МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

$\sin\alpha=\frac{2t}{1+t^2}$

$\cos\alpha=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

9

3 80 12 15

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45.\end{cases}$$

$2xy = 36 + 45 - 36 = 45$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

~~$\sin 2\alpha (\cos 4\beta + 2\cos^2 2\alpha + 1) = -\frac{2}{5}$~~.

Замена: $2\alpha + 2\beta = a$

$2\beta = b$

$\sin a = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \cos a = \pm\frac{\sqrt{20}}{5} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(a+b) + \sin(a-b) = -\frac{2}{5}$.

$2\sin\frac{a+b+a-b}{2}\cos\frac{a+b-a+b}{2} = -\frac{2}{5}$

$\sin a \cos b = -\frac{1}{5} \Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos b = -\frac{1}{5}$

$\cos b = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin b = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a =$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}}\cos b - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin b = -\frac{1}{\sqrt{5}}(\cos b - \sin b)$

Итого у нас будет 4 ур-ния: ~~на каждой рисун~~ по 1 на каждое значение пары $(\sin b; \cos b)$

1) $\sin(a-b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}$

2) $\sin(a-b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$

3) $\sin(a-b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$

4) $\sin(a-b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5}.$

Итого $\sin(a-b) = \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5};\ 0;\ \frac{4}{5}.$

Восп. универ. триг. подст. $\sin(2\alpha) = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

Пусть $\operatorname{tg}\alpha = t$

1) $-\frac{4}{5} = \frac{2t}{1+t^2} \Rightarrow -4-4t^2 = 10t$

$4t^2+10t+4=0$

$2t^2+5t+2=0$

$(2t+1)(t+2)=0$

$t = -\frac{1}{2};\ -2.$

2) $0 = \frac{2t}{1+t^2}$

$2t=0$

$t=0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0.$

3) $\frac{4}{5} = \frac{2t}{1+t^2}$

$4t^2-10t+4=0$

$(2t-1)(t-2)=0 \Rightarrow t = \frac{1}{2};\ 2.$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -2;\ -\frac{1}{2};\ 0;\ \frac{1}{2};\ 2.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-1(x-6)} \\ x^2-12x+36+36y^2-36y+9-36-9=45. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90. \end{cases}$$

Замена: $x-6=a$; $2y-1=b$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2=90 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} ab\geq 0 \\ a-6b\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a\geq 0;\ b\geq 0 \\ a\leq 0;\ b\leq 0 \end{array}\right. \\ a\geq 6b \end{cases}$

(1) $a-6b=\sqrt{ab}$

$a^2-12ab+36b^2=ab$

$a^2-13ab+36b^2=0.$

$(a-4b)(a-9b)=0$

$\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=9b. \end{array}\right.$

Ⅰ $a = 4b$

② $a^2 + 9b^2 = 90.$

$16b^2 + 9b^2 = 90$

$b^2 = \frac{90}{25} = \frac{9}{5} \Rightarrow b = \pm \frac{3\sqrt{5}}{5}.$

$a = \pm \frac{12\sqrt{5}}{5}$

Пары $a;b$ $\left(\frac{12\sqrt{5}}{5}; \frac{3\sqrt{5}}{5}\right); \left(-\frac{12\sqrt{5}}{5}; -\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$

не удовл. О.Д.З.

Ⅱ $a = 9b.$

$81b^2 + 9b^2 = 90$

$b^2 = 1$

$b = \pm 1.$

$a = \pm 9.$

Пара чисел $(-9; -1)$ не удовл. О.Д.З.

$\Rightarrow a = 9; b = 1.$

$\begin{cases} x - 6 = 9 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 1. \end{cases}$

Ответ: $x = 15; y = 1.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\cancel{10x-x^2}\ 10x-x^2 \cancel{...} > 0$

$x^2<10x$

$x^2-10x<0$

$x(x-10)<0$

$x\in(0;10)$

$10x+4^{\log_3|10-x^2|} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

т.к. $a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

т.к. $10-x^2>0$ по О.Д.З. $\Rightarrow$ модуль можно опустить

$10x+4^{\log_3(10-x^2)} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2+4^{\log_3(10-x^2)}-5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0$

Замена $10x-x^2=a$

$a+4^{\log_3 a}-5^{\log_3(a)} \geq 0 \qquad a+a^{\log_3 4}-a^{\log_3 5} \geq 0$

$a=3^{\log_3 a}$

$3^{\log_3 a}+4^{\log_3 a}-5^{\log_3(a)} \geq 0$

Замена: $\log_3 a=b$

$3^b+4^b-5^b \geq 0. \qquad 5^b\left(\frac{3^b+4^b}{5^b}-1\right) \geq 0$

$3^b=c$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5
(Нумеровать только чистовики)

$\log_5(3^b+4^b) > b$

$\log_5\left(3^b\left(1+\frac{4^b}{3^b}\right)\right) > b$

$\log_5\left(1+\frac{4^b}{3^b}\right) > b(1-\log_5 3)$

$b\log_5\left(\frac{5}{3}\right)$

$b_{max} =$

$3^b = c$

$c + 4^{\log_3 c} - 5^{\log_3 c} \geq 0$

$c + c^{\log_3 4} - c^{\log_3 5} \geq 0$

$c\left(1 + c^{\log_3 \frac{4}{3}} - c^{\log_3 \frac{5}{3}}\right) \geq 0$

$\log_3(10x - x^2) \leq 2.$

$10x - x^2 \leq 9$

$(x-9)(x-1) \geq 0$

$x \in [1;9] \cap (0;1] \cup [9;10)$, т. к. в этом пром нет x_{max} ⇒ второй при $b \leq 1$ не попадёт в ОДЗ.

Ответ: $(0;1] \cup [9;10)$

$\boxed{\begin{matrix} b \leq 2 \\ b \geq 1 ? \end{matrix}}$ ← из т. Пиф.

$a' = 10 - 2x$ ⇒

⇒ $x_{max} = 5$. $a_{max} = 25$.

$b' =$

$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x \geq 1$

b может ≥ 1 при

пусть 1 ⇒

⇒ $\log_3(10x - x^2) \geq 1$

$x^2 - 10x + 3 \leq 0$

$D_1 = 25 - 3 = 22$

$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{22}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

Дано:

$\Omega \cap \omega = A$.

AB – диам Ω

BC – хорда.

BC кас $\omega = D$.

$AD \cap \Omega = F$

$CD = \frac{15}{2}$

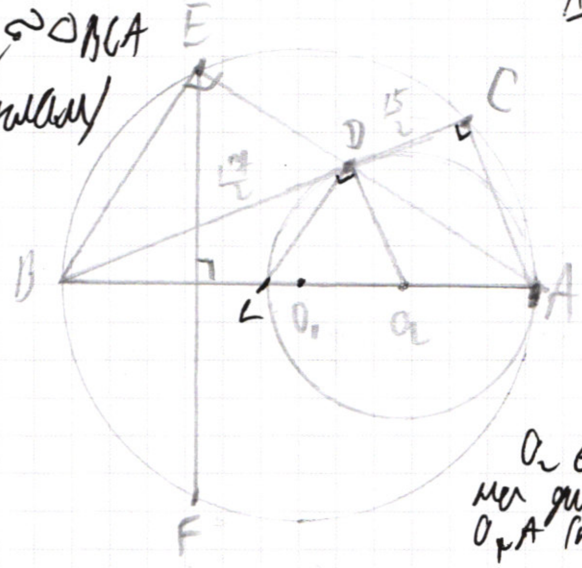
$BD = \frac{17}{2}$

R, r – ?

$\angle AFE$ – ?

S_{AEF} – ?

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по углам)



$\frac{AC}{r} = \frac{32}{17}$

$\triangle ACD \sim \triangle EBD$

$\Rightarrow \frac{ED}{CD} = \frac{BD}{AD}$

$O_2 \in AB$, т.к. A лежит на диам. O_2 лежит на O_1A (по св-ву кас окр)

$\triangle BEA \sim \triangle LDA \Rightarrow \frac{AD}{EA} = \frac{r}{R}$

$$\begin{cases} 16^2 + \left(\frac{32}{17}r\right)^2 = 4R^2 \text{ – по т. Пиф в } \triangle ABC. \\ \left(\frac{17}{2}\right)^2 = BL \cdot AD = (2R - 2r) \cdot 2R = 4(R-r)R \end{cases}$$

(теор. о кв. кас)

$16^2 + \left(\frac{32}{17}\right)^2 r^2 = R^2$

$\times \begin{matrix} 17 \\ 17 \end{matrix}$
119
17
289

$R - \frac{\left(\frac{17}{2}\right)^2}{4R} = r$

$r = -\frac{289}{16R} + R$

$16^2 + \left(\frac{32}{17} \cdot R - \frac{32}{17} \cdot \frac{289}{16R}\right)^2 = 4R^2$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$16^2 + \left(\frac{32}{17}\right)^2 R^2 - 2 \cdot \frac{32}{\cancel{17}} \cancel{R} \cdot \frac{2 \cdot \cancel{17}}{\cancel{R}} + \left(\frac{34}{R}\right)^2 = R^2$

$256 + \frac{1024 R^2}{289} - 128 + \frac{1156}{R^2} = R^2$

$1024 R^4 - 4 \cdot 289 R^4 + 128 \cdot 289 R^2 + 1156 \cdot 289 = 0$

$289 \cdot 4 =$

$1156 - 1024 = 530 \quad \frac{270}{2} = 135$

$\cancel{-135 R^4 + 32 \cdot 289 R^2 +}$

$-270 R^4 + 64 \cdot 288 R^2 + 576 \cdot 289 = 0.$

$R = 17$

$r = 17 - \frac{\cancel{289}^{17}}{\cancel{17} \cdot 16} = 15\frac{15}{16}$

1156 | 4
8 | 28
35
32
26

1156 | 2
10 | 578
15
14
16

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$2\le x\le 25$

$2\le y\le 25$

$f(x/y)<0$

Даны все простые числа на пром $[2;25]$

$2;3;5;7;11;13;17;19;23.$

$[\frac{2}{4}]=[\frac{1}{2}]=0$

$[\frac{3}{4}]=0$ $[\frac{5}{4}]=1$

$[\frac{7}{4}]=1$ $[\frac{11}{4}]=2$ $[\frac{13}{4}]=3$ $[\frac{17}{4}]=4$ $[\frac{19}{4}]=$
$=4$ $[\frac{23}{4}]=5.$

$f(2)=f(1\cdot 2)=f(1)+f(2)=f(1)+0=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(1)=0.$

~~$f(0)=f(0\cdot 2)=f(0)$~~

$f(1)=f(\frac{1}{2}\cdot 2)=f(\frac{1}{2})+f(2)=0$

$f(\frac{1}{2})+0=0 \Rightarrow f(\frac{1}{2})=0.$ $f(1)=f(\frac{1}{p})+f(p)\Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{p})=-f(p)$

$f(\frac{2}{p})=f(2)+f(\frac{1}{p})=0+f(\frac{1}{p})=-f(p)$

$f(n)=f(p_1\cdot p_2)=f(p_1)+f(p_2)$

$f(\frac{1}{n})=f(\frac{1}{p_1}\cdot\frac{1}{p_2})=f(\frac{1}{p_1})+f(\frac{1}{p_2})=-f(p_1)-f(p_2)$

n – число, ~~если из 2~~ или 2 прост дел. p_1 и p_2.

$\boxed{f(\frac{m}{n})=f(m)-f(n)}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 9
(Нумеровать только чистовики)

$f(2)=0$	0	$f(13)=3$	3
$f(3)=0$	0	$f(14)=f(7\cdot 2)=1$	1
$f(4)=f(2\cdot 2)=0$	0	$f(15)=f(5\cdot 3)=1$	1
$f(5)=1$	1	$f(16)=f(4\cdot 4)=0$	0
$f(6)=f(2\cdot 3)=0$	0	$f(17)=4$	4
$f(7)=1$	1	$f(18)=f(2\cdot 9)=0$	0
$f(8)=f(4\cdot 2)=0$	0	$f(19)=4$	4
$f(9)=f(3\cdot 3)=0$	0	$f(20)=f(5\cdot 4)=1$	1
$f(10)=f(5\cdot 2)=1$	1	$f(21)=f(7\cdot 3)=1$	1
$f(11)=2$	2	$f(22)=f(11\cdot 2)=2$	2
$f(12)=f(4\cdot 3)=0$	0	$f(23)=5$	5
		$f(24)=f(6\cdot 4)=0$	0
		$f(25)=f(5\cdot 5)=2$	2

x	2	3	4	6	8	9	12	16	18	24	5	7	10	14	15
$f(x)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1

20	21	11	22	25	13	17	19	23
1	1	2	2	2	3	4	4	5

Пусть ~~n, m - нат~~ n, m — нат числа. $2 \le n \le 25$, $2 \le m \le 25$. Тогда

$$f(1) = f\left(\frac{1}{n}\cdot n\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n)$$

Т.к. $f(1)=0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) = -f(n)$

$$\Rightarrow f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) + f\left(\frac{1}{n}\right) = f(m) - f(n)$$

Выше выписаны x и $f(x)$. Т.к. $f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(y) > f(x)$. Для этого подсчитаем кол-во чисел, ~~для~~ при которых $f(y) > f(x)$

$10\cdot 14 + 7\cdot 7 + 3\cdot 4 + 1\cdot 3 + 2\cdot 1 = 140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 205$ (подсчёт проходил слом. таблицы сверху)

Ответ: 205 пар чисел.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$-12 \quad =3$

$-2+9-3=4$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$$

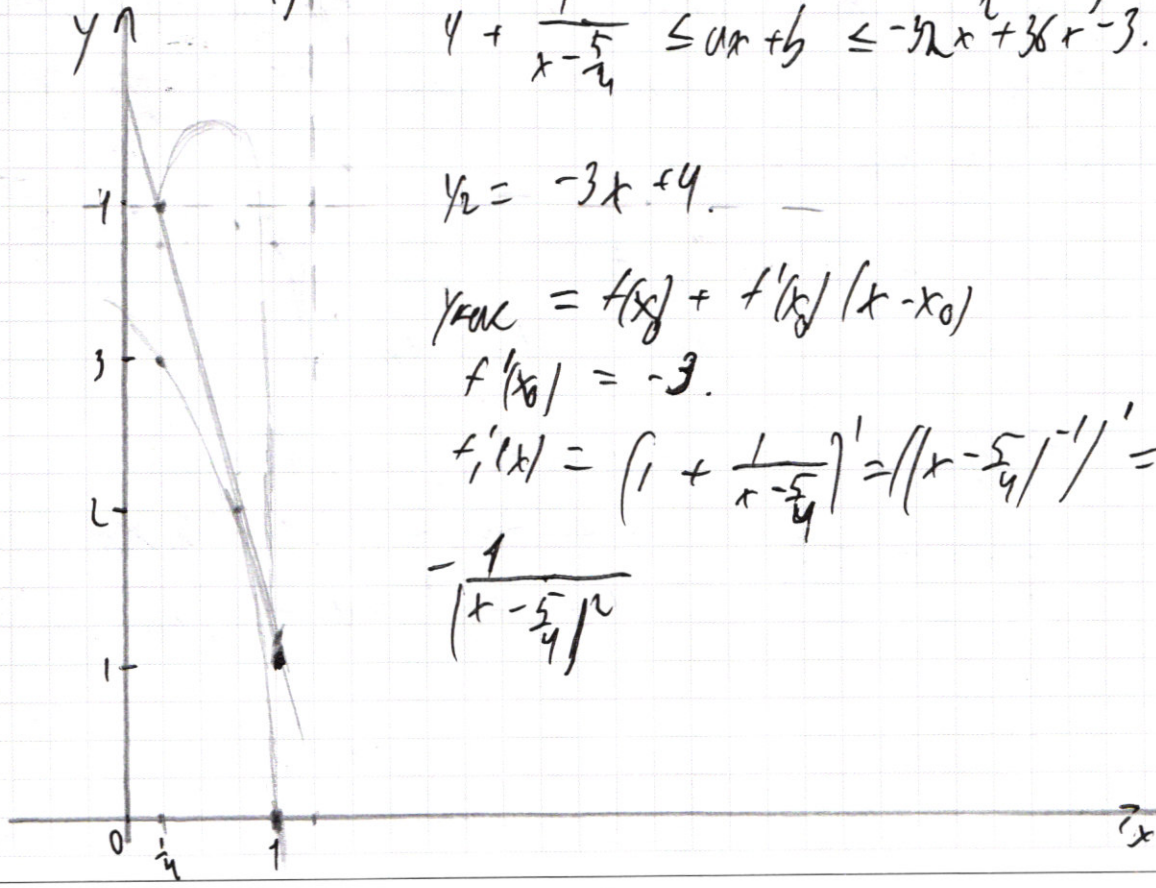
$-4 \qquad -32+36-3=1$

$$\frac{16x-20+4}{4x-5} \le ax+b \le -2\left(16x^2-18x+\frac{3}{2}\right)$$

$$\cancel{16x^2-18x+\frac{3}{2}=\left(4x-\frac{9}{4}\right)^2-\left(\frac{9}{4}\right)^2+\frac{3}{2}=\left(4x-\frac{9}{4}\right)^2-}$$

$$\cancel{-\frac{81}{16}+\frac{3}{2}-\frac{57}{16}}$$

$$\cancel{4+\frac{4}{4\left(x-\frac{5}{4}\right)} \le ax+b \le -2\left(16x\left(4x-\frac{9}{4}\right)^2-\frac{57}{16}\right)}$$



$$4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$$

$$y_2=-3x+4.$$

$$y_{кас}=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

$$f'(x_0)=-3.$$

$$f_1'(x)=\left(1+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}\right)'=\left(\left(x-\frac{5}{4}\right)^{-1}\right)'=$$

$$-\frac{1}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\frac{-1}{(x-\frac{5}{4})^2} = -3$$

$$1 = 3(x-\tfrac{5}{4})^2$$

$$(x-\tfrac{5}{4})^2 = \tfrac{1}{3}$$

$$x-\tfrac{5}{4} = \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}} \Rightarrow x = \tfrac{5}{4} \pm \sqrt{\tfrac{1}{3}} = \tfrac{5}{4} \pm \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y_к = 4 + (\tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{\sqrt{3}})\cdot 3 = 4 + \tfrac{15}{4} - 3\sqrt{3}$$

$$y_{к_2} = 4 + \frac{1}{\cancel{\frac{5}{4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \cancel{-\frac{5}{4}}} - 3(x + \tfrac{5}{4} - \tfrac{1}{\sqrt{3}}) =$$

$$= 4 - \sqrt{3} - 3x + 3\sqrt{3} - 3\cdot\tfrac{5}{4}$$

$$\cancel{f(x)} = f_2 = -32x^2 + 36x - 3$$

т.к. ~~f_2~~ график f_2 — парабола, ветви вниз, т.к. $f_2(1) < f_2(\frac{1}{4}) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ a min, при кас. f_1 и прохождении через $f_2(1)$. a max, при кас f_1 и прохождении через $f_2(\frac{1}{4})$

$$y_{кас_1} = a_1x + b_1$$

$$1 = a_1 \cdot 1 + b_1 \Rightarrow 1 = a_1 + b_1$$

$$f'(x) = a_1 \qquad y_{кас} = f(x_0) + a_1(x - x_0)$$

$$\frac{-1}{(x_0-\frac{5}{4})^2} = a_1 \qquad 1 = \underbrace{f(x_0)} + a_1\cdot 1 - a_1x_0$$

$$1 = \sqrt{-a_1} + a_1 - a_1x_0$$