МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

~~$\Leftrightarrow 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$~~ $\quad$] $2\alpha = x$,] $2\beta = y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(x+2y)+\sin x = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

// формулу суммы синусов применим

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underbrace{\sin(x+y)} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\cdot\underbrace{\sin(x+y)}\cdot\cos(2y) = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}\right)\cdot\cos(2y) = -\frac{\cancel{8}\,4}{\cancel{17}\sqrt{17}}$$

$$\cos(2y) = \frac{4}{\sqrt{17}} \Leftrightarrow \boxed{\cos(4\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}} \Leftrightarrow \cos 2y = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

~~$|\sin(4\beta)| = \sqrt{1-\frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \boxed{\sin 4\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}}$~~

~~$\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$~~

~~$\sin 2\beta = \sqrt{\frac{1-\cos 4\beta}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{4}{\sqrt{17}}}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}}}$~~

// $\cos 2y = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\cos^2 y - 1 = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos^2 y = \left(\frac{4}{\sqrt{17}}+1\right)\frac{1}{2}$

$1-2\sin^2 y = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin^2 y = \left(1-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\frac{1}{2}$

Вернемся ко (2) уравнению: $\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -8/17$

$$\frac{\sin 2\alpha \cdot 4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1 \cdot \cos 2\alpha}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$4\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$5\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$\cancel{10\sin\alpha\cos\alpha \pm (2\cos^2\alpha - 1) + \frac{8}{\sqrt{17}} = 0}$$

Задача №2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \quad | \cdot 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3y-2) + \cancel{2} - 2x + 2 - \cancel{2} = \sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3y-2) - 2(x-1) = \sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ (3y-2)^2 + 9(x-1)^2 = 25 \end{cases} \quad \left.\begin{matrix} 3y-2 = a \\ x-1 = b \end{matrix}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - 2b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4ab + 4b^2 - ab = 0 \\ a^2 + 9b^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2 - 5ab + 4b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 - 25 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (a-4b)(a-b) = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 25 \end{cases}$$

1) $a = 4b$

$\Rightarrow 16b^2 + 9b^2 = 25$

$b = \pm 1$

2) $a = b \Rightarrow 10b^2 = 25$

$b^2 = \frac{5}{2}$

$b = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} b=1 \\ a=4 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} b=-1 \\ a=-4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} b=\frac{\sqrt{10}}{2} \\ a=\frac{\cancel{2}\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ 4) $\begin{cases} b=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ a=-\frac{\cancel{2}\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

т.к. $a-2b=\sqrt{ab}$, то $a-2b\geq 0$. условие $ab>0$ всегда выполн, т.к. a и b одного знака

проверка: 1) $4-2\cdot 1\geq 0$, да

2) $-4-2\cdot(-1)=-2\geq 0$, нет

~~3) $2\sqrt{10}-2\cdot\frac{\sqrt{10}}{2}=\sqrt{10}$, да (>0)~~

~~4) $-2\sqrt{10}-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)=-\sqrt{10}<0$, нет~~

3) $\frac{\sqrt{10}}{2}-\sqrt{10}<0$ нет

4) $-\frac{\sqrt{10}}{2}+\sqrt{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}$, да

$\Rightarrow$ (1) и (4) подходят.

1) $\begin{cases} 3y-2=4 \\ x-1=1 \end{cases}$ $\begin{cases} y=2 \\ x=2 \end{cases}$

~~3) $\begin{cases} 3y-2=2\sqrt{10} \\ x-1=\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ $\begin{cases} y=\frac{2\sqrt{10}+2}{3} \\ x=\frac{\sqrt{10}+2}{2} \end{cases}$~~

4) $\begin{cases} 3y-2=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ x-1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

$y=\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\frac{1}{3}$

$x=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

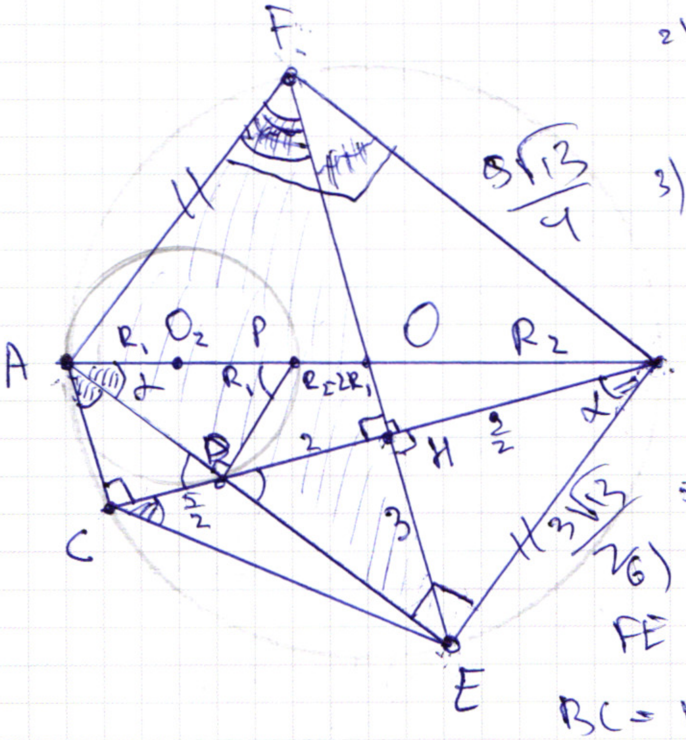
~~Ответ: $(2;2)$; $\left(\frac{\sqrt{10}+2}{2}; \frac{2\sqrt{10}+2}{3}\right)$~~

~~Ответ: $\left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}; \left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\frac{1}{3}\right)$; $(2;2)$~~

Ответ: $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$; $(2;2)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача №4



1) По лемме Архимеда: E – центр CB.
т.е. $\angle CAE = \angle EAB$

2) $\angle CAE = \angle CBE$ как вписанные.

3) $CE = BE$, т.к. стягивают равн. дуги
$\Rightarrow \angle ECB = \angle CBE$

4) $\triangle BCE$ – р/б $\Rightarrow EF \perp BC$ является медианой.

5) $\Rightarrow CH = BH$ ($H = FE \cap BC$)

6) т.к. $EH \perp BC$ и $HC = HB$, то FE проходит через центр окр-ти

$BC = BD + DC = 9 \Rightarrow BH = HC = \frac{9}{2}$

$DH = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$

7) $BD^2 = BP \cdot AB \iff \frac{169}{4} = 2(R_2 - R_1) \cdot 2R_2 \quad | \cdot 4$

$\Rightarrow 16R_2(R_2 - R_1) = 169$

8) $\angle APD = \angle ADC$ (один – вписанный, другой – между касой и хордой)

9) $\angle ADP = 90°$, т.к. опирается на диаметр

10) $\Rightarrow \angle DAP + \angle APD = 90°$, но $\angle ADC = \angle BDE$

11) $\Rightarrow \angle DEB = 180° - (\angle DAP + \angle APD) = 90°$

12) $HE = \sqrt{\cancel{2} \cdot \frac{9}{\cancel{2}}} = 3$ из $\triangle DBE$ (пропорц. отрезки)

13) $FH \cdot HE = CH \cdot HB$ по т. о пересек. хордах

$\Rightarrow FH = \frac{CH \cdot BH}{HE} = \frac{3\cancel{9} \cdot 9}{2 \cdot 2 \cdot \cancel{3}} = \frac{27}{4}$

14) $R_2 = FE/2 = \frac{FH + HE}{2} = \frac{\frac{27}{4} + \frac{12}{4}}{2} = \frac{39}{8}$ // R_2

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~15) из подобия △ BHO и △BCA:~~

15) $\cancel{\frac{BO}{BA} = \frac{BH}{BC} \Rightarrow R_2}$

из (7) $\Rightarrow$ $16R_2^2 - 16R_2 \cdot R_1 = 169$

$$\cancel{16} \cdot \frac{39^2}{\cancel{8} \cdot \cancel{8}_4} - \cancel{16}^2 \cdot \frac{39}{\cancel{8}} \cdot R_1 = 169$$

$$\left(\frac{39}{2}\right)^2 - 39 \cdot 2 \cdot R_1 = 169$$

$$R_1 = \left(\frac{39 \cdot 39}{4} - 13 \cdot 13\right) \cdot \frac{1}{13 \cdot 3 \cdot 2} =$$

$$= \frac{39 \cdot \cancel{39}}{4 \cdot \cancel{39} \cdot 2} - \frac{\cancel{13} \cdot 13}{\cancel{13} \cdot 6} = \frac{39^{(3}}{8} - \frac{13^{(4}}{6} = \frac{39 \cdot 3 - 13 \cdot 4}{24} =$$

$$= \frac{13(3 \cdot 3 - 4)}{24} = \frac{13 \cdot 5}{24} = \frac{65}{24} \quad // R_1$$

16) из △EHB: $EB = \sqrt{9 + \frac{81}{4}} = \sqrt{9\left(1 + \frac{9}{4}\right)} = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

По т. синусов для △EFB:

~~sin(∠EFB) = E~~ $\frac{EB}{\sin\angle EFB} = 2R_2 \Rightarrow \sin\angle EFB = \frac{3\sqrt{13} \cdot \cancel{4}^2}{\cancel{2} \cdot 39 \cdot \cancel{2}} =$

$$= \frac{6\sqrt{13}}{39} = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

17) $\cos\angle AFE = \sin(90 - \angle EFB) = \frac{2\sqrt{13}}{13}$ (по формуле приведения)

$\angle AFE = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$

18) из $\triangle FHB$:

$$FB = \sqrt{FH^2 + HB^2} = \sqrt{\left(\frac{27}{4}\right)^2 + \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{27\cdot 3\cdot 9}{4\cdot 4} + \frac{81}{4}} =$$

$$= \sqrt{\frac{81}{4}\left(\frac{9}{4}+1\right)} = \frac{9}{2}\cdot\frac{\sqrt{13}}{2} = \frac{9\sqrt{13}}{4}$$

19) Заметим, что AFBE – прямоугольник

$\Rightarrow AF = BE = \frac{3\sqrt{13}}{2}$

$$\times\begin{array}{r} 39 \\ 9 \\ \hline 351 \end{array}$$

20) $\sin\angle AFE = \sqrt{1 - \frac{4}{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

21) $S(\triangle AFE) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\cdot\frac{3\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{39}{4} = \frac{9\cdot 39}{16} = \frac{351}{16}$

Ответ: $R_2 = \frac{39}{8}$, $R_1 = \frac{65}{24}$, $\angle AFE = \arccos\frac{2\sqrt{13}}{13}$,
$S(\triangle AFE) = \frac{351}{16}$

Задача N3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

1) ОДЗ: $x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x| = x^2+6x$ на ОДЗ

2) $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ (по св-ву логарифмов – т.к. лог по осн. b от обеих частей равен)

$\Rightarrow$ (1) $\wedge$ (2) $\Rightarrow |x^2+6x|^{\log_4 5} = 5^{\log_4(x^2+6x)}$

Имеем: $3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) - 5^{\log_4(x^2+6x)} \geq 0$

$\exists \log_4(x^2+6x) = t \Rightarrow 4^t = x^2+6x \Rightarrow$ Имеем: $3^t + 4^t - 5^t \geq 0$

~~$t=0$: $1+0-1\geq 0$ верно~~, ~~при $t>0$ 5^t растёт быстрее, чем 3^t+t (производная всегда больше), поэтому левая часть будет строго меньше 0~~

до нек-ого t левая часть положит. т.к. $(3^t+4^t)>5^t$ (производные), а после $5^t>3^t+4^t$ (растёт быстрее).

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t=2$: $\quad 3^2+4^2-5^2 \geq 0$

$0 \geq 0$

при $t>2$ $\quad 5^t$ растёт быстрее, чем 3^t+4^t

при $t \leq 2$ решения всегда будут.

$t \leq 2 \iff \log_4(x^2+6x) \leq 2 \quad |:2$

$\iff \log_2(x^2+6x) \leq 1$

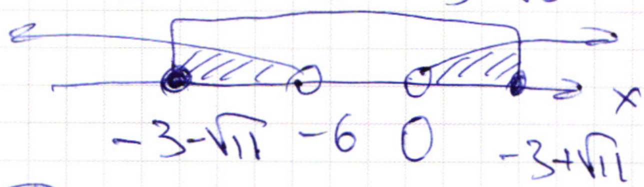
$\log_2(x^2+6x) \leq \log_2 2$

т.к. $\log_2(x) \uparrow$ на R, то: $\quad x^2+6x \leq 2$

Имеем с учетом ОДЗ: $\begin{cases} x^2+6x \leq 2 \\ x^2+6x > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+6x-2 \leq 0 \\ x(x+6) > 0 \end{cases}$, $D = 36+8 = 44 = 4 \cdot 11$

$x_{1,2} = \dfrac{-6 \pm 2\sqrt{11}}{2} = -3 \pm \sqrt{11}$

$-3-\sqrt{11} < -3-\sqrt{9} = -6$; $-3+\sqrt{11} > -3+\sqrt{9} = 0$



Ответ: $[-3-\sqrt{11}; -6) \cup (0; -3+\sqrt{11}]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

~~$8x^2-34x+30-2=$~~
~~$=8x^2-34x+28=$~~
~~$=2(4x^2-17x+14)$~~

$$\frac{4x-4+1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$$2-\frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 2(4x^2-17x+15)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2+\dfrac{1}{2x-2} \geq ax+b \quad (1) \\ ax+b \geq 8x^2-34x+30 \quad (2) \end{cases}$$

$\nearrow +\alpha$

Рассм. (1): при $x \in (1;3]$

$x \to 1_+$: $2+\dfrac{1}{2x-2} = +\infty$, $2x-2 \to 0_+$

$x=3$: $2+\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{4}$

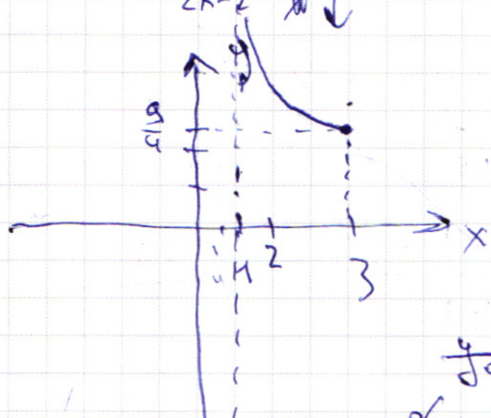
Рассм. $f(x) = 2+\dfrac{1}{2x-2}$

~~$f'(x)=$~~ $2x-2 \uparrow$ на $(1;3]$

(по т. о композиции) $\Rightarrow \dfrac{1}{2x-2} \downarrow$ на $(1;3]$ $\Rightarrow$ ~~$-\dfrac{1}{2x-2} \uparrow$ на $(1;3]$~~

$2+\dfrac{1}{2x-2} \downarrow$ на $(1;3]$ $f(x)=0$: ~~$f(x) = 2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$~~

$\dfrac{4x-3}{2x-2}=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{4}$



$ax+b$ — это прямая

$8x^2-34x+30$ — парабола

$x_0 = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{34}{16} = 2+\dfrac{1}{8} = \dfrac{17}{8}$

~~$y_0 = \frac{D}{4} = \frac{34^2-4\cdot8\cdot30}{4} = -\frac{196}{4}$~~

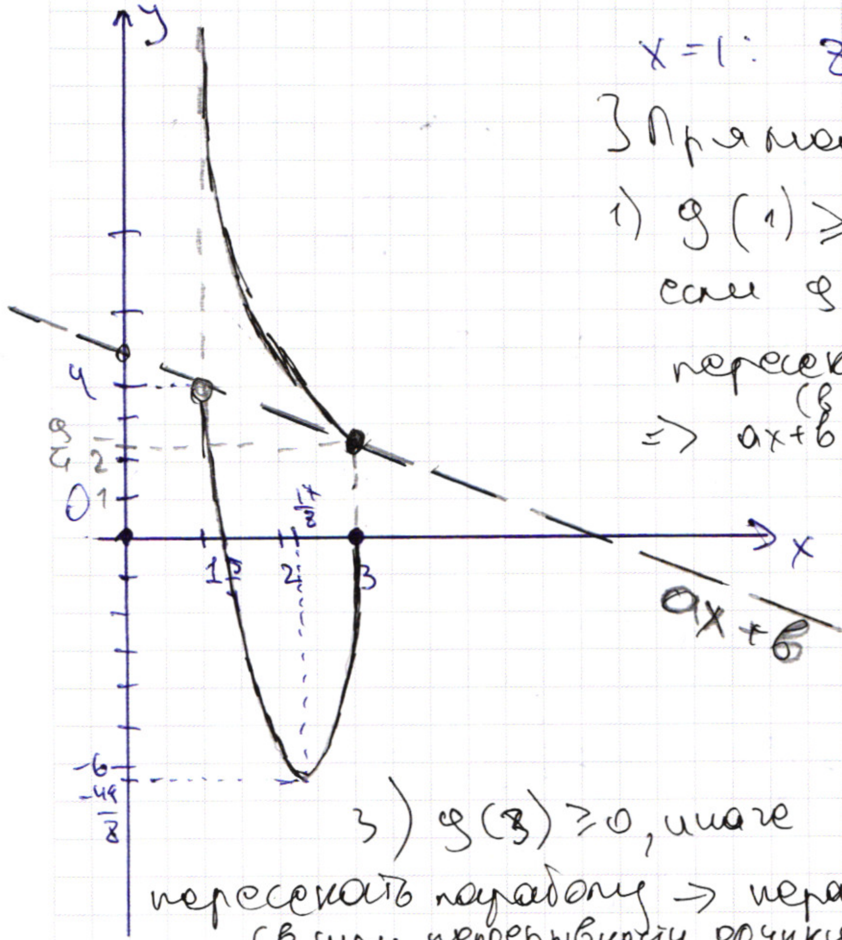
$y_0 = 8\cdot\dfrac{17^2}{8^2} - \dfrac{17\cdot2\cdot17}{8} + \dfrac{30\cdot8}{8} = \dfrac{-289+240}{8} = \dfrac{-49}{8}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$D = b^2 - 4ac = 34^2 - 4\cdot 8\cdot 30 = 14^2$$

$$x_{1,2} = \frac{34 \pm 14}{16}; \quad x_1 = \frac{48}{16} = 3; \quad x_2 = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$$



$x=1: \quad 8\cdot 1^2 - 34\cdot 1 + 30 = 4$

3) Прямая $ax+b = g(x)$

1) $g(1) \geq 4 \Rightarrow \boxed{a+b \geq 4}$

если $g(1) < 4$, то она будет пересекать ветвь параболы (в силу непрерывн.) $\Rightarrow ax+b \geq 8x^2 - 34x + 30$ не выполняется.

2) $g(3) \leq \frac{9}{4}$

$3a + b \leq \frac{9}{4} \quad |\cdot 4$

$\boxed{12a + 4b \leq 9}$

3) $g(3) \geq 0$, иначе прямая $g(x)$ будет пересекать параболу $\rightarrow$ неравенство не выполн. (в силу непрерывности функции)

$\boxed{3a + b \geq 0}$

4) тангенс наклона не может быть ~~больше~~ меньше, чем тангенс касательной к графику $\frac{4x-3}{2x-2}$ на $(1;3]$

уравнение касат.: $y = f(x_0) + \underbrace{f'(x_0)}_{tg}(x - x_0)$

tg наклона прямой равен a; $f'(x_0) = \frac{(4x-3)'(2x-2) - (2x-2)'(4x-3)}{(2x-2)^2} =$

$$= \frac{4(2x-2) - 2(4x-3)}{(2x-2)^2} = \frac{-2}{(2x-2)^2}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \quad a \geqslant -\dfrac{2}{(2x-2)^2}$

причем $x \in (1;3]$

$x=3: \quad a \geqslant -\dfrac{2}{16} = -\dfrac{1}{8}$

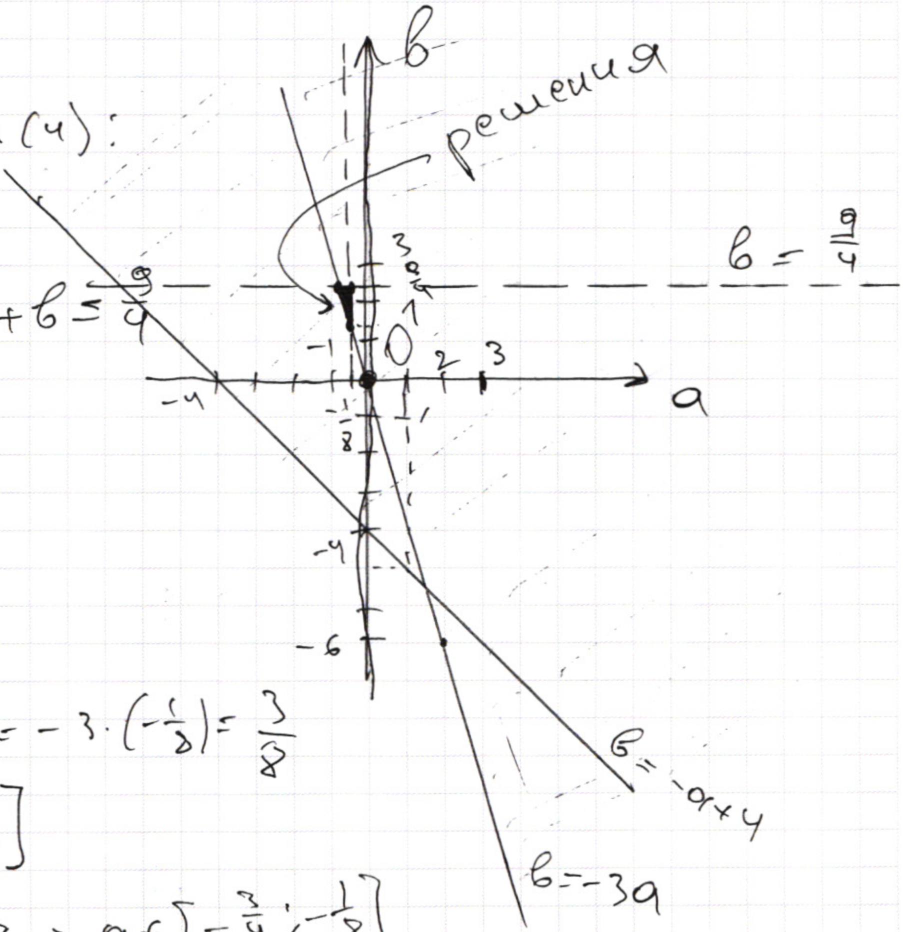
$x \to 1: -\dfrac{2}{(2x-2)^2} \to -\infty$

$\Rightarrow$ получили ограничение: $-\infty < a \leq -\frac{1}{8}$

т.е. $a \leq -\frac{1}{8}$

$(1) \wedge (2) \wedge (3) \wedge (4)$:

$$\begin{cases} a+b \geq 4 \\ \cancel{12a+4b \leq 9} \; 3a+b \leq \frac{9}{4} \\ 3a+b \geq 0 \\ a \leq -\frac{1}{8} \end{cases}$$



$3a+b=0$

$b=-3a$

$\cancel{3a+b}$

$b=-3a$, $a=-\frac{1}{8}$: $b=-3\cdot\left(-\frac{1}{8}\right)=\frac{3}{8}$

т.е. $b \in \left[\frac{3}{8}; \frac{9}{4}\right]$

$\frac{9}{4} = -3a \to a = -\frac{3}{4} \Rightarrow a \in \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{8}\right]$

Ответ: $(a;b)$: $a \in \left[-\frac{3}{4}; -\frac{1}{8}\right]$, $b \in \left[\frac{3}{8}; \frac{9}{4}\right]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x=\sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$\cancel{3x(x-2)+y(3y-4)-4=0}$

$(3y-6)+6-2x+2-2=$

$=3(y-2)-2(x-1)+4=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$(3x^2-3x)+(3x-3)+3+(3y^2-6y)+2y-4=0$

$3x(x-1)+3(x-1)+3y(y-2)+2(y-2)+3=0$

$3(x-1)(x+1)+(y-2)(3y+2)+3=0$

$\cancel{(3y-2)}$ $(3y-2)^2=9y^2-12y+4$

$(x-1)^2=x^2-2x+1$

$9x^2+9y^2-18x-12y-12=0$ (2)

$(3y-2)^2-4+9(x^2-2x+1)-9-12=0$

$(3y-2)^2+9(x-1)^2=25$

$a^2+9b^2\geq 6ab$

$\cancel{6ab}$

$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2-25=0 \end{cases}$ $-5ab-5b^2+25=0 \mid :(-5)$

$b^2+ab-5=0$

$D=a^2+20$ $b_{1,2}=\dfrac{-a\pm\sqrt{a^2+20}}{2}$

$6ab=6(a-2b)^2$

$(a-3b)^2=25-6(a-2b)^2$

$\log_b c\cdot\log_b a=\log_b a\cdot\log_b c$

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}\ \Big|\log_b$

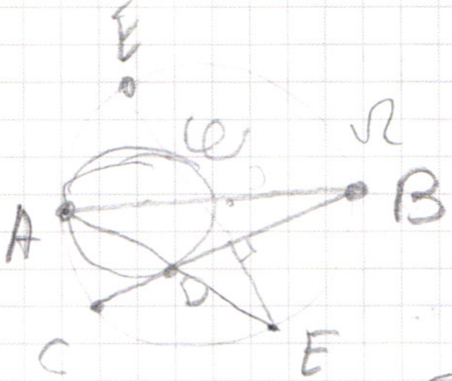
$(a^x)'=a^x\ln a$

$3^x\cdot\ln 3+5^x\cdot\ln 5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

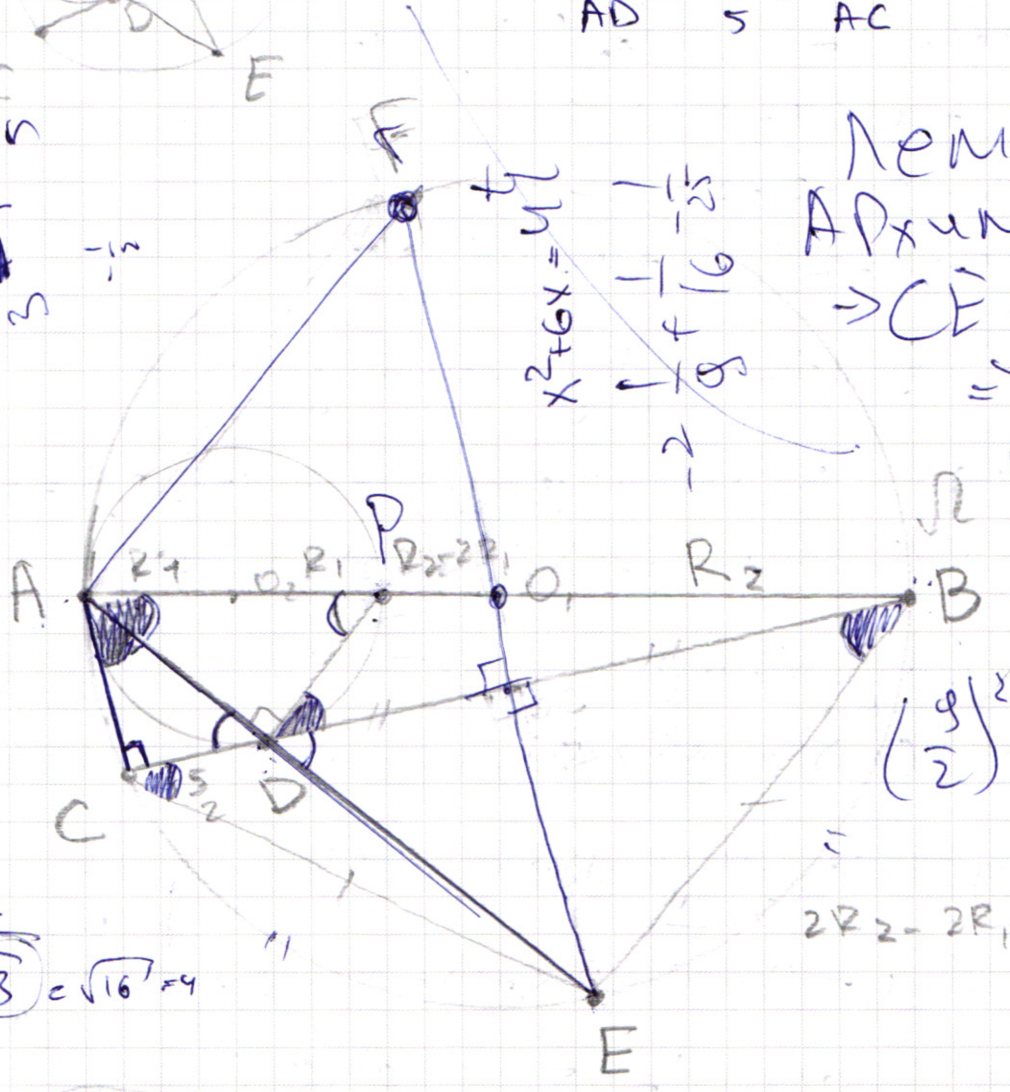
$f(x)^{\log_4 3} + f(x) - f(x)^{\log_3 5} \geq 0$



$\triangle APD \sim \triangle ADC$

$\frac{AP}{AD} = \frac{PD}{DC} = \frac{AD}{AC}$

$\frac{2R_1}{AD} = \frac{2PD}{5} = \frac{AD}{AC}$



$x^2 + 6x = 5$

Лемма Архимеда $\Rightarrow CE = EB$

$\Rightarrow O \in EF$

(перпенд. в р/б тр-ке — медиана)

$\left(\frac{9}{2}\right)^2 = 3x$

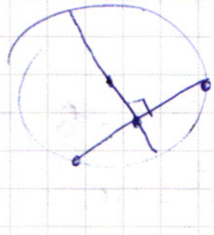
$\frac{5-3}{4} = x$

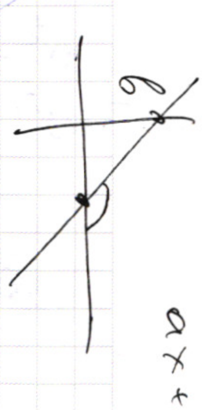
$\frac{12}{3\sqrt{13}} = \sqrt{16} = 4$

$\triangle BDP \sim \triangle BAD$

$\frac{BD}{AB} = \frac{BP}{BD} = \frac{PD}{AP}$

$\frac{13}{2 \cdot 2R_2} = \frac{(2R_2 - 2R_1)2}{13} = \frac{PD}{2R_1}$





$ax + b = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$+\begin{cases} \sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\ \sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \end{cases}$

$\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right) = \sin\alpha\cos\beta$

~~$\Rightarrow \sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = \frac{1}{2}(\sin$~~

Пусть $2\alpha = x$, $2\beta = y$

$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(x+2y)+\sin x = -\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(x+y)\cos y = -\frac{8}{17} \end{cases}$

~~$\sin x\cos y + \sin y\cos x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$\sin x\cdot\cos 2y + \sin 2y\cdot\cos x = -\frac{8}{17}$~~

$\Downarrow$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos y = -\frac{8}{17}$

$\cos y = \dots$

$+\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a\cos b + \sin b\cos a \\ \sin(a-b) = \sin a\cos b - \dots \end{cases}$

$\sin(a+b)+\sin(a-b) = 2\sin a\cos b$

$\begin{cases} a+b = x \\ a-b = y \end{cases} \Rightarrow \frac{x+y}{2} = a \quad \frac{x-y}{2} = b$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\cos 2x+1}{2}$

$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$

$\cancel{8}\cdot\frac{289}{\cancel{64}_8} - 34\cdot\frac{17}{8}+30 = \frac{17^2-17^2\cdot 2+240}{8} = \frac{-289+240}{8} = \frac{-49}{8}$

$\frac{8}{\sqrt{17}}$

$4\sin x + \sin x\cos x$

$4\sin(2\alpha)+\cos(2\alpha) = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y - 12 = 0 \end{cases}$$

$-12xy - 5x^2 - 3xy + 2x + 3y - 2 + 18x + 12y + 12 = 0$

$-5x^2 - 15xy + 20x + 15y + 10 = 0 \mid :(-5)$

$x^2 + 3xy - 4x - 3y - 2 = 0$

отн. x: $x^2 + x(3y-4) - (3y+2) = 0$

$D = 9y^2 - 24y + 16 + 4(3y+2) =$

$= 9y^2 - 24y + 16 + 12y + 8 = 9y^2 - 12y + 24$

$x^2 + y^2 = \frac{6x + 4y + 4}{3}$

$3(3y^2 - 4y + 8)$

$4(x^2 + y^2) + 5y^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$

$\frac{8(3x + 2y + 2)}{3} + 5y^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0 \mid \cdot 3$

$24x + 16y + 16 + 15y^2 - 45xy + 6x + 9y - 6 = 0$

$15y^2 + 25y - 45xy + 30x + 10 = 0 \mid :5$

$3y^2 + 5y - 9xy + 6x + 2 = 0$

$3y^2 + y(5 - 9x) + 6x + 2 = 0$

$D = 25 - 90x + 81x^2 - 12(6x+2) = 25 - 90x + 81x^2 - 72x - 24 =$

$= 81x^2 - 162x + 1$

$8x^2 - 34x + 30$

$((2x-2)^{-1})' = \ldots (2x-2)$