МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $26x+|x^2-26x|^{\log_5 12} \geqslant x^2+13^{\log_5(-x^2+26x)}$

Обозначим $t=26x-x^2>0$, тогда $t+t^{\log_5 12} \geqslant 13^{\log_5 t}$

Обозначим $z=\log_5 t$, тогда $5^z+5^{z\cdot\log_5 12} \geqslant 13^z$ =>
$\left(\frac{5}{13}\right)^z+\left(\frac{12}{13}\right)^z \geqslant 1$, ~~это~~ функция ~~у~~ с левой стороны убывающая, тогда $f(z)=1$
$\Rightarrow z\leqslant 2 \Rightarrow \begin{cases} t>0 \\ t\leqslant 25 \end{cases}$ из первого уравнения системы получаем $26x-x^2>0 \Rightarrow x\in(0;26)$,
из второго: $26x-x^2 \leqslant 25 \Rightarrow x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[25;26)$

5. $f(n^2)=f(n)+f(n)=2\cdot f(n)$

$f(n)=f(n^2)+f(\frac{1}{n})=2\cdot f(n)+f(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{1}{n})=-f(n)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y) \Rightarrow f(\frac{x}{y})<0$, тогда и только тогда, когда $f(x)<f(y)$

По условию, $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$, $f(29)=7$ $\Rightarrow f(4)=2\cdot f(2)=0$, $f(6)=f(2)+f(3)=0$,
то есть мы любое число выразим через простые множители и узнаем $f(x)$. $f(12)=0$, $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$, и так далее.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Для 9 чисел $f(x)=0$, для 8 чисел $f(x)=1$,
для 3 чисел $f(x)=2$, для 2 чисел $f(x)=3$,
для 2 чисел $f(x)=4$, для 1 числа $f(x)=5$ $\Rightarrow$
кол-во подходящих пар X и Y $= 9\cdot(25-9)$
$+ 8(25-8\cancel{7}-9) + 3\cdot(25-9-8-3) + 2\cdot(25-9-8-3-2)$
$+ 2(25-9-8-3-2-2) = 144+64+15+26 = 231$

Ответ: 231

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Для 9 чисел $f(x)=0$, для 8 чисел $f(x)=1$, для 3 чисел $f(x)=2$, для 2 чисел $f(x)=3$, для 2 чисел $f(x)=4$, для 1 числа $f(x)=5$ => кол-во подходящих пар x и y $= 9\cdot(25-9)+8\cdot(25-9-8)+3\cdot(25-9-8-3)+2\cdot(25-9-8-3-2)+2\cdot(25-9-8-3-2-2)=144+64+15+6+2=231$

Ответ: 231

6. $\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$

$x\in(\frac{2}{3};2]$

$x=\frac{4}{3}$.

$\frac{8-8}{4-2}=0 \geqslant \frac{4}{3}a+b \Rightarrow 0\leqslant -\frac{4}{3}a-b$, если

$x=2$, тогда: $18\cdot4-51\cdot2+28=-2\leqslant 2a+b$.

Если $x=\frac{2}{3}$: $8-34+28=2\leqslant\frac{2}{3}a+b$.

$-2+0\leqslant-\frac{4}{3}a-b+2a+b=\frac{2}{3}a \Rightarrow -2\leqslant\frac{2}{3}a$

$2+0\leqslant-\frac{4}{3}a-b+\frac{2}{3}a+b=-\frac{2}{3}a\Rightarrow -2\geqslant\frac{2}{3}a$.

$\Rightarrow a=-3$

$0\geqslant-4+b\Rightarrow 4\geqslant b$.

$-2\leqslant-6+b\Rightarrow 4\leqslant b\Rightarrow b=4$

Ответ: $a=-3$; $b=4$

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} -6x+y=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$

Пусть $a=x-1$; $b=y-6$, тогда

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$, при этом a и b одного знака, т.к $a\cdot b$ под корнем.

Если $a=0 \Rightarrow b=0 \Rightarrow$ не подходит

Если $b=0 \Rightarrow a=0 \Rightarrow$ не подходит.

1) $a,b>0 \Rightarrow (\sqrt{b}-3\sqrt{a})(\sqrt{b}+2\sqrt{a})=0$, т.к вторая скобка больше 0 $\Rightarrow$

$b=9a \Rightarrow 90=9a^2+b^2=90a^2 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$

2) $a,b<0 \Rightarrow -(\sqrt{-b})^2+6(\sqrt{-a})^2=\sqrt{-a}\cdot\sqrt{-b} \Rightarrow$

$(\sqrt{-b}+3\sqrt{-a})\cdot(\sqrt{-b}-2\sqrt{-a})=0 \Rightarrow b=4a \Rightarrow$

$90=25\cdot a^2 \Rightarrow a=-\sqrt{\frac{90}{25}} \Rightarrow b=-4\sqrt{\frac{90}{25}} \Rightarrow$

$x=1+a=1-3\sqrt{\frac{2}{5}}$, $y=6+b=6-12\sqrt{\frac{2}{5}}$

Ответ: $(1-3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6-12\sqrt{\frac{2}{5}})$ и $(2; 15)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. По формуле ~~сум~~ суммы синусов, $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -2\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$ $\Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$. По основному тригонометрич. тождеству, $\sin(2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$, также $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$. Если $\sin(2\beta) = -\cos(2\alpha+2\beta)$, то $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{1}{17}-\frac{16}{17}+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17} \Rightarrow \sin(2\alpha) = \frac{15}{17}$, $\cos(2\alpha) = \pm\frac{8}{17}$, тогда

$$\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = tg(2\alpha) = \pm\frac{15}{8} \Rightarrow \frac{15}{8}tg^2\alpha \pm tg\alpha - \frac{15}{8} = 0$$

$$tg\alpha = \frac{\pm1\pm\left(\frac{17}{8}\right)}{\left(\frac{15}{8}\right)} = \left[\begin{array}{l}\pm\left(\frac{3}{5}\right)\\ \pm\left(\frac{5}{3}\right)\end{array}\right.$$

Все 4 корня подходят при $\sin(2\alpha) = \frac{15}{17}$; $\cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17}$, $\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{8}{17\sqrt{17}} - \frac{15}{17}\cdot\sin(2\beta) = -\sin(2\beta) \rightleftarrows \pm\frac{4}{\sqrt{17}} = \sin(2\beta)$ — при $\sin(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$ и наоборот. Если $\sin(2\beta) = \cos(2\alpha+2\beta)$, то $\sin(2\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha) = \frac{15}{17}+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{17} \Rightarrow \sin(2\alpha) = -1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z \Rightarrow tg\alpha = \pm1$. Если $tg\alpha = 1$, $\cos(2\alpha+2\beta) = \cos\frac{\pi}{2}+2\beta = -\sin(2\beta)$. Если $tg\alpha = -1$, $\cos(2\alpha+2\beta) = \cos(2\beta-\frac{\pi}{2}) = \sin(2\beta)$. $\Rightarrow$ подходит только

$tg\,\alpha = -1$

Ответ: $\pm\frac{3}{5}$; $\mp\frac{5}{3}$; -1

4.

$r_1 = ?$

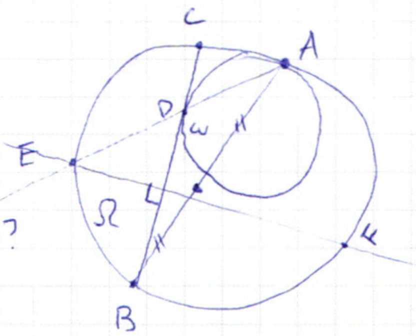
$r_2 = ?$

$\angle AFE = ?$

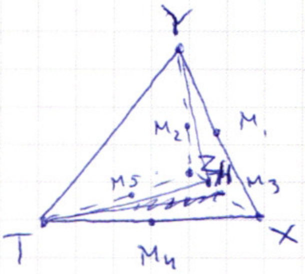
$S_{\triangle AEF} = ?$

$CD = 12$

$BD = 13$



7.



$M_1 - M_5$ – середины ребер

$YH \perp XZ$

Решение

1) M_2M_3 – ср. линия в $\triangle XYZ$ => $M_2M_3 \parallel XY$, аналогично $M_1M_3 \parallel YZ$ => $YM_1M_2M_3$ – параллелограмм, при этом он лежит на сфере => на окружности => прямоугольник, т.к. $M_1M_4 = M_2M_5 = \frac{1}{2}YT$ и $M_1M_4 \parallel M_2M_5 \parallel YT$, $M_1M_2M_5M_4$ – параллелограмм на сфере => прямоугольник, значит, $YT \parallel M_1M_4$, $M_1M_4 \perp M_1M_2$, $M_1M_2 \parallel XZ$ => $YT \perp XZ$, и $YH \perp XZ$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Получаем, что $XZ \perp (HYT)$. Тогда $HT \perp XZ$, значит, $XH = XT \cdot \cos(\angle TXH)$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sqrt{17}\sin(2\alpha+2\beta) = -1$

$17\sin^2(2\alpha+2\beta) = 1$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos t = b$

$tg\,\alpha = ?$ значений $tg\,\alpha \geq 3$

$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{}$

$3x^2 - y$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\beta + \beta + \beta + \beta$

$\sin(\alpha+\alpha)\cos(\alpha+\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \cdot \cos^2\alpha - 1$

$f(R)$ $R > 0$ $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$\frac{3}{4}\pi$

$XY = \sqrt{3}$ $TX = \sqrt{2}$ $TZ = 2$

$XZ = ?$

$r_{min} = ?$

$$\begin{array}{r} 144 \\ +\ 81 \\ \hline 325 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ +\ 17 \\ \hline 81 \end{array}$$

$V = \frac{4}{3}\pi R$

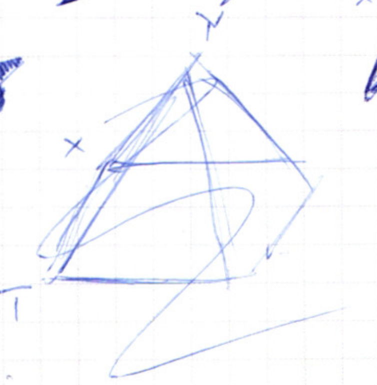
$r = \sqrt[3]{\frac{V \cdot 3}{4\pi}}$

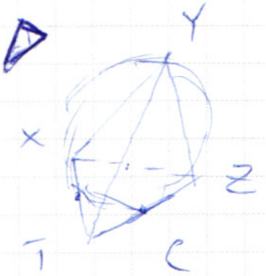
$r_\Omega = ?$

$r_\omega = ?$

$\angle AEF = ?$

$S_{\triangle AEF} = ?$





$CD = 12$

$BD = 13$

$AD^2 = CD^2 + AC^2$

$$\begin{array}{r} 231 \\ -\ 144 \\ \hline 87 \\ -\ 64 \\ \hline 23 \\ -\ 15 \\ \hline 8 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$tg\,\alpha = \frac{\pi}{4}$ sin(90+

~~$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$~~

x^2-y^3

считаем правильно

$(x^2-26)^{\log_5 12}+26x$ $(26-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$\geq (-x^2+26x)^{\log_5 12}+26x$

$3+4+5\cdot a+6$ $x^2-26x=12$

$1+20+6$ $x^2-26x+12=0$ $y-6x$ Я всё знаю

$D=26^2+4\cdot 12$ Я всё решу

нужно порешать

$12\cdot 4=24=48$ cos.nus

cosinus

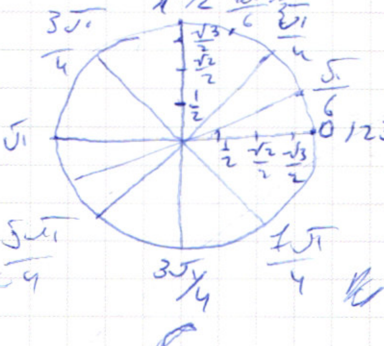
$y^2-36x-xy-6x-y+6$

$xy-6x-y+6\geq 0$

Достань знания из своей головы

$x^2-26x=5$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+6 \geq 8x^2-51x+28$ $2\geq 17+29\geq 18-51+28$



$8-6x\geq(xa+6)(3x-2)\geq 8x^2-51x+28$

$(3x-2)$

$54x^3-36x^2-51x+28$

TXYZ

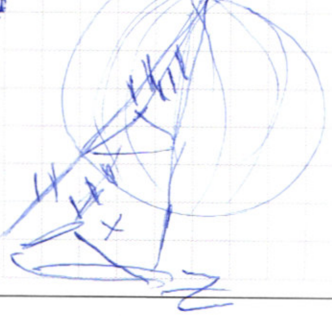
$16\cdot 9+8\cdot 8+3\cdot 5+$

$2\cdot 3+2$

144
+64
208
+15
223
+6
229
231

160
−16

144+64+15+6+2



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)