МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2x = 2\sin x\cos x$

1
2
3
4
5

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

N2 $\cancel{2y(x-6)}$ $\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$x^2-12x+36=(x-6)^2$

$36y^2-36y-36=$

$36y^2-36+9$

$(x-6)^2+(6y-3)^2-45=45$

$x^2-24x+144=(2y-1)(x-6)$

$3x^2-72x+432=(6y-3)(x-6)$

$6x^2-144x+864$

$\begin{cases} x-12=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$

$(x-6+6y-3)^2 = 6x^2-144x+954$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

N3

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \ge x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$x(x-10)>0$$

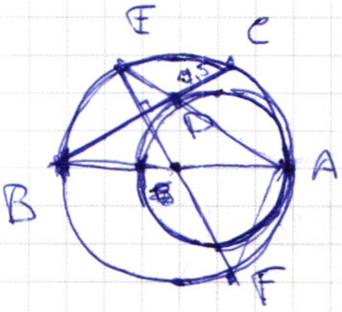
$$|x^2-10x|^{\log_3 4} - 5^{-\log_3(x^2-10x)} = x^2-10x$$

$5^{\log_3 a}$

$$a^{\log_3 4} - \ \ = a^{\log_3 3}$$

$$5^{\log_3 a} =$$

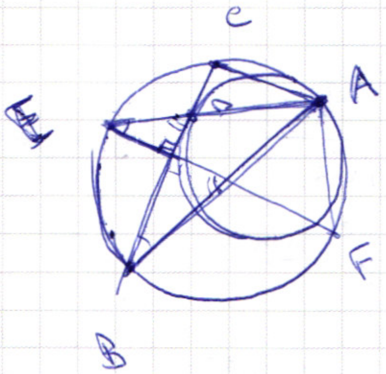
N4



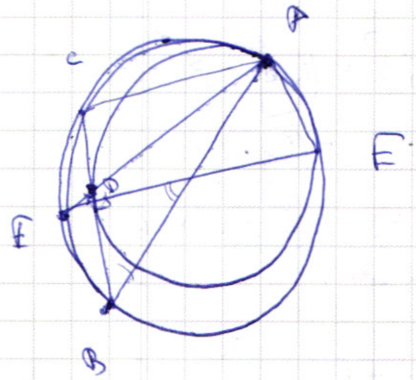
центр Ω

$CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

CA=AF



DC=7.5
BD=8.5
EA=AC



N6

KL=3, KM=1, MN=$\sqrt{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Полученный отрезок находится ниже отрезка, который соединяет точки $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$ из-за того что функция выпуклая

подставим $f(\frac{1}{4})=4$; $f(1)=1$

Найдем уравнение прямой, для которой все отрезки прямых находятся одним на уровне этой прямой $y=k\cdot x+b$

$$\begin{cases} 1=k\cdot 1+b \\ 4=k\cdot\frac{1}{4}+b \end{cases}$$, получаем $k=-4$; $b=5$

б) Решим неравенство $\frac{16x-16}{4x-5}\le -4x+5$

От $\frac{1}{4}$ до 1 $4x-5<0$, домножим на него, поменяет знак:

$16x-16 \ge -(4x-5)^2(4x-5)$, таким образом мы получаем

$-(4x-5)^2=-16x^2+40x-25$

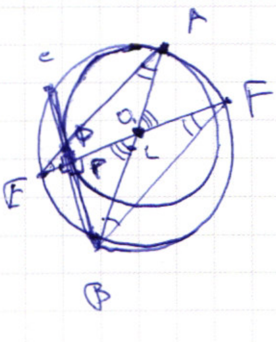
$16x^2-24x+9=(4x-3)^2$

$(4x-3)^2\ge 0$, что соответственно истина для любого x, таким образом такая прямая всегда будет выше гиперболы $\frac{16x-16}{4x-5}$.

В иной ситуации мы не сможем взять отрезок ниже прямой, так как он будет пересекать гиперболу, следовательно всегда $a=-4$; $b=5$

Ответ: $a=-4$; $b=5$

№4



Рассмотрим $H(\omega\to\Omega)=\alpha$ $O_1\to O_2$; $D\to E$, при этом

центр $\omega=O_1$; $\Omega=O_2$ $O_2E\perp CB$, так как $O_1D\perp CB\Rightarrow CB$-касат

$\Rightarrow O_2\in EM$, следовательно

EF - срединный перпендикуляр к

дуги AF и EB равны, так как вертикальные углы $=CB=DB=\frac{CB}{2}=8$

AB - диаметр, следовательно $\angle ACB = \angle AEB = 90^\circ$, соответственно

$E\cancel{B}$ - высота $\triangle DEB$

$EB = \sqrt{DB \cdot PB} = 2$

$BDE = 90^\circ$

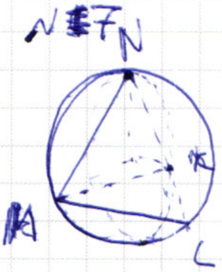
~~$DE = \sqrt{\ldots}$~~ $\angle AFE$ = arcsin EF - диаметр => $\angle$

$\angle AFE = 90 - \angle AEF = \angle DBE$

$DE = \sqrt{DE^2 + EB^2} = \frac{\sqrt{17}}{2}$, следовательно $\angle AFE = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}$

треугольники ~~AED~~

Ответ: $\angle AFE = \arcsin \frac{4}{\sqrt{17}}$



$r = ON = OK = OL = OM.$

Ответ к 1 задаче: значения $tg\,\alpha = -1;\ 3;\ \frac{1}{3}$

№3

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$10x + |10x - x^2|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$(10x - x^2) + |10x - x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

при $(10x - x^2) > 0$

пусть $= a$, тогда $a > 0$ тогда $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

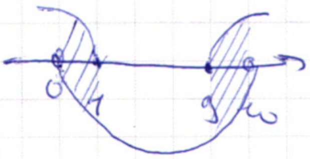
$$a + a^{\log_3 4} \quad 3^{\log_3 a} + 4^{\log_3 a} \geq 5^{\log_3 a}$$

$f(a)\ \left(\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 a} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 a}\right) \geq 1$ $\quad f(a)$ убывающ. функция.

заметим, что при $\log_3 a = 2$ достигается равенство, тогда

решение: $0 < a \leq 9$

$$\begin{cases} 10x - x^2 \leq 9 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-9)(x-1) \geq 0 \\ x(x-10) < 0 \end{cases} \Rightarrow x \in (0;1] \cup [9;10)$$



Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$

№5

в простых числах

$f(2), f(3) = 0$, $f(5); f(7) = 1$, $f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(13; f(19) = 4$

$f(24) = 5$

учитывая получившиеся значения и соотношения

$f(ab) = f(a) + f(b)$, мы можем расписать значения во всех

натуральных числах

$f = 0$ в 4, 6; 8, 9, 12, 16, 18, 24

$f = 1$ в 10; 14; 15; 20; 21.

$f = 2$ в 22, 25.

Таким образом мы видим, что f на отрезке от 2 до 25 принимает

значение 5 - 1 раз; 4 - 2 раза; 3 - 1 раз; 2 - 3 раза; 1 - 7 раз; 0 - 10 раз

Заметим, что $f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = fx$, то есть $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

разобьем пары на $(x; y)$ и $(y; x)$, из них либо для обеих $f = 0$, либо для только одной $f < 0$

Для того, чтобы найти количество нужных пар, нам из общего количества пар $(x; y)$ нужно вычесть количество пар, для которых $f(x) = f(y)$ и оставшееся количество поделить на 2

Получаем $(24 \cdot 23 - 10 \cdot 9 - 7 \cdot 6 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1) : 2 = \underline{206}$

Ответ: 206

№6

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

Данное неравенство эквивалентно тому, что прямая $ax+b$ должна находиться под параболой

$f(x) = -32x^2 + 36x - 3$ на заданном отрезке

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} \text{I} \quad x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ \text{II} \quad x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

рассмотрим первое уравнение.

$$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$$

$$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$$

$$(x-18y+3)(x-8y-2)=0 \qquad x \geq 12y$$

$$\left[\begin{array}{l} x=18y-3 \\ x=8y+2 \end{array}\right.$$

подставим получившееся значения x во II уравнение.

а) $(18y-3)^2+36y^2-12(18y-3)-36y=45.$

$$324y^2-108y+9+36y^2-12\cdot 18y+36-36y=45$$

$$360y^2-360y=0$$

$$y\cdot(360y-360)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ x=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases} \end{array}\right.$$

эти значения не подходят, так как $x \geq 12y$

б) ~~x=8y+2~~ $(8y+2)^2+36y^2-12(8y+2)-36y=45$

$$64y^2+32y+4+36y^2-96y-24-36y=45$$

$$100y^2-100y-65=0$$

$y=\frac{1}{2}\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$, следовательно $\left[\begin{array}{l} y=\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{10}},\ x=6+\frac{24}{\sqrt{10}} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}},\ x=6-\frac{24}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$, не подходит, так как $x \geq 12y$

~~Ответ:~~

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=6-\frac{24}{\sqrt{10}} \\ y=\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \end{array}\right.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} & \text{I} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & \text{II} \end{cases}$$

По формуле суммы синусов преобразуем II уравнение

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) =$$

$$= -\frac{2}{5}$$

$$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2(\beta) = -\frac{2}{5}$$

подставим в I уравнение, получим:

$$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ тогда } \sin(2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Рассмотрим I уравнение.

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin(2\alpha)$$

$$\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha \pm 2(\cos 2\alpha)) = -1$$

применим подстановку

пусть $t = \operatorname{tg}\alpha$

$$\frac{2t}{1+t^2} \pm \frac{2(1-t^2)}{1+t^2} = -1$$

$$2t \pm 2(1-t^2) = -1-t^2$$

$$(t+1)^2 \pm 2(1-t)(1+t) = 0$$

$$(1+t)(t+1 \pm 2(1-t)) = 0$$

таким образом $\operatorname{tg}\alpha = -1$

если $\sin(2\beta) = +\frac{2}{\sqrt{5}}$, то $t+1+2(1-t) = 3-t = 0$

таким образом $\operatorname{tg}\alpha = 3$

если $\sin(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, то $t+1-2(1-t) = 3t-1 = 0$

таким образом $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3}$ других вариантов нет Ответ: таким образом

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА