МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~№5~~ №2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$x-1=a$

$y-6=b$

$$\begin{cases} b+6-6a-6=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

Возведем первое уравнение в квадрат, причем левая часть должна быть неотрицательна.

$$\begin{cases} b-6a\geq 0 \\ b^2-12ab+36a^2=ab \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\geq 6a \\ b^2-13ab+36a^2=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\geq 6a \\ (b-9a)(b-4a)=0 \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $b=9a$

2) $b=4a$

1) $b=9a$

~~$9a^2+b^2$ $b=0$~~

$9a^2+81a^2=90$

$a=\pm1$

Причем условию $b\geq 6a$ подходят значения $a=1$, $b=9$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $b=4a$

$9a^2+16a^2=90$

$a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$

Причём условию $b\geq 6a$ подходят значения $a=-\frac{3\sqrt{10}}{5}$, $b=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$.

Сделаем обратную замену.

в случае 1:

$$\begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$$

в случае 2:

$$\begin{cases} x-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}. \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 1 - \frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5}. \end{cases}$

№3

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$$

Т. к. под логарифмом $26x - x^2 > 0$, то $x \in (0; 26)$.

Следовательно $|x^2 - 26x| = 26x - x^2$.

По свойству логарифмов $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$.

~~Поэтому $(26x - x^2)^{\log_5 12} = 12^{\log_5(26x - x^2)}$~~

Поэтому $(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$$12^{\log_5(26x - x^2)} + (26x - x^2)^{\log_5 5} \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$$

$$12^{\log_5(26x - x^2)} + 5^{\log_5(26x - x^2)} \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 4
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $\log_5(26x-x^2)=t$

У параболы $-x^2+26x$ вершина в точке $x=13$. Значит ее наибольшее значение:

$-169+26-13=169$

Значит $t\le\log_5 169$

$t\le 2\log_5 13$

После замены получаем:

$12^t+5^t\ge 13^t \ /:13^t,\ 13^t>0$

$\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t\ge 1$

Рассмотрим функцию $f(t)=\left(\frac{12}{13}\right)^t+\left(\frac{5}{13}\right)^t$

Т.к. $f'(t)<0$, то функция $f(t)$ монотонно убывает.

Заметим, что $f(2)=1$.

Следовательно в силу монотонного убывания $f(t) \geq 1 \Longleftrightarrow t \leq 2 < 2\log_5 13$. Следовательно,

$$\log_5(26x - x^2) \leq 2$$

$$\begin{cases} 26x - x^2 \leq 25 \\ 26x - x^2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 26x + 25 \geq 0 \\ x \in (0;26) \end{cases}$$

$x \in (0;1];[25;26)$.

Ответ: $x \in (0;1];[25;26)$

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

По формуле суммы синусов:

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\left(\frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2}\right) \cdot$
$\cdot \cos\left(\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ – первая и четвертая четверть,

$1+\operatorname{tg}^2 2\beta = \frac{1}{\cos^2 2\beta}$

$\operatorname{tg} 2\beta = \pm 4$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, следовательно

$\sin 2\beta = \pm\frac{4\sqrt{17}}{17} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ &\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \\ &= 0 \\ &2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = \\ &= 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0 \;|: \cos^2\alpha \\ &5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \;|: \cos^2\alpha \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &-3tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0 \\ &5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &tg\alpha = -1 \\ &tg\alpha = \frac{5}{3} \\ &tg = -1 \\ &tg = \frac{3}{5} \end{aligned}\right.$$

Ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$R = ?$

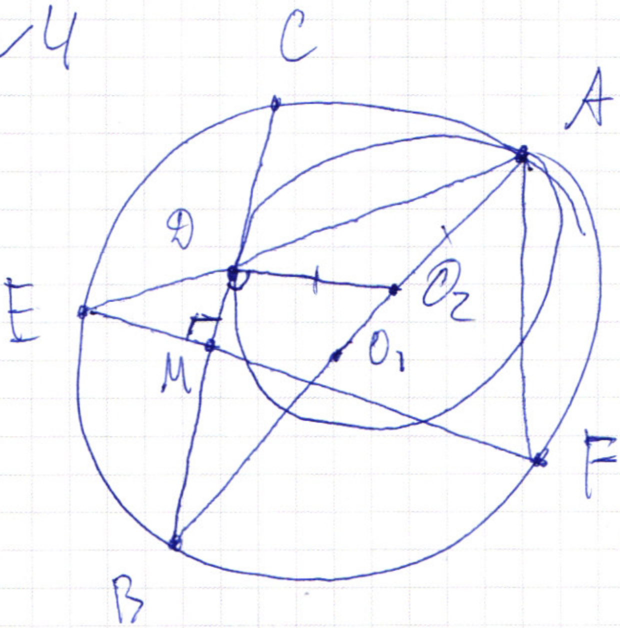
$r = ?$

$\angle AFE = ?$

$S_{AEF} = ?$

$CD = 12$

$BD = 13$



Решение:

1) Проведем радиус O_2D, где O_2 – центр ω. Обозначим в равнобедренном треуг. $\triangle O_2AD$ $\angle ADO_2 = \alpha$. Следовательно ~~$\angle DO_2A$~~ $\angle O_2AD = \alpha$, значит $\angle DO_2A = 180 - 2\alpha$.

2) Т.к. радиус O_2D попадает в точку D, то $O_2D \perp BC$. Т.к. $EF \perp BC$, то $EF \parallel O_2D$. Значит $\angle FEA = \alpha$ как соответственный углу $\angle O_2DA$.

3) Т.к. в точке A общая касательная, то между касательной и хордой AD угол такой же как между касательной и хордой AE. Следовательно дуга AD в окр. ω равна дуге AE в окр. Ω. Поэтому дуга $AD=180^\circ-2\alpha$ в окр. ω, а дуга AE равна $180^\circ-2\alpha$ в окр. Ω.

4) $\angle BO_2D=2\alpha$. Следовательно $\triangle BDO_2$ – прямоуг. и $\angle DBO_2=90-2\alpha$. Значит $\cup AC=180-4\alpha$ в Ω. След. $\cup EC$ в Ω равна 2α.

5) Заметим, что $\angle EFA$ вписанный в Ω и равен $90-\alpha$. Тогда по сумме углов в $\triangle EAF$ $\angle EAF=90^\circ$. Значит EF – диамет Ω.

6) Тогда диаметры AB и EF пересекаются в точке O_1, где O_1 – центр Ω. Обозначим пересечение BC и EF через точку M. Заметим, что M – середина BC, E равноудалена от B и C

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(т.к. хорда BC перпендикулярна EF - диаметру).

7) Поэтому дуги BE и EC равны, а AE - биссектриса ∠BAC в прямоуг. треуг. ABC. По свойству биссектрисы: $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$.

$\frac{AC}{12} = \frac{AB}{13}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{12}{13}$

Пусть $AC = 12c$, $AB = 13c$.

След. по теореме Пифагора:

$BC = 5c$

$5c = 25$

$c = 5$

$AB = 13c = 65$

$AC = 12c = 60$

Поэтому радиус ω равен $\frac{65}{2}$.

8) Заметим, что $\angle CBA = \angle DBO_2 =$
$= 90 - 2\alpha$

$\sin(90-2\alpha) = \frac{12}{13}$

$\cos(90-2\alpha) = \frac{5}{13}$

След. из прямоугольного треуг.
$\triangle O_2DB$: $tg(90-2\alpha) = \frac{O_2D}{BD} = \frac{12}{5}$

O_2D — радиус ω, значит
$O_2D = \frac{12}{5} \cdot 13 = \frac{156}{5}$

9) $\angle AFE = 90 - \alpha$, значит
$\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$

$\sin(90-2\alpha) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{12}{13}$

След. $\sin^2\alpha = \frac{1}{26}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{26}}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$

~~$\angle AFE = \arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}$~~ $\angle AFE = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

10) Заметим, что EF - диаметр большей окружности (Ω). След. из прямоуг. треуг. $\triangle AEF$: $\cos(90-\alpha) = \sin\alpha = \frac{AE}{EF} = \frac{AE}{65}$. След. $AF = 65 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{65}{\sqrt{26}}$.

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha = \frac{EA}{EF} = \frac{EA}{65}$

$EA = 65 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{325}{\sqrt{26}}$

$S_{EAF} = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{65}{\sqrt{26}} \cdot \frac{325}{\sqrt{26}} = \frac{65^2 \cdot 5}{52}$.

Ответ: радиус $\Omega = \frac{65}{2}$, радиус $\omega = \frac{156}{2}$, $\angle AFE = \arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$, $S_{EAF} = \frac{65^2 \cdot 5}{52}$.

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$x, y \in [4;28]$

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0+0=0$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0+0=0$

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$

...

$f(23)=5$

$f(24)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=3$

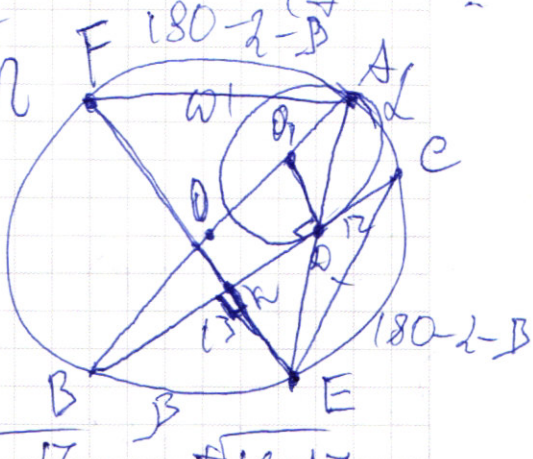
$f(27)=0$

$f(28)=1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Уд~~ $2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{17}$



$\alpha+\beta$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{\sqrt{17}}{17}$

$\sin 2\alpha=\pm\sqrt{1-\frac{17}{289}}=\pm\sqrt{\frac{16\cdot17}{289}}=$

$=\pm\frac{4\sqrt{17}}{17}$

$2\beta=\pm\arccos\frac{\sqrt{17}}{17}+2\pi k,\ k\in Z$

$\beta=\pm\frac{\arccos\frac{\sqrt{17}}{17}}{2}+\pi k,\ k\in Z$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

I. $\frac{\sqrt{17}}{17}\sin 2\alpha+\frac{4\sqrt{17}}{17}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\ \Big|\cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$ $\quad 1+4\operatorname{ctg}2\alpha=-1$

~~$\cos 2\alpha=0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$~~ $\operatorname{ctg}2\alpha=-\frac{1}{2}$

$\operatorname{tg}2\alpha=-2$

~~$\sin 2\alpha=-1$~~ $\quad\sin 2\alpha\neq0\Rightarrow\alpha=\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z$

~~$\alpha=\frac{\pi}{4}+\pi k$~~ $\quad\cos 2\alpha=-\frac{1}{4}$

II. $\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=-1$ $\quad\alpha=\frac{\pm\arccos-\frac{1}{4}}{2}+\pi k$

$1-4\operatorname{ctg}2\alpha=-1$

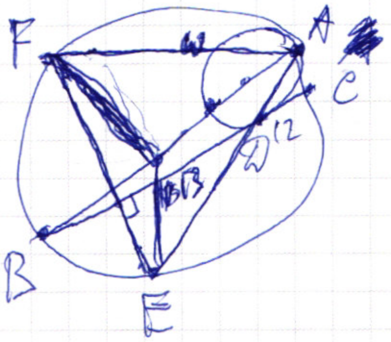
$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{2}$ $\quad\operatorname{tg}2\alpha=2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$CD = 12$

$BD = 13$



$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$~~

~~$\cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\sin^2(2\alpha+2\beta)} = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \sqrt{\frac{16}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$~~

$\sin t + \sin k = 2\sin\frac{t+k}{2}\cos\frac{t-k}{2}$

~~$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad |\cdot\sqrt{17}$~~

~~$-\sqrt{17}\cos 2\beta + 4\sqrt{17}\sin 2\alpha + 17\sin 2\alpha = -2$~~

~~$\sin 2\alpha$~~ ~~$(4\sqrt{17}+17)\sin 2\alpha - \sqrt{17}\cos 2\beta = -2$~~

~~$\sin\alpha + \sin\beta$~~ $= \overset{t}{\sin(\alpha+\beta)} + \overset{k}{\sin(\alpha-\beta)} =$

$= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha + \sin\alpha\cos\beta -$

$- \sin\beta\cos\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f(y^{-1}) = f(x) - f(y) < 0$

Рассмотрим первый случай.

1) Если $f(x) = 0$,

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)