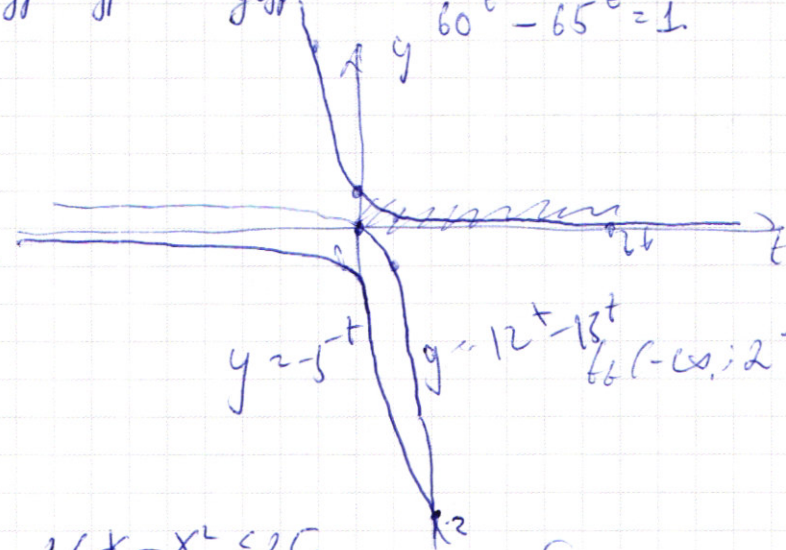
(Нумеровать только чистовики)

$12^t - 13^t \geq \left(\frac{1}{5}\right)^t$

убыв. убыв. возр.

$12^t - 13^t = \left(\frac{1}{5}\right)^t$

$60^t - 65^t = 1$



$t \in (-\infty; 2]$

$a^{\log_5 12} - a^{\log_5 13} \geq -a$

$\geq -(a^{\log_5 1}$

$\frac{1}{12} - \frac{1}{13} =$

$-a = -(a^{\log_5 5})$

$+\begin{array}{r} 78996024 \\ 159676376 \\ \hline 238672400 \end{array}$

$12^t - 13^t \geq -5^t$

$\log_5 a \leq 2$

$\log_5 a - \log_5 25 \leq 0$

$4 \cdot (a - 25) \leq 0$

$a \leq 25$

$26x - x^2 \leq 25$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$(x - 25) \cdot (x - 1) \geq 0$

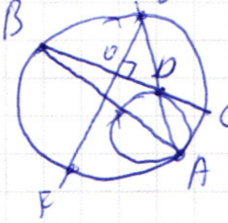
$(x > 0,\ x < 26)$

0 1 25 26

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$.

$4 \to 218$

$\times\begin{array}{r} 381876 \\ 625 \\ \hline 1909380 \\ 763752 \\ 2291256 \\ \hline 238672400 \\ - 159676376 \\ \hline 78996024 \end{array}$



№4.

$r_1, r_2, \angle AFE, S_{AEF} = ?$

$CD = 12, BD = 13$

$\times\begin{array}{r} 888 \\ 8 \\ \hline 6400 + 640 + 64 = 7104 \end{array}$

$BD \cdot DC = ED \cdot DA = 156$

$BC = 25$

$BD^2 = BX \cdot AB = (AB - AX) \cdot AB = (2R - 2r) \cdot 2R$

$4R^2 - 4Rr - 169 = 0$

$D_1 = 4 + 4 \cdot 169 = 800 = 2$

$400 + 360 + 36 = 796$

$BC^2 + AC^2 = 4R^2$

$\begin{cases} 4R^2 - 4Rr = 169 \\ 4R^2 = \frac{625}{169} r + 625 \end{cases}$

$BC^2 + AC^2 =$

$+\begin{array}{r} 8900 \\ 8900 \\ \hline 801 \\ 712 \\ \hline 7921 \end{array}$

$\times\begin{array}{r} 8880 \\ 8880 \\ \hline 7104 \\ 7104 \\ 7104 \\ \hline 788544 \end{array}$

$\frac{r}{AC} = \frac{13}{25} \Rightarrow AC = \frac{25}{13} r$

$r^2 = \frac{(4R^2 - 625) \cdot 169}{625}$

$r = \frac{13}{25}\sqrt{4R^2 - 625}$

$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} - \cancel{r^2} = 169$

$4R^2 - 4R \cdot \frac{13}{25}\sqrt{4R^2 - 625} = 169$

8882

$4R^2 - 169 = \frac{52R}{25}\sqrt{4R^2 - 625}$

$8 \cdot 169 = 1280 + 72 = 1352$

$\frac{2604R^2}{625} \cdot (4R^2 - 625) = 8R^4 - 1352R^2 + 28561$

$\times\begin{array}{r} 169 \\ 169 \\ \hline 1521 \\ 1014 \\ 169 \\ \hline 28561 \end{array}$

$\times\begin{array}{r} 28561 \\ 5416 \\ \hline 171366 \\ 28561 \\ 114244 \\ 142805 \\ \hline 154676366 \end{array}$

$\left(\frac{10416R^2}{625} - 8\right)R^4 - 1252R^2 - 28561 = 0$

$1000 < x < 10000$

$8000 < x < 9000$

$\frac{5416}{625}R^4 - 1252R^2 - 28561 = 0$

$\times\begin{array}{r} 8800 \\ 8800 \\ \hline 704 \\ 704 \\ \hline 77440000 \end{array}$

$D_1 = (626)^2 - \frac{5416}{625} \cdot 28561 =$

$\times\begin{array}{r} 626 \\ 626 \\ \hline 3756 \\ 1252 \\ 3756 \\ \hline 381876 \end{array}$

$\frac{381876 \cdot 625 - 159676376}{625} = \frac{78996024}{625}$

$\times\begin{array}{r} 8812 \\ 8812 \\ \hline 17624 \\ 8812 \\ 70496 \\ 70496 \\ \hline 77651344 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

(1) $\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 = -\sin^2 2\alpha - \cos^2 2\alpha = -\sqrt{17}\sin 2\alpha \cos 2\beta - \sqrt{17}\cos 2\alpha \sin 2\beta$

$\sin^2 2\alpha + \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 0$

$D = 1 - 4\cdot(4\cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha) = 1 - 16\cos 2\alpha - 4\cos^2 2\alpha$

$D \geq 0: \quad 4t^2 + 16t - 1 = 0. \quad t = \cos 2\alpha$

$D_1 = 16 + 4 = 20 = 1$

$tg 2\alpha^2 + \frac{tg 2\alpha}{\cos 2\alpha} + 4\cos 2\alpha = 0 \qquad \frac{1}{\cos^2 2\alpha} = tg^2 2\alpha + 1.$

$\cos 2\alpha = \sqrt{\frac{1}{tg^2 2\alpha + 1}}$

$tg 2\alpha \cdot D = \frac{1}{\cos^2 2\alpha} - 4\cdot 4\cos 2\alpha.$

$\cos^2 2\alpha + t^2 + 4t + \sin 2\alpha + \sin^2 2\beta$

$D_1 = 4 - \sin^2 2\alpha - \sin 2\alpha$

$tg 2\alpha + 4 = -\sqrt{17}\, tg 2\alpha \cdot \cos 2\beta - \sqrt{17}\sin 2\beta$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}. \quad \sin 2\beta = \mp\frac{4}{\sqrt{17}}$

(1): $tg 2\alpha + 4 = -tg 2\alpha - 4.$

$2 tg 2\alpha = -8. \quad tg 2\alpha = -4 = \frac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$4tg^2\alpha - 4 = 2tg\alpha$

$4tg^2\alpha - 2tg\alpha - 4 = 0.$

$D_1 = 1 + 4\cdot 4 = 17 = 1 \quad tg\alpha = \frac{1+\sqrt{17}}{4}$

$tg\alpha = \frac{1-\sqrt{17}}{4}.$

(2): $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} - \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} =$

Задача 2.

$y - 6x = \sqrt{(x-1)\cdot(y-6)}.$

$xy - 6x - y + 6 = (x-1)\cdot(y-6).$

$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90.$

$9x^2 - 18x + 9 - 9 + y^2 - 12y + 36 - 36 = 45.$

$(3x-3)^2 \quad (y-6)^2$

$\boxed{(x-1)\cdot(y-6) \geq 0}$

$\boxed{y - 6x \geq 0}$

$y^2 - 12x + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$a = x - 1$

$b = y - 6.$

$b + 6 - 6a - 6$

$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 90. \end{cases}$

$b^2 - 36ab + 6a$

$b^2 - 12ab + 36a^2 = ab$

$b^2 - 13ab + 36a^2 = 0. = 90 - 9a^2 - b^2.$

$2b^2 - 13ab + 9a^2 + 36a - 90 = 0.$

$b - 6a$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$2\alpha+2\beta$ (в III и IV) $\Rightarrow \pi < 2\alpha+2\beta < 2\pi$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$ $\frac{\pi}{2} < \alpha+\beta < \pi$

$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta$

$\sin 2\alpha\cdot(\cos^2 2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin 2\beta\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{17} \Rightarrow -2\sin^2(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{17}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha + 2\sin^2(2\alpha+2\beta) = 0$.

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha + 2\sin^2 2\alpha\cos^2 2\beta +$

$+4\cdot\sin 2\alpha\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta + 2\sin^2 2\beta\cos^2 2\alpha = 0$. $|:\cos 2\alpha$

$\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta + \operatorname{tg} 2\alpha + 2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha +$

$+ 4\operatorname{tg}\alpha\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta + 2\sin^2 2\beta\cdot\cos 2\alpha = 0$.

$x = 2\alpha+2\beta \Rightarrow \sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. $\sin(x+2\beta)$ $\sin(x-2\beta)$

x 4β

$\sin(x+2\beta) + \sin(x-2\beta) = -2\sin^2 x$.

60   $\beta=30$. $\sin(120)+\sin 0 = 0$.

$\underline{\sin x\cdot\cos 2\beta} + \cancel{\cos x\cdot\sin 2\beta} + \underline{\sin x\cdot\cos 2\beta} -$ $\cancel{2\cos x\cdot\sin\alpha}$.

$\cancel{-\sin 2\beta\cdot\cos x} = -2\sin^2 x = 2\sin x\cos 2\beta$

$2\sin x(\cos 2\beta + \sin x) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = 0 \text{ — не уд. усл.}\\ \cos 2\beta + \sin x = 0.\end{array}\right.$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$.

$2\beta \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}};\ -\frac{4}{\sqrt{17}}$.

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

(1): $\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cdot\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\left|\cdot\frac{\sqrt{17}}{\cos 2\alpha}\right.$

~~$\operatorname{tg} 2\alpha + 4 =$~~

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$.

не может быть

$\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 45^\circ$

$\sin 2\alpha = 1$

$\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)