МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}; \\ x^2+9y^2-4x-18y=12; \end{cases}$

$\Updownarrow$

$\begin{cases} 1)\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25; \\ 2)\ (x-2y)^2=xy-x-2y+2; \\ 3)\ x-2y\geq 0; \end{cases}$

Раскрываем скобки и приводим к виду кв. ур-я 2-ое ур-е:

2) $x^2+(-5y+1)x+(\overset{6}{4}y^2+2y-2)=0;$

$D=25y^2-10y+1-18y^2-8y+8=9y^2-18y+9=(3y-3)^2.$

Решение ~~ур-я~~ рав-ва 2) являются x_1 и x_2:

$x_1=\dfrac{5y-1+3y-3}{2}=4y-2;\quad x_2=\dfrac{5y-1-3y+3}{2}=y+1.$

Подставим значения x в рав-во 1) (сначала x_1, потом и x_2)

$x_1)\ (4y-4)^2+9(y-1)^2=25;$

$25y^2-50y+25=25;$

$25y(y-2)=0;$

Решением ур-я являются $y_1=0;\ y_2=2$, при этом соответствующие значения x: $x_1'=-2;\ x_2'=6.$

Подставляя их в нер-во 3), получим, что y_1 и x_1' не являются решениями системы $(-2<0)$, ~~при~~ а y_2 и x_2' являются $(6-4>0;$ $2>0)$

$x_2)\ (y-1)^2+9(y-1)^2=25;$

$10(y-1)^2=25;$

$\Updownarrow$

$\left[\begin{array}{l} y-1=\sqrt{2,5}; \\ y-1=-\sqrt{2,5}; \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} y_3=1+\sqrt{2,5}; \\ y_4=1-\sqrt{2,5}; \end{array}\right.$ - решения ур-я $10(y-1)^2=25.$

Соответствующие значения x: $x_3=2+\sqrt{2,5}$; $x_4=2-\sqrt{2,5}$.

Проверим выполнение условия 3):

Для x_3: $2+\sqrt{2,5}-2-2\sqrt{2,5}=-\sqrt{2,5}<0; \Rightarrow$ не явл. решением

Для x_4: $2-\sqrt{2,5}-2+2\sqrt{2,5}=\sqrt{2,5}>0; \Rightarrow$ является решением

Следовательно, решениями ур-я являются значения $(6;2)$; $(2-\sqrt{2,5}; 1-\sqrt{2,5})$.

Ответ. $(6;2)$; $(2-\sqrt{2,5}; 1-\sqrt{2,5})$

Задача 6. $\begin{cases} 1) \dfrac{12x+11}{4x+3}\le ax+b; \\ 2) ax+b\le -8x^2-30x-17; \end{cases}$

Решаем по-очередно нер-ва 1) и 2):

1) $\dfrac{12x+11-4ax^2-3ax-4bx-3b}{4x+3}\le 0;$

$$\frac{4a\cdot x^2+(3a+4b-12)x+3b-11}{4\left(x+\frac{3}{4}\right)}\ge 0$$

~~Реше Корни кв. ур-я в числителе~~

2) $8x^2+(30+a)x+17+b\le 0;$

$D=(30+a)^2-4\cdot 8\cdot(17+b).$

Решение нер-ва - это:

$x\in\left[\dfrac{-30-a-\sqrt{D}}{16}; \dfrac{-30-a+\sqrt{D}}{16}\right]$, при $D\ge 0$;

и $x\in\varnothing$, при $D<0$. Продолжение на стр. 3

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1. По формуле суммы синусов преобраз. рав-во 2):

$$\begin{cases} 1) \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2) \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}; \end{cases}$$

2) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$;

Т.к. мы знаем, что $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, можем разделить на ~~sin~~ его подставить в получившееся выр-е:

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5};$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}};$$

$$\Updownarrow$$

$$2\beta = \pm\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

$$\beta = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$$

Решаем ур-е 1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$$\Downarrow$$

$$2\alpha+2\beta = \left[\begin{array}{l} -\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k; \\ \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + 2\pi k;\quad k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right. \qquad \alpha+\beta = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi k \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi k, \end{array}\right.$$ где $k\in\mathbb{Z}$.

Из решений ур-ий выходит что угол α может быть равен:

$$\alpha = \left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \pi k \\ -\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \pi k \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \pi k; \\ \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \arccos\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}. \end{array}\right.$$

Следовательно, $tg\,\alpha$ исходя из значений α и того, что $tg(\alpha+\pi k) = tg\,\alpha$, $k \in \mathbb{Z}$, получаем, что $tg\,\alpha$ может равняться:

1) $tg\,\alpha = tg\frac{1}{2}(-arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - arccos\frac{2}{\sqrt{5}}) = tg(-\frac{1}{2}\cdot 2 arcsin\frac{1}{\sqrt{5}})$ т.

Заметим, что $\cos(arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}) = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$, следовательно $arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} = arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\sin(2arsin\frac{1}{\sqrt{5}}) = 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{4}{5}$.

$tg(-2arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}) = -tg(2arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}) = -\frac{\frac{4}{5}}{\sqrt{1-\frac{16}{25}}} = -\frac{4}{3}$.

$tg\,\alpha = -tg(arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}) = -\cancel{\frac{4}{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}(\sqrt{1-\frac{1}{5}})} = -\frac{1}{2}$.

2) $tg\,\alpha = tg(-arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + arccos\frac{2}{\sqrt{5}}) = tg\,0 = 0$.

3) $tg\,\alpha = tg(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{2}arccos\frac{2}{\sqrt{5}}) = tg\frac{\pi}{2}$

$tg\frac{\pi}{2}$ не определен для, поэтому в этом случае $tg\,\alpha \in \varnothing$

4) $tg\,\alpha = tg(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + arccos\frac{2}{\sqrt{5}}) = tg(\frac{\pi}{2} + arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}) =$

$= -ctg(arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}) = -\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2$.

Ответ. $tg\,\alpha \in \{-2; -\frac{1}{2}; 0\}$.

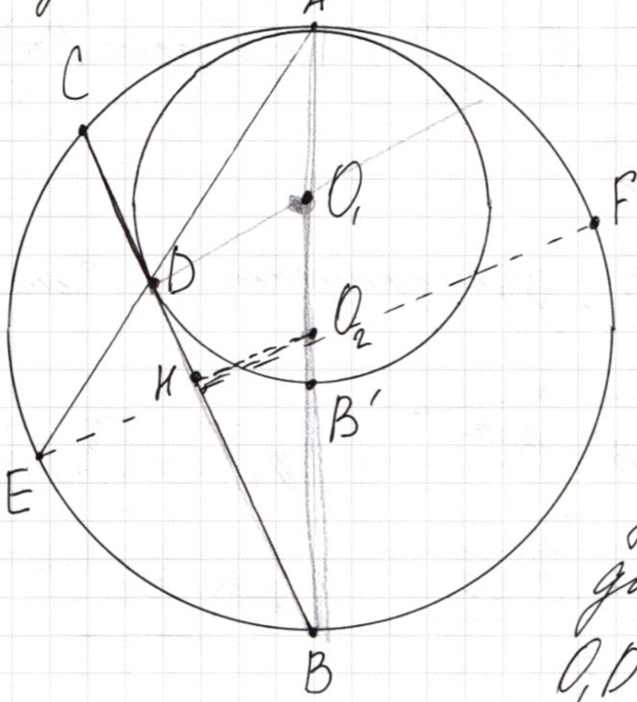
☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4: Дано: $CD = 8$, $BD = 17$. Решение: 1) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей ω и Ω соответственно. Исходя из того, что точка касания 2-ух окружностей ~~нет~~ лежит на прямой, проходящей через их центры, а также, что центр окружности находится на серединном перпендикуляре к хорде и что



$O_1D \perp BC$ (т.к. BC — касательная) и $O_2H \perp CB$, где H — середина BC, тогда исходя из подобности $\triangle O_1DB$ и $\triangle O_2HB$ ($\angle ABC$ — общий, $\angle O_1DB = \angle O_2HB = 90°$, по 2-ому признаку эти треуг. подобны) следует, что $\frac{O_1B}{O_2B} = \frac{DB}{HB} = \frac{17 \cdot 2}{17+8} = \frac{34}{25}$, при этом $O_2B = R$, $O_1B = 2R - r$, где R и r — радиусы окружностей Ω и ω соотв.

Т.к. BD — касательная к ω, а BA — отрезок, пересекающий ω, то BD и ~~..~~ соотношение по формуле:

$BD^2 = BB' BA$, где B' и A — пересечение BA окружностью ω

$BB' = 2R - 2r$, $BA = 2R$,

Объединим все соотнош. связанные с R и r в 1 систему:

$$\begin{cases} \dfrac{2R-r}{R} = \dfrac{34}{25}; \\ 2R(2R-2r) = 289; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{16}{25}R = r; \\ 2R\cancel{\cdot}\dfrac{18}{25}R = 289. \end{cases}$$

Следовательно: $R^2 = \dfrac{17^2 \cdot 5^2}{6^2}$; $R = \dfrac{85}{6}$ (т.к. в задаче $R>0$)

$r = \dfrac{16}{25} \cdot \dfrac{85}{6} = \dfrac{136}{15} = \dfrac{8 \cdot 17}{15} = \dfrac{136}{15}$.

Найдем AD, зная, что $\triangle ACB$ – прямоугольный ($\angle C$ опирается на диаметр)

$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2} = \sqrt{CD^2 + AB^2 - BC^2} = \sqrt{64 + \left(\frac{85}{3}\right)^2 - 25^2} =$

$= \sqrt{\dfrac{576 + (85^2 - 75^2)}{9}} = \dfrac{\sqrt{576 + 10 \cdot 160}}{3} = \dfrac{\sqrt{2176}}{3} =$

$= \dfrac{2\sqrt{544}}{3} = \dfrac{4\sqrt{136}}{3} = \dfrac{8\sqrt{34}}{3}$.

При этом из свойств пересеч. хорд найдем DE:

$DE \cdot AD = DC \cdot DB = 8 \cdot 17$.

$DE = \dfrac{8 \cdot 17 \cdot 3}{8 \cdot \sqrt{17 \cdot 2}} = 3\sqrt{\dfrac{17}{2}} \longrightarrow AE = \sqrt{34}\left(\dfrac{8}{3} + \dfrac{3}{2}\right) =$

$= \dfrac{25}{6}\sqrt{34}$.

Заметим, что $\dfrac{R}{r} = \dfrac{25}{16}$, при этом $\dfrac{AE}{AD} = \dfrac{25\sqrt{34} \cdot 3}{6 \cdot 8\sqrt{34}} = \dfrac{25}{16}$,

а из этого следует, что $\triangle AEO_2 \overset{\text{подобен}}{\sim} \triangle ADO_1$ по 1-ому признаку подобия ($AO_1 : AO_2 = r : R = AD : AE$, $\angle EAB$ общий для 2-ух треугольников,

продолжение на странице 7

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4 продолжение. Из подобия $\triangle ADO_1$ и $\triangle AEO_2$ следует, что $EO_2 = \frac{AO_2}{AO_1} \cdot DO_1 = \frac{R}{r} \cdot r = R$, следовательно, EO_2 – ~~диаметр~~ радиус Ω, и $O_1D \parallel O_2E$, из этого следует, т.к. $BC \perp O_1D$ (т.к. BC – касательная к точке D), то и $O_2E \perp BC \longrightarrow$ т.к. F по условию лежит на ~~перпендикулярной~~ продолжении перпендикуляра ~~от~~ от B на прямую BC, ~~то~~ а эта линия проходит через O_2, то EF – диаметр окружности Ω. ~~Т.к.~~

$\angle AFE = \arcsin \frac{AE}{EF} = \arcsin \frac{\frac{25}{6}\sqrt{34} \cdot 3}{85} = \arcsin \frac{5}{\sqrt{34}}$.

$\angle AEF = \arcsin \frac{\sqrt{34-25}}{\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

Площадь $\triangle AEF$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AE \cdot \sin\angle AEF = \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{25\sqrt{34}}{6} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} =$

$= \frac{2125}{12}$.

Заметим, что $\arcsin \frac{5}{\sqrt{34}} = \operatorname{arctg} \frac{5}{3}$.

Ответы. радиус Ω – $\frac{85}{6}$, радиус ω — $\frac{136}{15}$,

$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{34}} = \operatorname{arctg} \frac{5}{3}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Задача 6. | продолжение. Заметим, что решения нер-ва даны нестрогие, отсюда, при решении их методом интервалов, крайние точки (то есть те, в которых выражение обращается в ноль) будут входить~~

Задача 6

1) $\dfrac{12x+11}{4x+3} = 3 + \dfrac{2}{4x+3} \leq ax + b.$

2) $ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

Решение правой части нер-ва (для разложения выражения)

$$x_1 = \frac{30 + \sqrt{600 - 544}}{16} = \frac{30 + \sqrt{56}}{16} = \frac{15 + \sqrt{17}}{8}$$

$$x_2 = \frac{15 - \sqrt{17}}{8}.$$

1) $3 + \dfrac{2}{4x+3} \leq ax + b;$

2) $ax + b \leq -8\left(x - \dfrac{15+\sqrt{17}}{8}\right)\left(x - \dfrac{15-\sqrt{17}}{8}\right);$

Если решать систему графически, то прямая $f_1(x) = ax + b$, должна лежать выше гиперболы $f_2(x) = 3 + \dfrac{2}{4x+3}$ и ниже параболы, ветви которой направлены вниз $f_3(x) = -8\left(x - \dfrac{15+\sqrt{17}}{8}\right)\left(x - \dfrac{15-\sqrt{17}}{8}\right)$, вершина которой $\left(\dfrac{15}{8}; \dfrac{17}{8}\right)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача № 3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x;$

ОДЗ: $x^2+18x > 0; \Longrightarrow |x^2+18x| = x^2+18x$. что $x \in$ ОДЗ

$\Updownarrow$

$x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$, все следующие преобразования производим, учитывая

~~Решение:~~

Решение нер-ва: $(x^2+18x)^{\log_{12}5} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

Логарифмируем выражение, при $x \in$ ОДЗ:

$$\lg(x^2+18x)\cdot\frac{\lg 5}{\lg 12} + \lg(x^2+18x) \geq \lg(x^2+18x)\frac{\lg 13}{\lg 12}.$$

$$\lg(x^2+18x)\cdot\left(\frac{\lg 5 - \lg 13}{\lg 12} + 1\right) \geq 0;$$

$$\lg(x^2+18x)\ \frac{\lg\frac{5\cdot 12}{13}}{\lg 12} \geq 0$$

$$\lg(x^2+18x)\ \frac{\lg\frac{60}{13}}{\lg 12} \geq 0;$$

Т.к. $\lg\frac{60}{13} > 0$ и $\lg 12 > 0$ (т.к. $\frac{60}{13} > 1; 12 > 1$), то мы можем сократить обе части на $\frac{\lg\frac{60}{13}}{\lg 12}$.

$$\lg(x^2+18x) \geq \lg 1.$$

$\Updownarrow$

$x^2+18x \geq 1;$

$x^2+18x-1 \geq 0;$

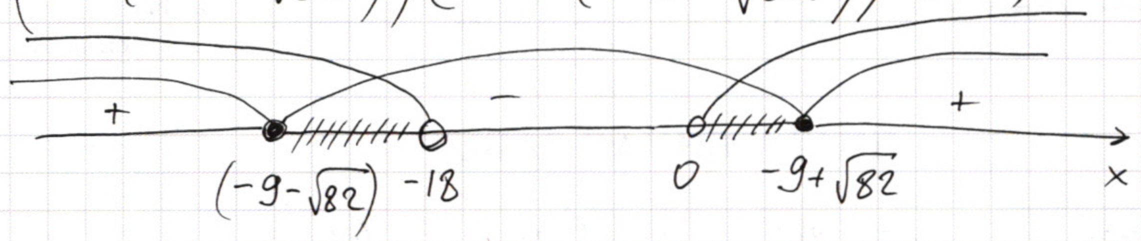
$\{D = 324 + 4 = 328.\}$

$$\left(x - \frac{-18+\sqrt{328}}{2}\right)\left(x - \frac{-18-\sqrt{328}}{2}\right) \geq 0;$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left(x-\left(-9+\sqrt{82}\right)\right)\left(x-\left(-9-\sqrt{82}\right)\right)\geq 0;$$



$$\begin{cases} \sqrt{82} > 9 \ (\text{т.к. } 9^2=81), \text{ поэтому } -9+\sqrt{82} > 0; \text{ и } \\ -9-\sqrt{82} < -18 \end{cases}$$

~~Сначала соединяем~~ Находим пересечение множ-ва ответов с ~~множ-вом~~ областью опред. x и записываем ответ:

$$x\in\left[-9-\sqrt{82};-18\right)\cup\left(0;\sqrt{82}-9\right].$$

Ответ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

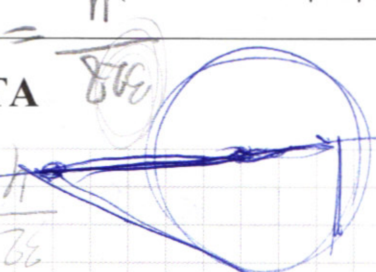
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

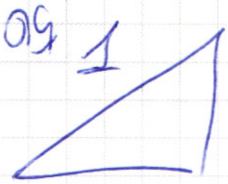
$611 = 0\cancel{\hphantom{0}} + 64$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$



$(x-2)^2 - 4 + (3y+8)^2 - 9$

$1 - \frac{16}{25} =$

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 + (-5y+1)x + 4y^2 + 2y - 2 = 0;$

$x^2 - 4yx - 4y^2 = xy - x - 2y + 2 \geqslant 0$

$x = \frac{5y - 1 \pm \sqrt{}}{2}$

$x^2 - 5xy + x + 2y - 2 - 4y^2$

$x^2 + (-5y+1) + 2y - 2 + 4y^2$

$25y^2 - 10y + 1 - 4 \cdot 16y^2 - 8y + 8$

$9y^2 - 18y + 9$

$xy - x - 2y + 2 > 0$

$(x-2)y > 2y - 2$

$\frac{17}{8^2}$

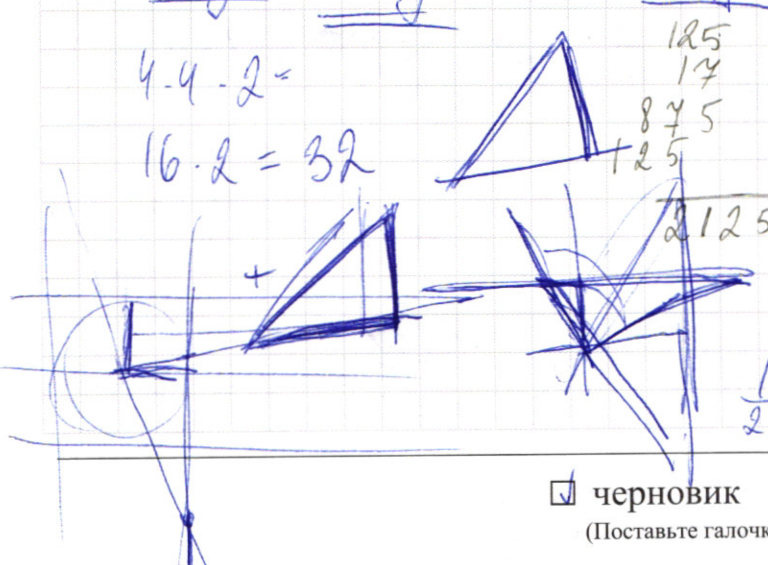
$4 \cdot 2 = 8 - 2 = 6$

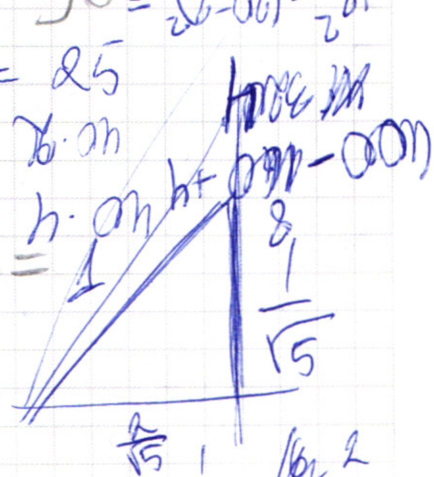
$16y^2 - 32y + 16 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$4 \cdot 4 \cdot 2 =$

$16 \cdot 2 = 32$

$4 \cdot 8 = 32$





$\frac{1}{\sqrt{5}}$

$1 + \frac{1}{5} =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2500 − 384 = 2200 − 84 = 46

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{5}$ $2\sin(\alpha + 2\beta)^{21} \cdot \cos$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{5}$

2500

$\log(x^2 - 18)$

$+ (x^2 + 18x) \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13}$

$(12^{\log_{12} 5})^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$50^2 - 46^2 = 96 \cdot 4 = 384$

46 44

$\frac{25}{16}$ $(x^2 + 18x)^{\log_{12} 5} + (x^2 + 18x) \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13}$

$x - (\infty; -18) \cup (0; +\infty)$

$25 \cdot 3 = 75$

$2\sin\alpha$ $12 - 3a - 4b \pm \sqrt{9a^2 + 16b^2 + 144 - 72a - 96b + 12ba}$

$\alpha = \beta$

$\sin\alpha + \sin\beta =$ 3·12·2

5·17·25 24·4 = 72

$= 2\sin\alpha$

10·42 40 + 16 4·4·3

1.20 мин 12·4·2

$\cos 0 = 1$

48·2 = 56

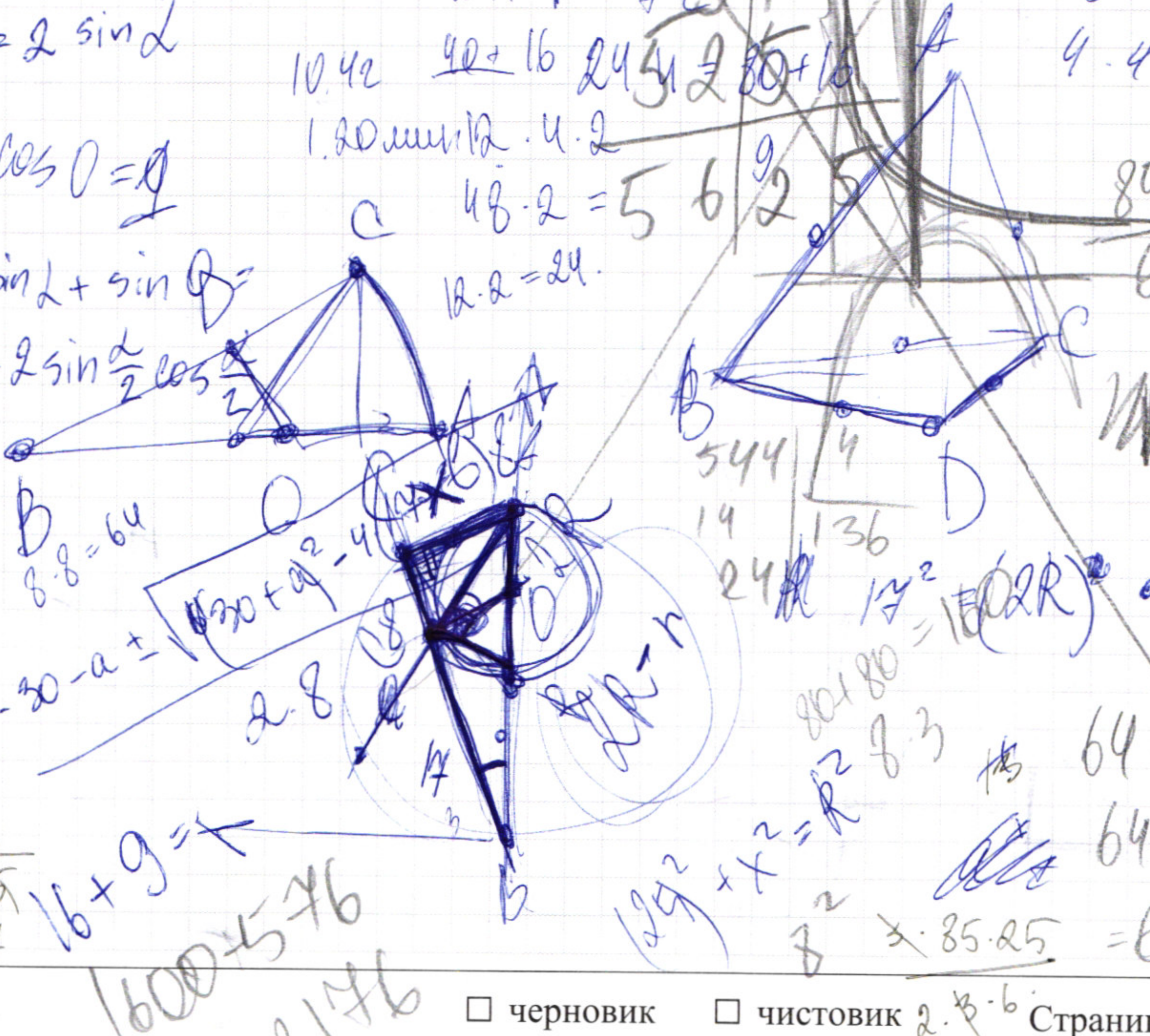
12·2 = 24

$\sin\alpha + \sin\beta =$

$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$

85 / 6 = 24

85 / 3 = 27,333



$8 \cdot 8 = 64$

$-30 - a \pm \sqrt{900 + a^2 - 4}$

544 136

$17^2 = 16(2R) \cdot (2R - 2r)$

$2R - r$

$x^2 + x^2 = R^2$

64·9 =

640 − 64 =

= 600 − 24

580 − 4

$\frac{5}{2 \cdot 85}$ 17

$16 + 9 = 1$

1600 − 576

2176

3·85·25

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)