МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1)
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$
$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$$

· $\sin(2\alpha+2\beta)=2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=$
$=2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

· $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+$
$+\sin 2\alpha=2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=$

$=2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$\Rightarrow 2\cos 2\beta=-\frac{8}{17}\cdot\left(-\frac{\sqrt{17}}{1}\right)=\frac{8}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\cos^2\beta-1=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$2\cos^2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}+1 \Rightarrow \cos\beta=\pm\sqrt{\frac{4+\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}}$

$\sin\beta=\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{17}-4-\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}}=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{17}-4}{2\sqrt{17}}}$

$\Rightarrow$
$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\left(\pm\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$

$8\sin\alpha\cos\alpha\pm(2\cos^2\alpha-1)=-1$

• Знак "+", $\sin 2\beta>0$

$8\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha=0$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha+\cos\alpha)=0$

$\Rightarrow \cos\alpha = 0$ or $4\sin\alpha = -\cos\alpha$

(tgα не определён) $\quad tg\alpha = -\frac{1}{4}$

• Знак "–", $\sin 2\beta < 0$

$8\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha = -2$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + 1 = 0$

$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \Rightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = 0$ or $4\cos\alpha = -\sin\alpha$

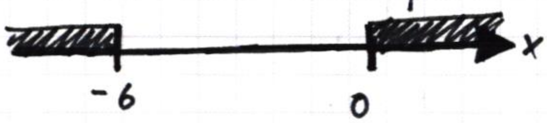
$tg\alpha = 0 \qquad tg\alpha = -4$

3 значения, для каждого из которых определён tgα.

Ответ: $-\frac{1}{4}, -4, 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3 $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \ge |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$x(x+6)>0 \Rightarrow$ 

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \ge (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} - (x^2+6x)^{\log_4 5} + (x^2+6x)^1 \ge 0$

$x^2+6x>0, \quad x^2+6x = a$

$a^{\log_4 3} + a - a^{\log_4 5} \ge 0$

$a^{\log_4 3} + a \ge a^{\log_4 5}$

$\left[1 + a^{\log_4 \frac{4}{3}} \ge a^{\log_4 \frac{5}{3}}\right]$

$1 \ge \left(a^{\log_4 \frac{5}{3}} - a^{\log_4 \frac{4}{3}} = a^{\log_4 \frac{4}{3}}\left(a^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1\right)\right)$

$\log_4 \frac{4}{3} > 0, \ \log_4 \frac{5}{3} > 0, \ \log_4 \frac{4}{3} < 1, \ \log_4 \frac{5}{3} < 1$

$\to$ при росте x при $x>0$ или при уменьшении x при $x<-6$ обе части неравенства монотонно растут $\Rightarrow$ с каждой стороны не больше 1 точки пересечения с равенством

▷ $a = 16$

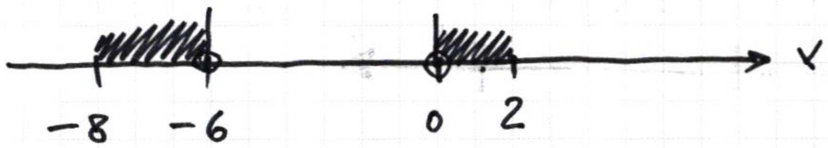
$1 + 16^{\log_4 \frac{4}{3}} = 1 + \frac{4}{3}^{\log_4 16} = 1 + \frac{16}{9} = \frac{25}{9}$

$16^{\log_4 \frac{5}{3}} = \frac{25}{9}$ $\to$ очевидное решение (и единственное) для случая равенства

$x^2+6x=16$

$x^2+6x-16=0$, $D=36+4\cdot16=36+64=100$

$x=\frac{-6\pm10}{2}=-3\pm5 \rightarrow -8$; $\rightarrow 2$



$0<x\leq2$: $1+a^{\log_4\frac{4}{3}}>a^{\log_4\frac{5}{3}}$

$-8\leq x<-6$: $1+a^{\log_4\frac{4}{3}}>a^{\log_4\frac{5}{3}}$

$\Rightarrow [-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $[-8;-6)\cup(0;2]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

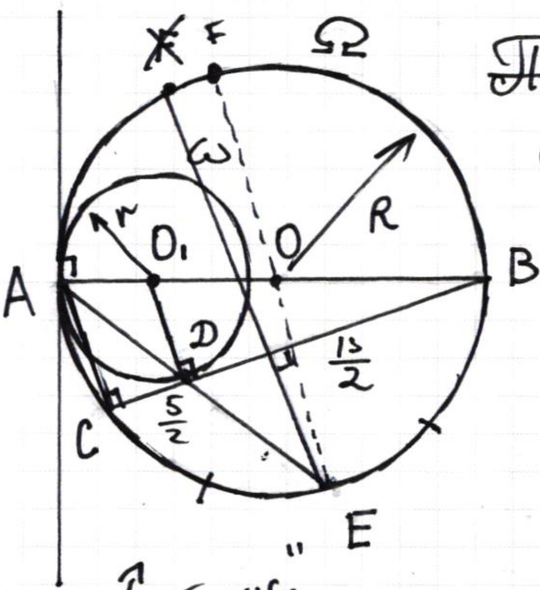
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

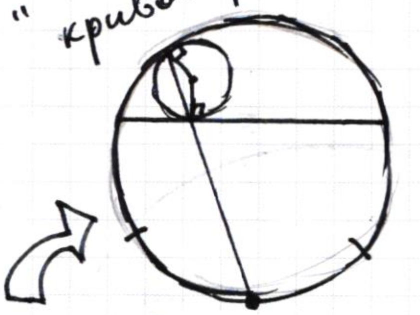
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 Дано:



"кривой рис."



Лемма Архимеда

$R = ?$ $r = ?$

$\angle AFE = ?$

$S_{AEF} = ?$

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$\Rightarrow CB = 9$

$O_1D \parallel FE$, т.к. они $\perp BC$

~~По Th. Архи~~

По лемме Архимеда для окружностей, дуги CE и BE равны $\Rightarrow$ FE проходит через т. O

$\angle CFE = \angle BFE$

$\angle ACB = 90°$, т.к. AB - диаметр

$\Rightarrow$ по подобию треугольников

$\cancel{\frac{AO_1}{AB} = \frac{CD}{CB}}$ $\frac{O_1B}{AB} = \frac{DB}{CB} =$

$= \frac{13}{2}\cdot\frac{2}{18} = \frac{13}{18} = \frac{2R-r}{2R}$

$26R = 36R - 18r$

$[18r = 10R]$, $9r = 5R$

$\sin\angle ABC = \frac{r}{2R-r}$

$\Rightarrow AC = 2R\,\frac{r}{2R-r} = \cancel{\frac{18}{2}r\,\frac{r}{\frac{18}{2}r - r}} =$

$\cancel{\frac{15r^2}{15r-2r} = \frac{15}{13}r}$

$\cancel{CB^2 = (2R)^2 - AC^2 = \frac{18^2}{4}r^2 - \frac{15^2}{13^2}r^2 =}$

$\cancel{r^2 \cdot 15^2\left(\frac{169-4}{169\cdot 4}\right)}$ $\cancel{CB = 9 = r\cdot 15\cdot\frac{\sqrt{165}}{13\cdot 2}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{\frac{9\cdot 13\cdot 2}{18\sqrt{165}} = r = \frac{6\cdot 13}{5\sqrt{165}},\ R = \frac{15}{4}\cdot\frac{9\cdot 13\cdot 2}{15\sqrt{165}} = \frac{9\cdot 13}{2\sqrt{165}}}$

задача 4 стр 2

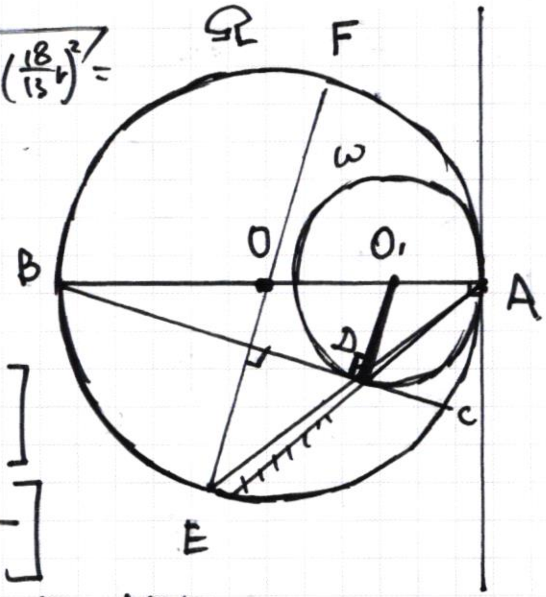
$R = 1{,}8r$

$AC = \frac{18}{13}r$ (подобие $\triangle$)

$\Rightarrow CB = 9 = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{18}{13}r\right)^2} =$

$= 18r\sqrt{\left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{13}\right)^2} =$

$= \frac{18r}{5\cdot 13}\sqrt{169-25} = \frac{12\cdot 18\cdot r}{5\cdot 13}$



$\left[r = \frac{9\cdot 5\cdot 13}{12\cdot 18_2} = \frac{5\cdot 13}{24} = \frac{65}{24}\right]$

$\left[R = \frac{9}{5}\cdot\frac{5\cdot 13}{24} = \frac{9\cdot 13}{24} = \frac{117}{24}\right]$

$\angle AFE = \angle ABE$ (внутр. углы) $= \frac{1}{2}\angle AOE$

$\angle AEB = 90^\circ$ (угол на диаметр)

$\angle AO_1D = \angle AOE$

$r^2 + r^2 - 2r^2\cdot\cos\angle AOE = AD^2 =$

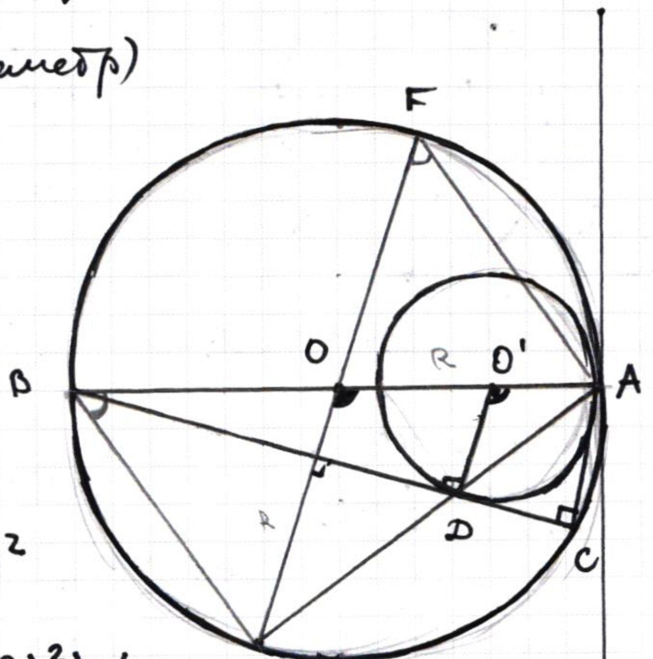
(Th. косинусов для $\triangle AO_1D$) $=$

$= AC^2 + CD^2$

$r^2(1 - 2\cos\angle AOE) =$

$= \frac{25}{4} + \left(\frac{18}{13}\right)^2 r^2$

$1 - 2\cos\angle AOE = \frac{25}{4r^2} + \left(\frac{18}{13}\right)^2$



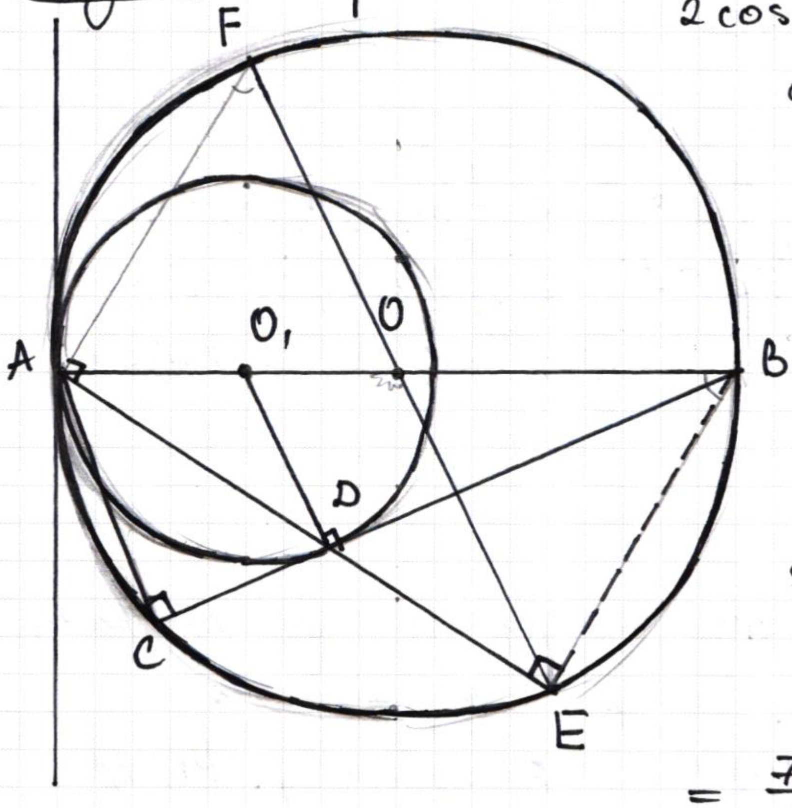
$\cos\angle AOE = \left(1 - \frac{25}{4r^2} - \left(\frac{18}{13}\right)^2\right)/2 = E$

$= \dfrac{1 - \frac{25}{4\cdot 25}\cdot\frac{4\cdot 12^2}{13^2} - \frac{18^2}{13^2}}{2} = \frac{13^2 - 12^2 - 18^2}{2\cdot 13^2} = -\frac{23}{26}$

$\cos\angle AOE = -\frac{23}{26} = \cos(2\angle ABE) = 2\cos^2 ABE - 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4 стр. 3



Пусть $\angle ABE = \alpha$

$2\cos^2 ABE = \frac{3}{26}$

$\cos^2 ABE = \frac{3}{52}$

$\cos ABE = \frac{3}{2\sqrt{13}}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot AE =$

$= \frac{1}{2} \cdot EF^2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha =$

$= \frac{EF^2 \cdot \sin 2\alpha}{4}$

$\sin 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{23^2}{26^2}} =$

$= \frac{\sqrt{676 - 529}}{26} = \frac{\sqrt{3 \cdot 49}}{26} =$

$= \frac{7\sqrt{3}}{26}$

$\Rightarrow S_{AFE} = \frac{4 \cdot R^2 \cdot 7\sqrt{3}}{4 \cdot 26} = \frac{9^2 \cdot 13^2 \cdot 7\sqrt{3}}{24^2 \cdot 13 \cdot 2} = \frac{3^2 \cdot 7\sqrt{3}}{8^2 \cdot 2} =$

$= \frac{63\sqrt{3}}{128}$

Ответ: $\frac{65}{24}$; $\frac{117}{24}$; $\frac{3}{2\sqrt{13}}$; $\frac{63\sqrt{3}}{128}$

(5) $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad ab, a, b > 0$ рац. числа

$f(p) = [\, p/4 \,]$

$3 \le x \le 27, \quad 3 \le y \le 27, \quad f(x/y) < 0$

$f(x/y) + f(y) = f(x)$

$f(x/y) = f(x) - f(y) < 0$

$\Rightarrow f(x) < f(y)$

1) $f(3) = [\frac{p}{4}] = [\frac{3}{4}] = 0$

2) $f(4, 5, 6, 7) = [\frac{p}{4}] = 1$

3) $f(8, 9, 10, 11) = 2$

4) $f(12, 13, 14, 15) = 3$

5) $f(16, 17, 18, 19) = 4$

6) $f(20, 21, 22, 23) = 5$

7) $f(24, 25, 26, 27) = 6.$

$\Rightarrow f(x) < f(y) \Rightarrow$

Разобьём нат. числа на подгрупы под номерами 1 – 7, как показано. Номер подгрупы x строго меньше номера подгрупы y. Номер подгрупы обозначим как $i(x)$ и $i(y)$

$i(x) < i(y), \quad i = f + 1$

$i(x) = 1 \to i(y) = \{2, 7, 3, 4, 5, 6\}$ $\Rightarrow 1 \cdot 24 = \underline{\underline{24}}$ вар.

1 вариант числ; 6·4 = 24 варианта числа

$i(x) = 2 \to i(y) = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ $\Rightarrow 4 \cdot 4 \cdot 5 = 16 \cdot 5 = \underline{\underline{80}}$ вар.

4; 4·5 = 20

$i(x) = 3 \to i(y) = \{4, 5, 6, 7\} \Rightarrow \underline{64}$ вар.

4; 4·4 = 16

$i(x) = 4 \to i(y) = \{5, 6, 7\} \Rightarrow 4 \cdot 3 \cdot 4 = 16 \cdot 3 = \underline{\underline{48}}$ вар.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(5 стр. 2) $i(x)=5 \Rightarrow i(y)=\{6,7\}$, $\Rightarrow 2\cdot4\cdot4=32$ вар.

$i(x)=6 \Rightarrow i(y)=7$, $4\cdot4=16$ вар.

$\sum S = 24+\underline{80}+\underline{64}+\underline{48}+\underline{32}+\underline{16}=80+80+80+24=$

$=240+24=264$

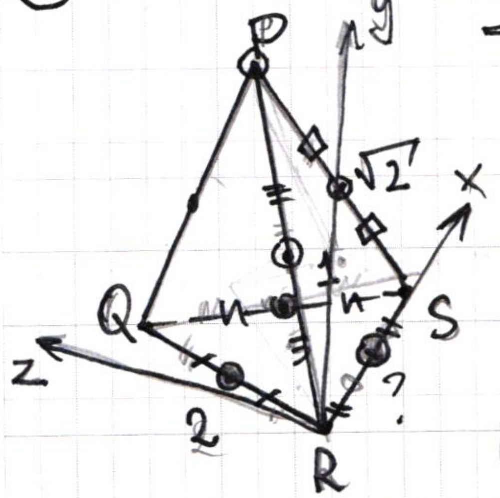
$\triangleright$ $(3;4)$, $(3;5)$, ... $(3;27) \to 24$

$(4;8)$, $(4;9)$, ... $(4;27) \to 20$

и т. д.

Ответ: 264 пар

(7) Дано:



$\Rightarrow$ в сечениях сферы PSR и QRS вписаны в отд. круги

M_{ij} – середина стороны ij

$R=(0;0;0)$, $S=(x,0,0)$, $Q=(x_Q,0,z_Q)$

$P=(x_P,y_P,z_P)$, $O=(x_0,y_0,z_0)$

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

RS=?

$\frac{x^2}{4}+x_0^2-xx_0+y_0^2+z_0^2=R^2$

$R_{min}=?$

$x_{M_{ij}}=\frac{x_i+x_j}{2}$ $\quad \left(\frac{x_Q}{2}-x_0\right)^2+y_0^2+\left(\frac{z_Q}{2}-z_0\right)^2=R^2$

$R^2-x_0^2-y_0^2-z_0^2=\frac{x^2}{4}-xx_0=\frac{x_Q^2}{4}+\frac{z_Q^2}{4}-z_0z_Q-x_0x_Q=$

$=\frac{(x+x_Q)^2}{4}-(x+x_Q)x_0+\frac{z_Q^2}{4}-z_0z_Q=\frac{x^2}{4}+\frac{x_Q^2}{4}+\boxed{\frac{xx_Q}{2}}-$

$-xx_0-x_Qx_0+\frac{z_Q^2}{4}-z_0z_Q \Rightarrow R^2-x_0^2-y_0^2-z_0^2=-\frac{xx_Q}{2}$

$\Rightarrow$ ~~0 = xx_Qx_0 … xx_Q/2, x_Q = 0 …~~

$R^2-x_0^2-y_0^2-z_0^2=\frac{x_P^2+y_P^2+z_P^2}{4}-x_Px_0-y_Py_0-z_Pz_0=$

$=x_P^2+y_P^2+z_P^2-2(x_Px_0+y_Py_0+z_Pz_0)=$

$=\frac{(x_P+x)^2}{4}-(x_P+x)x_0+\frac{y_P^2}{4}+\frac{z_P^2}{4}-y_Py_0-z_Pz_0=$

$=\frac{x_P^2}{4}+\frac{x^2}{4}+\boxed{\frac{x_Px}{2}}-x_Px_0-xx_0+\frac{y_P^2}{4}+\frac{z_P^2}{4}-y_Py_0-$

$-z_Pz_0 \Rightarrow R^2-x_0^2-y_0^2-z_0^2=-\frac{x_Px}{2}$

$\Rightarrow x_P=x_Q$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(7 стр. 2) $QR = 2 \Rightarrow z_Q^2 + x_Q^2 = 4$

$QS = 1 \Leftrightarrow (x - x_Q)^2 + z_Q^2 = 1 = x_Q^2 + z_Q^2 + x^2 - 2xx_Q$

$PS = \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + x_Q^2 - 2xx_Q + y_P^2 + z_P^2 = 2$

$x^2 - 2xx_Q = -3$

$\Rightarrow x^2 - 2xx_Q + 3 = 0$

$x_Q^2 + y_P^2 + z_P^2 = 5 \Rightarrow PR = \sqrt{5}$

$R^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = -\frac{x_P^2 + y_P^2 + z_P^2}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{2} = -\frac{x_Q x}{2}$

$x_Q x = 5$

$x_Q = \frac{5}{x}$

$x^2 - 2xx_Q = 1 = x^2 - 2\cdot 5 \Rightarrow x^2 = 11$

$\boxed{x = \sqrt{11}}$

$\frac{5}{2} = xx_0 - \frac{11}{4} = \frac{10}{4} \Rightarrow xx_0 = \frac{21}{4} = x_0\sqrt{11} \Rightarrow x_0 = \frac{21}{4\sqrt{11}}$

- Пусть R_2 — радиус описанной окр. пирамиды

$O' = x_0, y_0, z_0$

$R_2^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 0 = x^2 - 2xx_0 =$

$= x_Q^2 + z_Q^2 - 2x_Q x_0 - 2z_Q z_0 = x_Q^2 + y_P^2 + z_P^2 -$

$- 2x_0 x_Q - 2z_P z_0 - 2y_P y_0$

$\Rightarrow x_0 = \frac{x}{2}, \quad z_0 = \frac{z_Q}{2}, \quad z_Q = \sqrt{4 - x_Q^2}$

$\Rightarrow x_0 = \frac{\sqrt{11}}{2}, \quad z_Q = \sqrt{4 - \left(\frac{5}{11}\right)^2} = \sqrt{\frac{484 - 25}{121}} = \frac{3\sqrt{51}}{11}$

$$x_0 = \frac{\sqrt{11}}{2}$$ (7 стр. 3)

$$z_0 = \frac{3\sqrt{51}}{22}$$

$$y_p^2 + z_p^2 = 2z_p z_0 + 2y_p y_0$$

$$y_0 = \frac{y_p^2 + z_p^2 - 2z_p z_0}{2y_p}$$

$$R^2 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \to \min$$

$$\Rightarrow y_p^2 + z_p^2 + x_Q^2 = 5 = \frac{5}{11} + y_p^2 + z_p^2$$

$$y_0 = \frac{5 - \frac{5}{11} - \frac{3\sqrt{51}}{11} \cdot \sqrt{5 - \frac{5}{11} - y_p^2}}{2y_p} =$$

$$= \frac{5 - 3\sqrt{51}\sqrt{\frac{50}{11} - y_p^2}}{22y_p} \Rightarrow \min$$

$$y_0 = \frac{50}{22y_p} - \frac{3\sqrt{51}}{22}\sqrt{\frac{50}{11y_p^2} - 1}$$

$$y_0' = -\frac{50}{22y_p^2} + \frac{3\sqrt{51}}{44} \cdot \frac{\frac{50}{22y_p^3}}{\sqrt{\frac{50}{11y_p^2} - 1}} =$$

$$= -\frac{50}{22y_p^2}\left(1 - \frac{3\sqrt{51}}{44\cancel{y_p}} \cdot \frac{\cancel{y_p}}{\sqrt{\frac{50}{11} - y_p^2}}\right) = 0$$

$$44\sqrt{\frac{50}{11} - y_p^2} = 3\sqrt{51}$$

$$\frac{50}{11} - y_p^2 = \frac{9 \cdot 51}{11^2 \cdot 16}$$

$$y_p^2 = \frac{50 \cdot 11 \cdot 16 - 9 \cdot 51}{11^2 \cdot 16}$$

$$y_p = \frac{\sqrt{8341}}{11 \cdot 16}$$

Ответ: $\sqrt{11}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

ОДЗ: $3y-2x \geq 0$; $3xy-2x-3y+2 \geq 0$

$9y^2+4x^2-12yx = 3xy-2x-3y+2$

$[9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0]$

$[3x^2+3y^2-6x-4y-4=0]$

$18y^2+8x^2-30xy+4x+6y-4=0$

$15y^2+5x^2-30xy+10x+10y=0$

$[3y^2+x^2-6xy+2x+2y=0]$

$2x^2+6xy-8x-6y-4=0 \Rightarrow [x^2+3xy-4x-3y-2=0]$

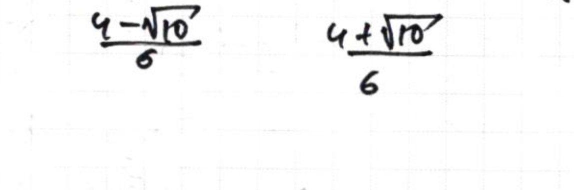
$x^2+x(3y-4)-(3y+2)=0$

$D = 9y^2+16-24y+\cancel{4}\,12y+8 = 9y^2+24\cancel{-}12y$

$x^2+x(2-6y)+2y+3y^2=0$

$D = 36y^2+4-24y-8y-12y^2 = 24y^2-32y+4 =$

$= 4(6y^2-8y+1) = 24\left(x-\frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)\left(x-\frac{4+\sqrt{10}}{6}\right)$



$\begin{cases} 3y \geq 2x \\ x(3y-2) \geq 3y-2 \end{cases}$

$3y > 2 \Rightarrow x \geq 1$, $3y=2 \Rightarrow$ любой x,

$3y<2 \Rightarrow x \leq 1$, $2x \leq 2$, $2 > 3y \geq 2x$

$3y \geq 2x \geq 2$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

$3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$

$3y^2+x^2-6xy+2x+2y=0$

$x^2+3xy-4x-3y-2=0$

$3x^2-6x+(3y^2-4y-4)=0$

$4x^2+x(2-15y)+(9y^2+3y-2)=0$

$D_1=36-4\cdot3\cdot(3y^2-4y-4)=36-36y^2+48y+48=$

$=-36y^2+48y+84=12(-3y^2+4y+7)$

$D_2=4+225y^2-60y-16(9y^2+3y-2)=$

$=4+225y^2-60y+32-48y-144y^2=$

$=81y^2-108y+36=9(9y^2-12y+4)$

$x_{12}=\dfrac{6\pm\sqrt{D_1}}{2\cdot3}$, $x_{34}=\dfrac{15y-2\pm3\sqrt{9y^2-12y+4}}{2\cdot4}$

$48\pm8\sqrt{D_1}=90y-12\pm18\sqrt{9y^2-12y+4}$

$3xy-2x-3y+2=9y^2+4x^2-12xy=3x^2+3y^2-6x-4y-2-$

$-2x-3y+3xy=3x^2+3y^2+3xy-2-8x-7y$

$6y^2+x^2-15xy+2+8x+7y=0$

$60-90y\pm8\sqrt{D_1}=\pm18\sqrt{9y^2-12y+4}$

$30-45y\pm4\sqrt{D_1}=\pm9\sqrt{9y^2-12y+4}$

$(30-45y\pm4\sqrt{D_1})^2=81(9y^2-12y+4)=$

$=900+45^2y^2+16\cdot12\cdot(-3y^2+4y+7)-2\cdot30\cdot45y\pm$

$\pm8\cdot30\sqrt{D_1}\mp8\cdot45y\sqrt{D_1}$

Одно из решений: $x=y=2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$900 + 45^2 y - 16\cdot 12\cdot 3y^2 + 16\cdot 12\cdot 4y + 16\cdot 12\cdot 7 -$
$- 2\cdot 30\cdot 45y \pm 240\sqrt{D_1} \mp 360\sqrt{D_1}\, y =$
$= 9^3 y^2 - 12\cdot 81 y + 81\cdot 4$

$y^2(729 + 576) - y(972 \cancel{\quad} + 675 +$
$+ 768) + 324 - 900 - 1344 =$

$= \pm\sqrt{D_1}(240 - 360y)$
$1305y^2 \cancel{\quad} - 1740y - 1920 = \pm(240 - 360y)\sqrt{D_1}$
$261y^2 - 348y - 384 = \pm(48 - 72y) \times$
$\times \sqrt{12(-3y^2 + 4y - 7}$
$87y^2 - 116y - 128 = \pm(16 - 24y) \times \sqrt{12(-3y^2 + 4y - 7)}$
$\cancel{87y} \; 87^2 y^4 + 116^2 y^2 + 128^2 + 2\cdot 128\cdot 116y -$
$- 2\cdot 116\cdot 87y^3 - 2\cdot 87\cdot 128y^2$
$= \cancel{\quad} 64(4 + 9y^2 - 12y)\cdot 12(-3y^2 + 4y - 7) =$
$= -y^4(64\cdot 12\cdot 3\cdot 9) + y^3\, 64\cdot 12\cdot(3\cdot 12 + 9\cdot 4) +$
$+ y^2\cdot 64\cdot 12(-7\cdot 9 - 3\cdot 4 - 4\cdot 12) +$ $\quad 60 + 63 = 123$
$+ y\cdot 64\cdot 12(16 + 84) - 4\cdot 7\cdot 12\cdot 64$
$y^4(\cancel{\quad} 3\cdot 29^2 + 64\cdot 12\cdot 3\cdot 9) - y^3(2\cdot 116\cdot 87 +$
$+ 64\cdot 12\cdot 2\cdot 36) + y^2(123\cdot 64\cdot 12 + 116^2 - 2\cdot 128\cdot 87)$

$6y^2+x^2-15xy+2+8x+7y=0$

$3y^2+x^2-6xy+2x+2y$

$3y^2-9xy+2+6x+5y=0$

$D=(5-9x)^2-4\cdot3\cdot2(1+x)=81x^2+25-90x-$

$-24-24x=81x^2-114x+1$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$D_1=36-(12y^2-16y-16)\cdot3=$

$=-36y^2+48y+48+36=-36y^2+48y+84=$

$=12(-3y^2+4y+7)$

$x_{12}=\frac{6\pm\sqrt{D_1}}{6}=1\pm\sqrt{\frac{-3y^2+4y+7}{3}}$

$3y-2\mp2\sqrt{\frac{-3y^2+4y+7}{3}}=\sqrt{\cancel{2}-3y-\cancel{2}\mp2\sqrt{\frac{D_1}{36}}+}$

$\overline{+\cancel{3y}\mp3\cdot y\cdot\sqrt{\frac{D_1}{36}}}=\sqrt{\mp(3y+2)\sqrt{\frac{D_1}{36}}}$

$\Rightarrow$ $-$, если $3y>-2$

$3y-\underline{2}-\underline{2}\sqrt{\frac{D_1}{36}}=\sqrt{\sqrt{\frac{D_1}{36}}(3y+2)}$

$(3y+2)\sqrt{\frac{D_1}{36}}=9y^2+4+4\frac{D_1}{9}-12y-12y\sqrt{\frac{D_1}{36}}+$

$+8\sqrt{\frac{D_1}{36}}$

$9y^2+4+\frac{D_1}{9}-12y=15y\sqrt{\frac{D_1}{36}}-6\sqrt{\frac{D_1}{36}}$

$9y^2+4-\frac{9}{4}y^2+3y+\frac{21}{4}-12y=\sqrt{\frac{D_1}{36}}(15y-6)$

Ответ: $(2;2)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(7 стр. 2)

$QR = 2 \Rightarrow 4 = x_Q^2 + z_Q^2$

$RS = ? = x$

$QS^2 = 1 = z_Q^2 + (x_Q - x)^2 = \overbrace{z_Q^2 + x_Q^2}^{4} + x^2 - 2x x_Q$

$\Rightarrow x^2 - 2x x_Q = 1 = x(x - 2x_Q)$

$PS = x^2 + x_Q^2 - 2x x_Q + y_p^2 + z_p^2 = 2 =$

$\rightarrow x_Q^2 + y_p^2 + z_p^2 = 1$, ч.т.д.

$R^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = -\frac{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}{2} = -\frac{1}{2} = \frac{x_p x}{2}$

$\Rightarrow x_p x = 1,\ x_p = \frac{1}{x}$

$x^2 - 2 \cdot x x_p = x^2 - 2 = 1 \Rightarrow x^2 = 3$

$\boxed{x = RS = \sqrt{3}}$

$R^2 = -\frac{1}{2} + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = -\frac{1}{2} + |RO|$

$M_{QP} = \{ x_p; \frac{y_p}{2}; \frac{z_p}{2} \}$

$x_p^2 + \frac{y_p^2}{4} + \frac{z_p^2}{4} - 2x_0 x_p - y_p y_0 - z_p z_0 \neq \frac{x_p^2 + y_p^2 + z_p^2}{4} -$

$- y_p y_0 - z_p z_0 - x_p x_0$

$\Rightarrow x_0 x_p \neq \frac{3}{4} x_p^2 \Rightarrow 4x_0 \neq 3x_p \Rightarrow x_0 \neq \frac{\sqrt{3}}{4}$

~~Но! Для точки M_{SR}: $\frac{\sqrt{3}}{4}$ - x~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

[7 стр.3]

R_2 – радиус описанной окр. пирамиды
$O' = (x_0, y_0, z_0)^2$

$R_2^2 - x_0^2 - y_0^2 - z_0^2 = 0 = x^2 - 2x\underline{x_0} =$

$= x_Q^2 + z_Q^2 - 2x_0 x_Q - 2z_0 z_Q =$

$= x_Q^2 + y_p^2 + z_p^2 - 2x x_Q - 2z_0 z_p - 2y y_p$

$\Rightarrow x_0 = \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow R_2 > \frac{\sqrt{3}}{2}$

$z_Q(z_Q - 2z_0) = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{z_Q}{2}$

$y_p^2 + z_p^2 - 2\frac{z_p z_Q}{2} - 2y_0 y_p = 0 =$

$= y_p^2 + z_p^2 - z_p z_Q - 2y_0 y_p$

$x = \sqrt{3}, \; x_Q = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$x_Q^2 + z_Q^2 = 4 = \frac{1}{3} + z_Q^2 \Rightarrow z_Q^2 = \frac{12}{3} - \frac{1}{3} = \frac{11}{3}$

$\left[z_Q = \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} \right]$

$y_p^2 + z_p^2 = 1 - x_Q^2 = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow \frac{2}{3} = z_p \frac{\sqrt{11}}{2\sqrt{3}} + 2y_0 y_p$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$CB = \frac{5+13}{2} = \frac{18}{2} = 9$ {Ŵоch}

$\angle AFE = ?$
$S_{AFE} = ?$

$AB = 2R$, $O'D = r$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{CB} = \frac{13}{2\cdot 9} = \frac{13}{18}$$

$$26R = 36R - 18r$$
$$18r = 10R$$
$$9r = 5R \quad -> \quad R = 1{,}8r$$

$$\frac{AC}{2R} = \frac{r}{2R-r} => AC = 2R\frac{r}{2R-r} =$$

$$AC = 3{,}6r\frac{r}{3{,}6r-r} = r\cdot\frac{3{,}6}{2{,}6} = r\cdot\frac{18}{13}$$

$$CB = 9 = \sqrt{(2R)^2 - \left(\frac{18}{13}r\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{18}{5}\right)^2 - \left(\frac{18}{13}\right)^2}\, r = 18r\sqrt{\frac{13^2-25}{13\cdot 25}} =$$

$$= \frac{18r}{13\cdot 25}\sqrt{169-25} =$$
$$144$$

$$r = \frac{65}{24} = \frac{5 \cdot 13}{\cancel{4}\,24}$$

$$\Rightarrow \cos\angle AOE = \frac{\left(1 - \frac{\cancel{25}\,\cancel{4} \cdot 12^2}{\cancel{4}\,\cancel{25} \cdot 13^2} - \frac{18^2}{13^2}\right)}{2} =$$

$$= \frac{13^2 - 12^2 - 18^2}{2 \cdot 13^2} = \frac{169 - 144 - 324}{2 \cdot 13^2} = \frac{299}{2 \cdot 13} =$$

$$= \frac{23}{2 \cdot 13} = \frac{23}{26}$$

$18 \times 18 = 144 + 18\ldots = 324$

$324 + 144 = 468$; $468 - 169 = 299$

$299 : 13 = 23$

$225 - 144 = 81$

$108 : 9 = 12$

$7 \cdot 9 = 63$

$26 \times 26 = 676$; $676 - 529 = 147$

$23 \times 23 = 529$

$26^2 - 23^2 = 3$

$26 + 23 = 49$

$9y^2 + 4x^2 - 12yx$

$9y^2 + 4x^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$

$3y^2 + x^2 - 6xy + 2(x+y) = 0$

$x^2 + 3xy - 4x - 3y - 2 = 6$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)