

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leq x \leq 25$, $2 \leq y \leq 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $[\frac{1}{4}; 1]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN . Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$(1) \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (2) \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

из (2):

$$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$2 \sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta - \sin 2\alpha + 2 \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta) = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{5} \quad \downarrow \text{подставляем (1)}$$

$$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

из (2):

~~$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$~~

~~$$\frac{1}{\sqrt{5}} \sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$~~

~~$$\pm 2 \cos 2\alpha - \sin 2\alpha = 1$$~~

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

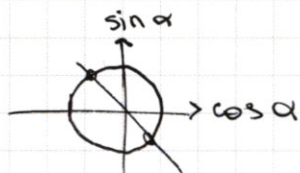
$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{5} \pm \frac{2}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = -1^* \\ \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \end{cases}$$

* $\sin 2\alpha = -1 \quad 2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k$



$\text{tg } \alpha = -1$

**

$\sin 2\alpha = \frac{3}{5} \quad \cos 2\alpha = \pm \frac{4}{5}$

$\text{tg } 2\alpha = \pm \frac{3}{4} \quad \text{tg } 2\alpha = \frac{2\text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha}$



$$\begin{cases} -\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\text{tg}^2 \alpha = 2\text{tg } \alpha \\ -\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\text{tg}^2 \alpha = 2\text{tg } \alpha \end{cases} \quad \begin{cases} \text{tg}^2 \alpha + \frac{8}{3}\text{tg } \alpha - 1 = 0 \text{ (a)} \\ \text{tg}^2 \alpha - \frac{8}{3}\text{tg } \alpha - 1 = 0 \text{ (b)} \end{cases}$$

$\left. \begin{matrix} \text{tg } \alpha = -3 \\ \text{tg } \alpha = \frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \text{ по Т. Виета из (a)}$

$\left. \begin{matrix} \text{tg } \alpha = 3 \\ \text{tg } \alpha = -\frac{1}{3} \end{matrix} \right\} \text{ по Т. Виета из (b)}$

Ответ: $\{-1; \pm \frac{1}{3}; \pm 3\}$

N5

Найдём значения $F(a)$ для $a \in [2; 25]$, $a \in \mathbb{Z}$, где простых a по формуле $F(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, где составных по формуле $F(ab) = F(a) + F(b)$, где F от простых a мы нашли

$$\left. \begin{matrix} F(2) & F(3) & F(4) & F(6) & F(8) \\ F(9) & F(12) & F(16) & F(18) & F(24) \end{matrix} \right\} = 0 \quad \text{всего 10 чисел}$$

$$\left. \begin{matrix} F(5) & F(7) & F(10) & F(15) & F(14) \\ F(21) & F(20) \end{matrix} \right\} = 1 \quad \text{всего 7 чисел}$$

$$F(13) = 3 \quad \text{всего 1 число}$$

$$F(19) + F(17) = 4 \quad \text{всего 2 числа}$$

$$F(11) + F(22) + F(25) = 2 \quad \text{всего 3 числа}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 продолжение

$$F(23)$$

$$= 5$$

всего 1 число

Затем, из формулы $F(ab) = F(a) + F(b)$

$$F(a) = F(a^2 \cdot \frac{1}{a}) = F(a \cdot a) + F(\frac{1}{a}) = F(a) + F(a) + F(\frac{1}{a})$$

$$F(\frac{1}{a}) = -F(a)$$

$$F(xy) = F(x) + F(\frac{1}{y}) = F(x) - F(y) < 0$$

$$F(x) < F(y)$$

При $F(x) = 0$ $F(y) > 0$ всего число пар: $10 \cdot 14 = 140$

При $F(x) = 1$ $F(y) > 1$ число пар: $7 \cdot 7 = 49$

При $F(x) = 2$ $F(y) > 2$ число пар: $3 \cdot 4 = 12$

При $F(x) = 3$ $F(y) > 3$ число пар: $1 \cdot 3 = 3$

При $F(x) = 4$ $F(y) > 4$ число пар: $2 \cdot 1 = 2$

При $F(x) = 5$ $F(y) > 5$ таких пар при $x \in [2; 25]$
и $y \in [2; 25]$ нет

$$\text{Итого: } 140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 206$$

Ответ: 206

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & (1) \\ (x - 6)^2 + 6(y - \frac{1}{2})^2 = 90 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12xy - x + 6 \\ x - 12y \geq 0 \end{cases}$$

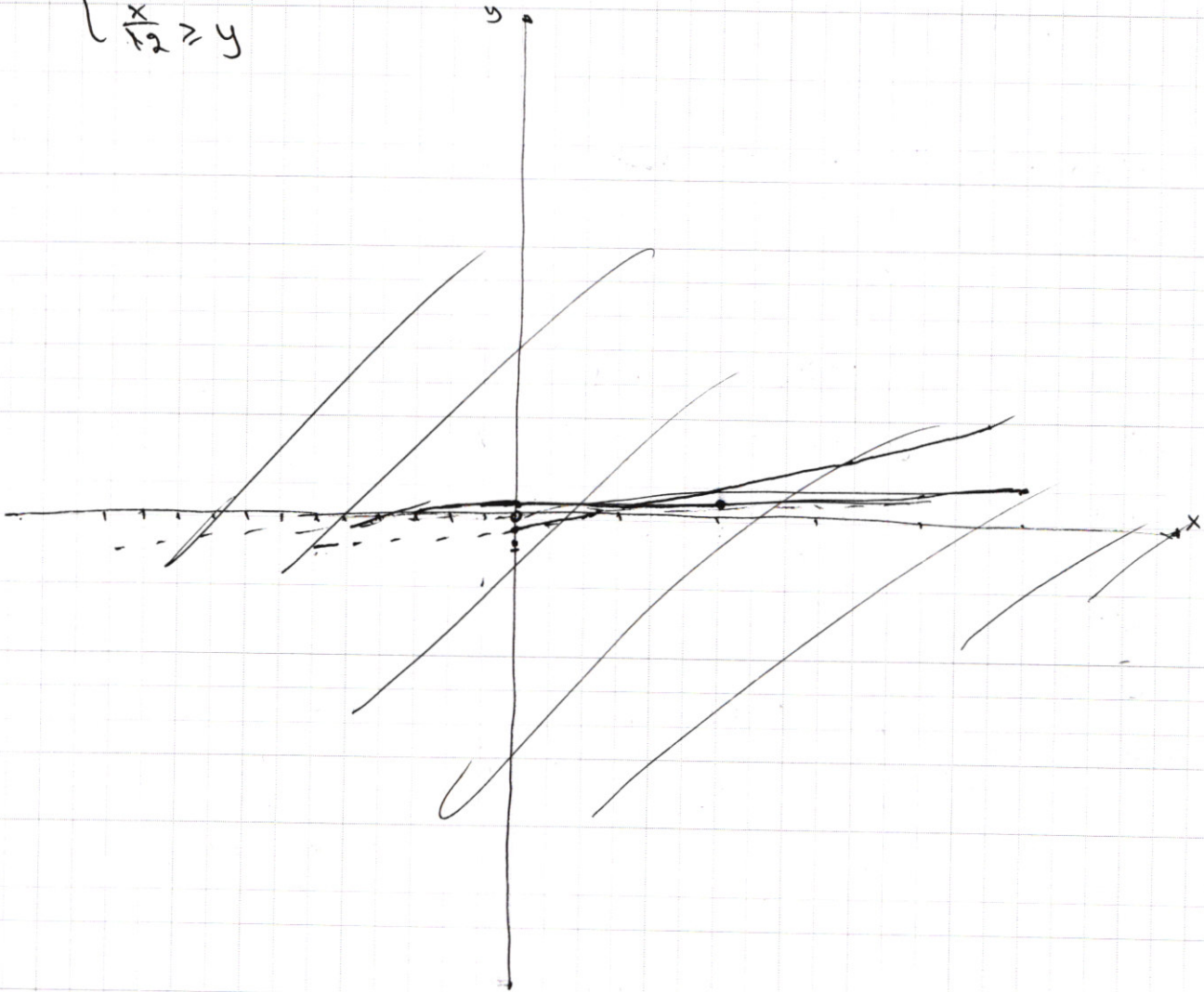
$$\begin{cases} x^2 - 26xy + x + 144y^2 + 12y - 6 = 0^* \\ \frac{x}{12} \geq y \end{cases}$$

$$* D = (1 - 26y)^2 - 4 \cdot 144y^2 - 4 \cdot 12y + 24 = 1 - 52y + 676y^2 - 576y^2 - 48y + 24 = 25 - 100y + 100y^2 = (5 - 10y)^2$$

$$x = \frac{26y - 1 \pm (5 - 10y)}{2}$$

$$x_1 = 8y + 2 \quad x_2 = 18y - 3$$

$$(1) \begin{cases} y_1 = \frac{x}{8} - \frac{1}{4} \\ y_2 = \frac{x}{18} + \frac{1}{6} \\ \frac{x}{12} \geq y \end{cases}$$



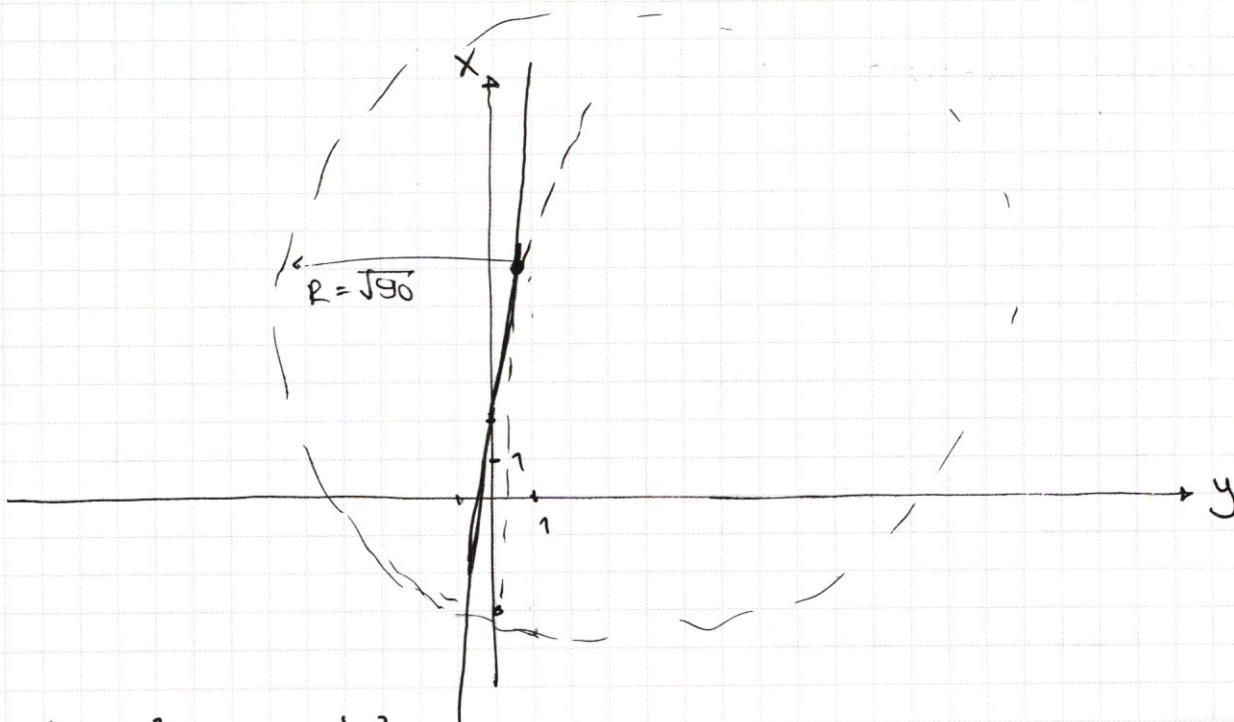
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 продолжение

$$(1) \begin{cases} x = 8y + 2 \\ x = 18y - 3 \\ x \geq 12y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8y + 2 \\ 8y + 2 \geq 12y \\ x = 18y - 3 \\ 18y - 3 \geq 12y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 8y + 2 \\ y \leq \frac{1}{2} \\ x = 18y - 3 \\ y \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$(x - 6)^2 + 6(y - \frac{1}{2})^2 = 90$$

$$\begin{cases} (8y - 4)^2 + 6(y - \frac{1}{2})^2 = 90 \\ (18y - 9)^2 + 6(y - \frac{1}{2})^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(4y^2 - 4y + 1) + 6(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 90 \\ 81(4y^2 - 4y + 1) + 6(y^2 - y + \frac{1}{4}) = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 70y^2 - 70y + 16\frac{6}{4} = 90 \\ 110y^2 - 110y + 27\frac{1}{2} = 30 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 70y^2 - 70y - 72\frac{1}{2} = 0 \\ 110y^2 - 110y - 2\frac{1}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 140y^2 - 140y - 145 = 0 \\ 220y^2 - 220y - 5 = 0 \end{cases}$$

$$\frac{D_1}{4} = 70^2 + 140 \cdot 145 = 70(70 + 145 \cdot 2) = 70 \cdot 360 = (60\sqrt{7})^2$$

$$\frac{D_2}{4} = 110^2 + 5 \cdot 220 = 110(110 + 10) = 110 \cdot 120 = (20\sqrt{33})^2$$

$$y_1 = \frac{70 \pm 60\sqrt{7}}{110 - 70} = y_1 = 1 \mp \frac{6}{7}\sqrt{7} \text{ (из графика)}$$

$$y_2 = \frac{110 \pm 20\sqrt{33}}{110} = y_2 = 1 + \frac{2}{11}\sqrt{33} \text{ (из графика)}$$

$$x_1 = 8y_1 + 2 = 8 - \frac{48}{7}\sqrt{7} + 2 = 6 - \frac{48}{7}\sqrt{7}$$

$$x_2 = 18y_2 - 3 = 18 + \frac{36}{11}\sqrt{33} - 3 = 15 + \frac{36}{11}\sqrt{33}$$

$$\text{Ответ: } \left(6 - \frac{48}{7}\sqrt{7}; 1 - \frac{6}{7}\sqrt{7}\right) \cup \left(1 + \frac{2}{11}\sqrt{33}; 15 + \frac{36}{11}\sqrt{33}\right)$$

N3

$$10x + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3 (10x - x^2)$$

$$10x - x^2 + |10x - x^2| \log_3 4 \geq (10x - x^2) \log_3 5 \quad 10x - x^2 > 0 \Rightarrow$$

$$\text{Замена } a = 10 - x^2 \quad a > 0 \quad \Rightarrow |10x - x^2| = 10x - x^2$$

$$\begin{cases} a + a \log_3 4 \geq a \log_3 5 \\ a > 0 \end{cases}$$

$$\text{Замена } a = 3^m \quad m = \log_3 a$$

$$3^m + 4^m \geq 5^m \text{ - верно при } m \leq 2$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a \leq 9 \end{cases} \quad \begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-\infty; 0) \cup (10; +\infty) \cup (0; 10) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \end{cases}$$

$$\text{Ответ: } (0; 1] \cup [9; 10)$$

N6

$$f_1(x) = \frac{16x - 16}{4x - 5} = 4 + \frac{4}{4x - 5} \text{ - шипербол } \quad f_1\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \quad f_1(1) = 0$$

$$f_2(x) = -32x^2 + 36x - 3 \text{ - парабола } \quad \text{и}$$

$$x_0 = \frac{9}{16} \quad y_0 = -\frac{32 \cdot 81}{2 \cdot 28 \cdot 82} + \frac{36 \cdot 81}{2 \cdot 82} - 3 = \frac{81}{2} - 3 = \frac{75}{2}$$

$$f_2(1) = 1 \Rightarrow f_2\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

$O_1D \parallel EF$ как перпендикулярные BC

$\angle FEA = \angle O_1DA$ как соотв. при пар. прямых

$\angle O_1AD = \angle O_1DA$ т.к. $\triangle O_1DA$ - р/с \triangle $\angle FBA = \angle FEA$ как

$\angle FAB = 90^\circ - \angle FBA = 90^\circ - \angle FEA$ как опущ на отку
гузу

$\angle FAE = \angle FAB + \angle O_1AD = 90^\circ - \angle FEA + \angle FEA = 90^\circ$

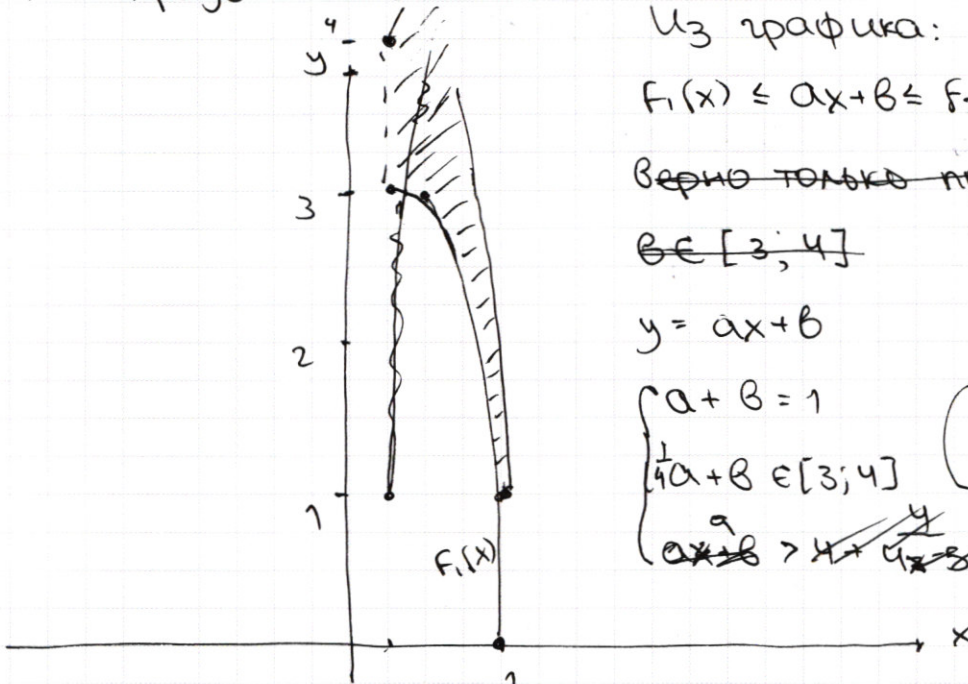
↓

FE - диаметр $FE = 2R = 34$

Ответ: $\frac{15 \cdot 17}{16}$; 17; 90° ; 34

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 продолжение



Из графика:

$$f_1(x) \leq ax + b \leq f_2(x)$$

Верно только при $a=0$

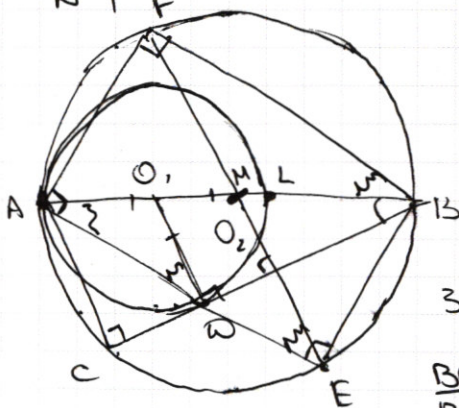
$$b \in [3; 4]$$

$$y = ax + b$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ \frac{1}{4}a + b \in [3; 4] \\ ax + b > 4 + \frac{4}{x} \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} b = 1 - a \\ \frac{1}{4}a + 1 - a = 1 - \frac{3}{4}a \in [3; 4] \\ a > \left(\frac{4}{4-5}\right)^2 \\ a > 4 \end{array} \right\}$$

$$\frac{3}{4}a \in [-3; \frac{3}{4}a \in [-3; -2] \Rightarrow \text{таких пар нет} \quad \text{Ответ: } \emptyset$$

№4 F



Решение:

1. AB проходит через O_1 - центр ω

ω как диаметр через м. касания

2. $O_1 B D \sim A B C$ по 2 углам

3. Пусть $BL = x$, тогда

$$\frac{BD}{BA} = \frac{x+r}{x+2r} = \frac{17}{32} = \frac{BD}{BC} \quad 2r = 15x$$

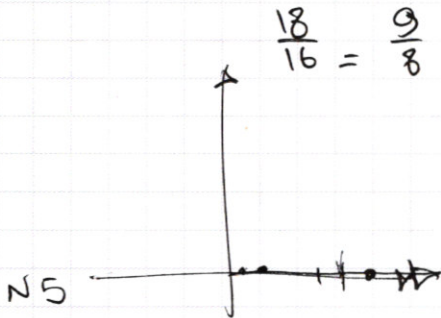
4. По Т. о касат. и секущ. где BD, BA и ω :

$$x(x+2r) = \frac{17^2}{4} \quad x \cdot 16x = \frac{17^2}{4} \quad x = \frac{17}{2 \cdot 4} = \frac{17}{8}$$

$$r = \frac{15}{2}x = \frac{15 \cdot 17}{16} \quad R = \frac{2r+x}{2} = 8x = 17$$

$$\left. \begin{aligned} 10x + 1x^2 - 10x \log_3 4 &\geq x^2 + 5 \log_3 (10x - x^2) \\ 10x - x^2 + 10x - x^2 \log_3 4 &\geq x^2 + (10x - x^2) \log_3 5 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} 10x - x^2 &> 0 \\ x &\in (0; 10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a + a \log_3 4 &\geq a \log_3 5 \\ 1 + a \log_3 \frac{4}{3} &\geq a \log_3 \frac{5}{3} \\ 1 &\geq a \log_3 \frac{5}{3} - \log_3 a \log_3 \frac{4}{3} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 4 + \frac{4}{4x-5} &= -32x^2 + 36x - 3 \\ -32 \cdot \frac{1}{16} + \frac{36}{4} - 3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(x/y) = F(x) + F(1/y) &= \left[\frac{x}{4} \right] + \left[\frac{1}{4y} \right] \\ &= \left[\frac{2}{4}; \frac{25}{4} \right] \left[\frac{1}{8}; \frac{25}{8} \right] \end{aligned}$$

N2

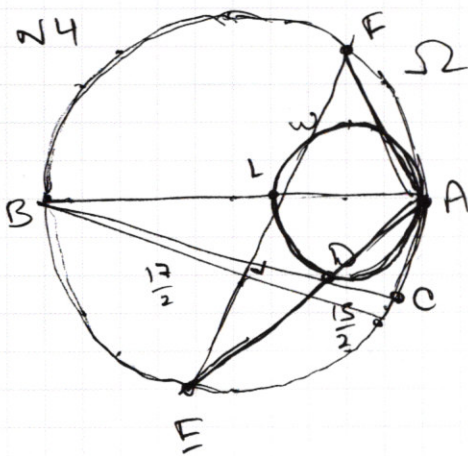
$$x^2 - 24yx + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$$

$$x^2 - 26xy + 144y^2 = (x+12y) + 6$$

$$(x-18y)(x-8y) = (x+12y) + 6$$

$$x^2 + 36xy^2 - 12x - 36y = 45$$

$$\begin{array}{r} 144 \overline{)18} \\ \underline{6} \\ 18 \\ \underline{18} \\ 0 \end{array} \quad \begin{aligned} x \cdot 18 &= 3 \cdot 3 \cdot 2 \\ &\cdot 8 \end{aligned}$$



$R_2, R_w - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$

$$BL \cdot BA = BL \cdot 2R = \left(\frac{17}{2} \right)^2$$

$$-\frac{32 \cdot 81}{8 \cdot 8} + \frac{36 \cdot 9}{8 \cdot 2} - 3$$

$$a + b = 7$$

$$\frac{1}{4}a + b = 3$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$- \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$- \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot 2 \cos^2 2\beta - \sin 2\alpha + 2 \cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \cos 2\beta \sin 2\beta = -\frac{1}{5}$$

$$\cancel{\sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta} + \cancel{\cos 2\alpha} \cos 2\beta (\sin(2\alpha + 2\beta)) = -\frac{1}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \sin 2\beta = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin^2 \beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

~~tg 2α~~

$$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta) \cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta) \sin 2\beta$$

$$+ \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$-\frac{1}{5} \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -1 \quad 2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \quad \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k \\ \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \quad \boxed{\text{tg } \alpha = \pm 1} \end{array} \right.$$

$$\cos 2\alpha \text{ tg } 2\alpha = \frac{3}{4}$$

$$\text{tg } 2\alpha = \frac{2 \text{tg } \alpha}{1 - \text{tg}^2 \alpha} = \frac{3}{4} \quad \text{tg } 2\alpha = \frac{3}{4} \text{ tg } \alpha$$

$$\text{tg}^2 \alpha + \frac{3}{3} \text{tg } \alpha - 1 = 0$$

$$\boxed{\left[\begin{array}{l} \text{tg } \alpha = -3 \\ \text{tg } \alpha = \frac{1}{3} \end{array} \right]}$$

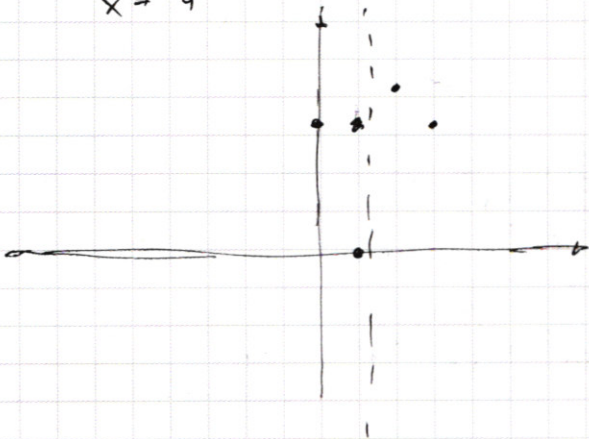
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

~~18~~ 9
16 8

$$\frac{16(x-1)}{4(x-1)-1} \leq ax+b \leq \frac{9}{8} \quad 32(-x^2 + \frac{9}{8}x - \frac{3}{32})$$

$x = \frac{5}{4}$



№5

$$F(2) = F(3) = 0 \quad F(6) = 0 \quad F(21) = 1$$

$$F(5) = F(7) = 1 \quad F(10) = 1 \quad F(15) = 1$$

$$F(11) = 2 \quad F(13) = 3 \quad F(17) = F(19) = 4$$

$$F(23) = 5$$

№2

x^2

$$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$$

$$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$$

$$y^2 - y + \frac{1}{4}$$

$$36(y - \frac{1}{2})^2$$

$$x^2 - 24xy + y^2 \cdot 144 = 2xy - 12y - x + 6$$

$$x^2 - 26xy + x + 12y + y^2 \cdot 144 - 6 = 0$$

$$x^2 + x(1-26y) + 12y + 144y^2 - 6 = 0$$

$$D = (1-26y)^2 - 48y - 144y^2 \cdot 4 + 24 = 1 - 52y + 676y^2 - 48y$$

$$- 576y^2 + 24 = 25 - 100y + 100y^2 = (5 - 10y)^2$$

$$x = \frac{26y - 1 \pm (5 - 10y)}{2}$$

$$8y + 2$$

$$18y + 3$$

$$y = \frac{x}{8} - \frac{1}{4}$$

$$y = \frac{x}{18} + \frac{3}{18}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array} \quad \begin{array}{r} \cdot \\ 144 \\ \times 4 \\ \hline 576 \end{array}$$

N 3

$$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$$

$$3^{\log_3 a} + 4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a}$$

$$1 + \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 a} \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 a}$$

$$0 \geq \left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 a} - \left(\frac{4}{3}\right)^{\log_3 a} - 1$$

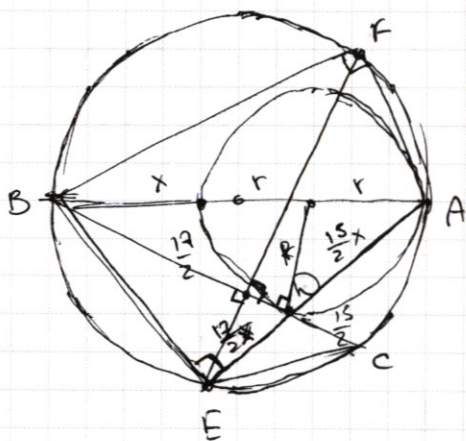
$$0 \geq \left(\frac{5}{3} - \frac{4}{3}\right) (\log_3 a - 1)$$

$$18y - 3 > 12y$$

$$\frac{x}{12} > 12y$$

$$8y + 2 > 12y$$

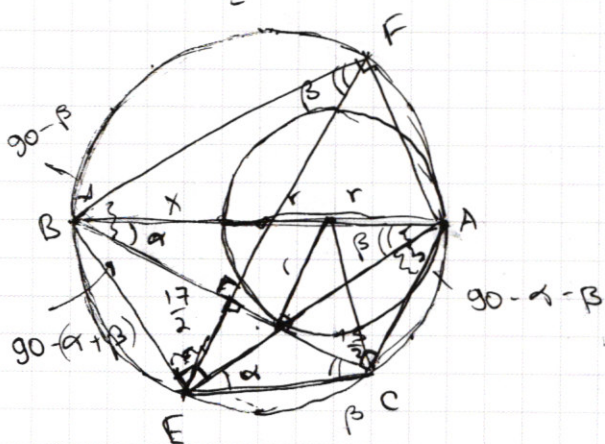
$$\begin{cases} x = 8y + 2 \\ y < \frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 18y - 3 \\ y > \frac{1}{2} \end{cases}$$



$$(x+r)^2 + r^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2$$

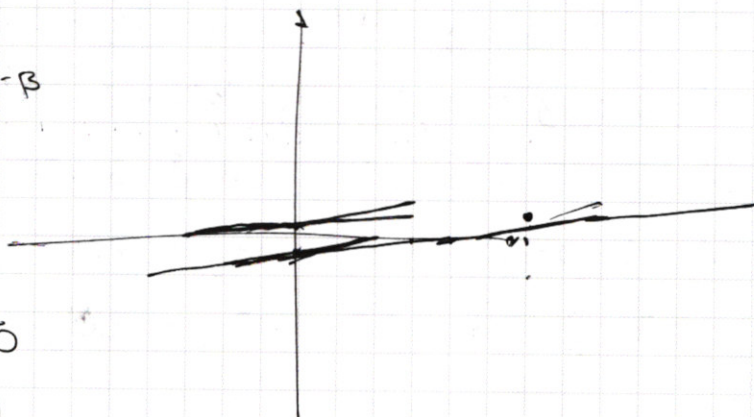
$$x(x+2r) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$x^2 + 2xr + r^2 + r^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2$$



$$(x+r)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2$$

$$x(x+2r) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$



$$\ln 3 + \ln 4 \leq \ln 5$$

$$\frac{\ln 4 + \ln 3}{\ln 3 \cdot \ln 4} \leq \frac{1}{\ln 5}$$

$$\ln 5 (\ln 4 + \ln 3) \leq \ln 3 \cdot \ln 4$$

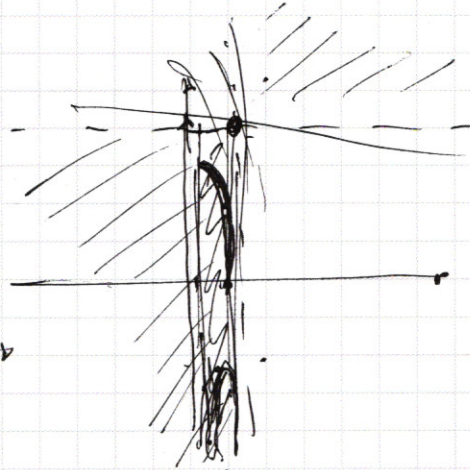
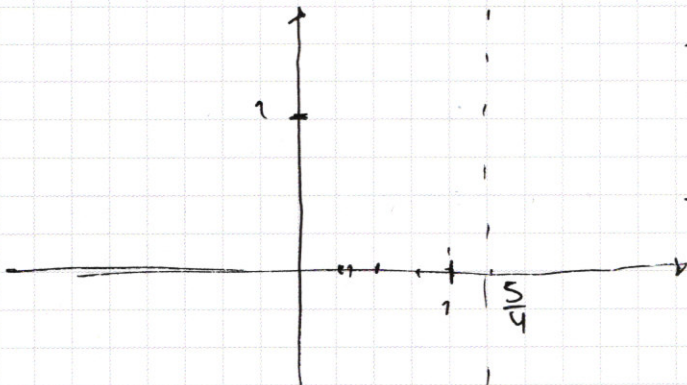
[2;

1,5]

$$\frac{16(x-1)}{4(x-1)-1}$$

$$x \neq \frac{5}{4}$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4}{1} + \frac{9}{4x-5}$$



$$* \frac{36}{64} \cdot \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$-\frac{32 \cdot 38^2}{32^2} + \frac{18^2 \cdot 36}{32^2} - 3 =$$

$$= -\frac{18^2}{32} + \frac{18^2}{32} \cdot \frac{36}{32} - 3 = \frac{18^2}{32 \cdot 8} - 3$$

$$= \frac{9 \cdot 18 \cdot 18}{16 \cdot 2 \cdot 8} = \frac{81}{256} - 3$$

$$\frac{5}{4}a + b = 4$$

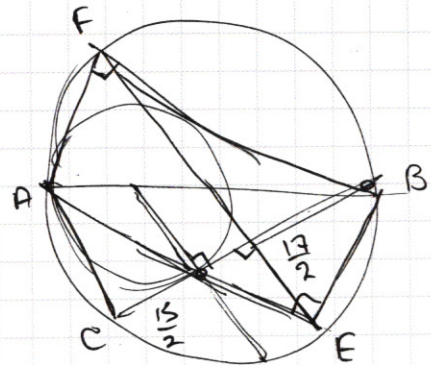
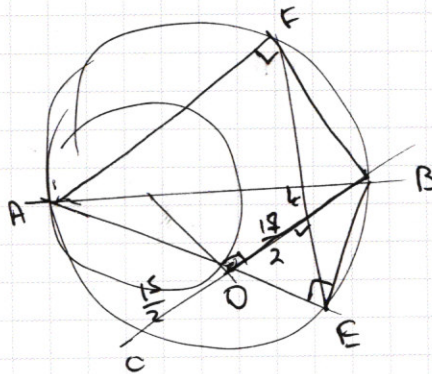
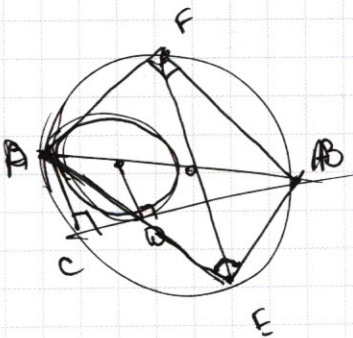
$$x_B = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

$$y_B = \frac{-32 \cdot 81}{16 \cdot 16} + \frac{38 \cdot 81}{4 \cdot 16} - 3$$

$$= \frac{81}{16} \left(\frac{9}{4} - 2 \right) - 3 = \frac{81}{64} - 3$$

a

a=0 b ∈ (0;



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$x^2 - x - 1 > 0$$

$$D = 1 + 4$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$F(2) = F(3) = F(6) = 0 = F(4) = F(8) = F(16) = F(9) = F(12) = F(18) =$$

$$F(5) = F(7) = F(10) = F(15) = F(21) = F(14) = 1 = F(20) = F(24)$$

$$F(25) = F(11) = F(22) = 2 \quad F(13) = 3 \quad F(17) = F(19) = 4 \quad F(23) = 5$$

$$F\left(\frac{1}{2} \cdot 4\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) + F(4) = F\left(\frac{1}{2}\right) + 0 = F(2) = 0 \quad F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$F\left(\frac{1}{3} \cdot 9\right) = F\left(\frac{1}{3}\right) + F(9) = F\left(\frac{1}{3}\right) + 0 = 0 \quad F\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

$$F\left(\frac{1}{4} \cdot 8\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) + F(8) = F\left(\frac{1}{4}\right) + 0 = 0 \quad F\left(\frac{1}{4}\right) = 0$$

$$F\left(\frac{1}{a}\right) + F(a) \cdot F(a) = F(a)$$

$$F\left(\frac{1}{a}\right) = F(a)(1 - F(a))$$

$$F(x) \geq 0 \quad F(y) \geq 0$$

$$F(x/y) = F(x) + F\left(\frac{1}{y}\right) = F(x) + F(y)(1 - F(y)) < 0$$

$$F(x) < F(y)(F(y) - 1)$$

~~$$\text{При } F(x) = 0 \quad F(y) \geq 2$$~~

10.7

$$F(x) \leq F(y)$$

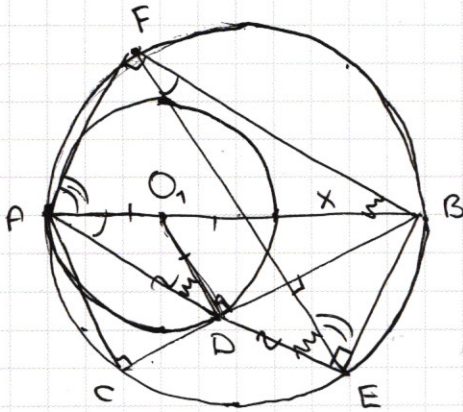
~~$$\text{При } F(x) \geq 1 \quad F(y) \geq 2$$~~

~~$$\text{При } F(y) = 2 \quad F(x) \leq 2$$~~

~~$$\text{При } F(y) = 3 \quad F(x) < 6$$~~

~~$$\text{При } F(y) = 4 \quad F(x) <$$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{BO_1}{BD} = \frac{BA}{BC} = \frac{x+2r}{17}$$

$$\frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{32} = \frac{x+r}{x+2r}$$

$$x(x+2r) = x(x+15x) = \frac{17^2}{4}$$

$$x^2 + 16x - \frac{17^2}{4} = 0$$

$$x = \frac{-16 \pm \sqrt{256 + 289}}{2}$$

$$\frac{r}{AC} = \frac{17}{32} \quad f(a^2)$$

$$\frac{x+r}{x+2r} = \frac{17}{32}$$

$$32x + 32r = 17x + 34r$$

$$2r = 15x \quad r = \frac{15}{2}x$$

$$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = x(2r+x) = x\left(\frac{17}{2}x\right)$$

$$x^2 =$$

$$34r + 17x = 32x + 32r \quad 2r = 15x$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ 289 \\ + 256 \\ \hline 545 \end{array}$$

$$D = 256 + 289 =$$

$$x+2r = \frac{32}{17}x + \frac{32}{17}r$$

$$\frac{r}{x+2r} =$$

$$a + a^{\log_3 4} \geq a^{\log_3 5}$$

$$3^m + 4^m \geq 5^m$$

$$a = 3^m \quad m = \log_3 a$$

$$m \quad m < 1$$

$$\begin{cases} x^2 - 24yx + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ x - 12y \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 144y^2 - 26xy + 12y + x - 6 \end{cases}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №
(Нумеровать только чистовики)



черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)