МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

Возведём (1) в ^{2}:

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$

$(x-18y+3)\cdot(x-8y-2)=0$ $\quad (x\geq 12y) \longrightarrow$ (п.г. ≥ 0) $\to *$

$$\left[\begin{array}{ll} \text{а)} & x=18y-3 \\ \text{б)} & x=8y+2 \end{array}\right.$$

Подставили в (2)

а) $(18y-3)^2+36y^2-12(18y-3)-36y=45$

$324y^2-108y+9+36y^2-216y+36-36y=45$

$360y^2-360y=0$

$y(360y-360)=0$

$$\left[\begin{array}{l} y=0, \text{ тогда } x=-3 \text{ - не подходит по } * \\ y=1, \text{ тогда } x=15 \end{array}\right.$$

б) $(8y+2)^2+36y^2-12(8y+2)-36y=45$

$64y^2+32y+4+36y^2-96y-24-36y=45$

$100y^2-100y-65=0$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad x=6+\frac{24}{\sqrt{10}} \text{ - не подх. по } * \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}}, \quad x=6-\frac{24}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Ответ: $\{(15;1);(6-12\cdot\sqrt{\frac{2}{5}};\frac{1}{2}-\frac{3}{10})\}$

5

Посчитаем значения в простых числах:

$f(2)=f(3)=0$;

$f(5), f(7)=1$;

$f(11)=2$;

$f(13)=3$;

$f(17), f(19)=4$;

$f(23)=5$

Зная эти значения и соотношение, что $f(ab)=f(a)+f(b)$, можем посчитать значение во всех натуральных числах.

$f=0$: в $4,6,8,9,12,16,18,24$;

$f=1$: в $10,14,15,20,21$;

$f=2$: в $22,25$;

Таким образом на отрезке от 2 до 25 f принимает значения (0) - 10 раз, значение (1) - 7 раз, значение (2) - 3 раза; значение (3) - 1 раз, значение (5) - 1 раз; значение (4) - 2 раза

Заметим, что $f(\frac{x}{y})+f(y)=f(x)$, то есть $f(\frac{x}{y})=f(x)-f(y)$.

Разобьём тогда все пары на (x,y) и (y,x). Из них либо для обеих $f=0$, либо ровно для одной f - принимает отриц. значение.

Получается, нам необходимо вычесть из общ. кол-во пар (x,y), кол-во пар, для которых $f(x)=f(y)$, и оставшееся кол-во разделить на 2 - это и будет искомое кол-во пар.

Получаем: $((24\cdot23)-(10\cdot9)-(7\cdot6)-(3\cdot2)-(2\cdot1))/2=(552-90-42-8)/2=206$

Ответ: 206

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Произведём замену:

$-x^2+10x=3^t$

Преобразуя, получим: $3^t+4^t \geq 5^t$

Разделим на: $5^t>0$; Получим:

$\left(\frac{5}{3}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1$

Слева функц. монотонно убыв., а справа const, $\Rightarrow$ max одно пересечение.

При $t=2$ происходит равенство $\Rightarrow$ что $t \leq 2$.

Получили неравенство: $-x^2+10x \leq 9 \longrightarrow x\in[-\infty;1]\cup[9;+\infty]$

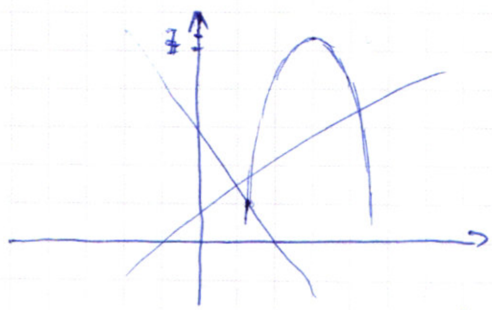
В силу ОДЗ: $-x^2+10x>0 \Rightarrow x>0$ или $x\geq 10$

С учётом ОДЗ $\Rightarrow x\in(0;1]\cup[9;10)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$

6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$



правая 1-я часть неравенств - парабола (ветви вниз).

На границе заданного интервала $[\frac{1}{4};1]$ она проходит через точки $A(\frac{1}{4};4)$ и $B(1;1)$. Прямая, которая соединяет точки A и B имеет уравнение $-4x+5$.

Для того, чтобы условие задачи выполнялось, нужно, чтобы прямая

$ax+b$ находилась не выше, чем $-4x+5$ на заданном интервале.

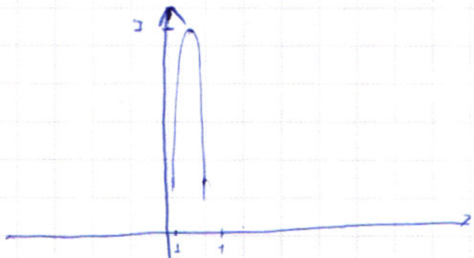
То есть, чтобы $ax+b \le -4x+5$, при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$.

Это означает, что прямая $ax+b$ будет пересекать границы интервала $x = \frac{1}{4}$ и $x = 4$ в точках, которые лежат не выше точек a и b соответственно.

Проверим, что левая часть неравенства выполняется для прямой $-4x+5$.

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le -4x+5$$

Знаменатель <0 на интервале от $x \in [\frac{1}{4}; 1]$, домножим на него:



$16x-16 \ge (-4x+5)\cdot(4x-5)$

$16x^2-24x+9 \ge 0$

$(4x-3)^2 \ge 0$

Это верное неравенство, оно превращается в равенство в одной точке $x = \frac{3}{4}$, т.е. прямая $-4x+5$ является касательной к функции в левой части уравнения.

Таким образом, если какая-то другая прямая, которая будет пересекать границу интервала $x = \frac{1}{4}$ и $x = 1$ в точках, которые лежат ниже точек A и B соответственно, то она перестанет быть касательной и начнёт пересекать функцию в левой части неравенства, более, чем в одной точке. Тогда левая часть неравенства не будет выполнена для всех точек $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

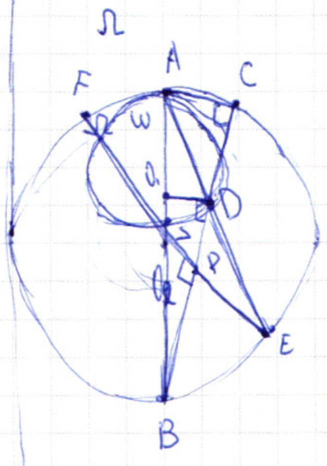
Следовательно ~~прямая~~ прямая $ax+b$ может пересекать границу интервала $x=\frac{1}{4}; x=4$ только в точках A и B. Таким образом, существ. только одна такая прямая $-4x+5$

Ответ: $a=-4$; $b=5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4

Рассмотрим гомотетию $\omega \to \Omega$ с центром в точке A. Она переводит O_1 в O_2 и D в E, при этом $O_2E \perp BC$, т.к $O_1D \perp BC$, т.к. BC - касательная $\Rightarrow O_2$ лежит на EF, EF - серед. перпенд. BC. $\Rightarrow$ Дуги CE и BE равны (2α), и дуги AF и BE - равны, т.к это накрест. леж. центр-углы



Следовательно:

$CP = PB = \frac{BC}{2} = 8 \to DP = \frac{1}{2}$

AB - диаметр $\to$ угол $ACB = \angle AEB = 90°$

$\Rightarrow EP$ - высота в прям. уг. $\triangle DEB \Rightarrow EP = \sqrt{DP \cdot PB}$

EF - диаметр $\to \angle FAE = 90°$, $\Rightarrow \angle AFE = 90° - \angle AEF = \angle PDE$.

$PE = \sqrt{DP^2 + EP^2} = \frac{\sqrt{17}}{2} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$\triangle ACD \sim_{\triangle} EPD \to AC = \frac{ED \cdot CD}{DC} = 30$

$R_\omega = O_1D = \frac{AC \cdot DB}{DC} = \frac{30 \cdot \frac{17}{2}}{16} = \frac{15 \cdot 17}{16} = \frac{255}{16}$

$R_\Omega = EP + O_2P = EP + \frac{AC \cdot PB}{BC} = 2 + \frac{30 \cdot 8}{16} = 17$

$S_{AFE} = \frac{FE^2 \cdot \sin\angle AFE \cdot \cos\angle AFE}{2} = \frac{(2 \cdot 17)^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17-4^2}}{\sqrt{17}}}{2} = 2 \cdot 17^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{17}}} = 8 \cdot 17 = 136$

Ответ: $S_{AEF} = 136$; $R_\omega = \frac{255}{16}$; $R_\Omega = 17$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x^2+12x=45-36y^2+36y$

$x(x+12)=45-36y^2+36y$

$x=0$ или $x=-12$

$36y^2-36y-45=0$

$x=\left(\sqrt{2xy-12y-x+6}+12y\right)$

$D=(36)^2+4\cdot36\cdot45=1296+6480=$

$\sqrt{7776}$

$-12-12y=\sqrt{-24y-12y+12+6}$;

$\sqrt{-24y-12y+18}$;

$360y-360=0$

$360y=360$; $y=1$; тогда $x=$

$144-144y=-24y-12y+12+6$

$144-18=-36+144y$

$126=108y$

$y=\frac{126}{108}=\frac{42}{36}=\frac{21}{18}=\frac{7}{6}$

$x^2+36\left(\frac{7}{6}\right)^2-12x-36\cdot\frac{7}{6}=45$ $\quad D=144+4\cdot38=144+152=296$

$x^2+49-12x-42=45$

$x^2-12x-38=0$;

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \sin 2\beta + \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$10+20+3=\boxed{33}$

5

$f(2), f(3) = 0$; $f(5), f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17), f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$24 \cdot 23 = 552$

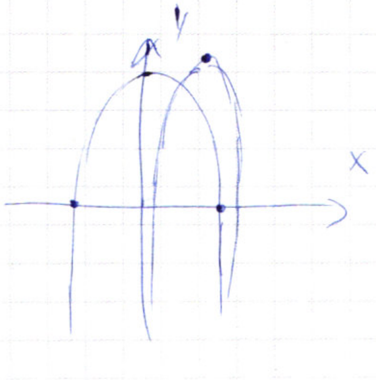
$f=0$: в 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24

$f=1$: в 10, 14, 15, 20, 21

$f=2$: в 22, 25

0

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$; $\Rightarrow$ $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

ОДЗ:

$10x - x^2 > 0$

$x(10 - x) > 0$

$x > 0$ или $x < 10$