МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$, тогда $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} \pm 2\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) = -1$ $\qquad 2tg\alpha \pm 2(1-tg^2\alpha) = -1-tg^2\alpha$

$2tg\alpha + 3 - tg^2\alpha = 0$ $\qquad 2tg\alpha - 1 + 3tg^2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l} tg = 3 \\ tg = -1 \end{array}\right.$ $\qquad tg = \frac{-2\pm4}{6}$ $\qquad \left[\begin{array}{l} tg\alpha = +\frac{1}{3} \\ tg\alpha = -1 \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = 3$; $tg\alpha = \frac{1}{3}$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $x-2y\geq 0$

$\begin{cases} (x-2y)^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0=(x-y-1)(x-4y+2)=0$ при $x\geq 2y$

При $y=x-1$ $x^2+9(x-1)^2-4x-18(x-1)=12$

$10x^2-40x+15=0$

$2x^2-8x+3=0$ $\left[\begin{array}{l} x=2+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$ тогда $\left[\begin{array}{l} y=1+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$

$D=64-24$

При 2 условии $25x^2-100x-300=0$

$5x^2-20x-60=0$

$x^2-4x-12=0$ $\left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=6 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right.$

$D=16+48=64$

Подходят $x=6$; $y=2$ и $x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}$; $y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

Ответ: $(6;2)$ и $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

№5 Простые числа $f(2)=f(3)=0$; $f(5)=f(7)=1$; $f(11)=2$; $f(13)=3$; $f(17)=f(19)=4$

$f(23)=5$

$f=0$ в 1 т.к. $f(1)=f(1)+f(1)$ и $f=0$ при 4, 6, 8; 9; 12; 16; 18; 24

$f=1$ в 10, 14, 15, 20, 21

$f=2$ в 22

На отрез. от $[1;24]$. $f=0$ – 11 раз; $f=1$ – 7 раз; $f=2$ – 2 раза $f=3$ – 1 раз; $f=4$ – 2 раза

$f=5$ – 1 раз.

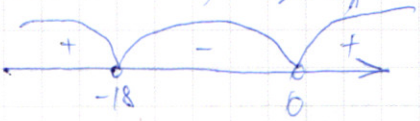
$f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)=f(x)$ – разбиваем на пары x,y и y,x либо для обеих $f=0$, либо для одной $f<0$

Из общего вычесть все пары, где $f(x)=f(y)$

$(24\cdot 23-10\cdot 11-7\cdot 6-2\cdot 1-2\cdot 1):2=12\cdot 23-55-21-2=198$ Ответ: 198 пар.

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

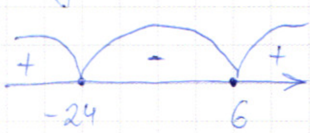


Пусть $x^2+18x = 12^y$, тогда $5^y+12^y \geq 13^y$

$\left(\frac{5}{13}\right)^y+\left(\frac{12}{13}\right)^y \geq 1$ — функция убывает

При $y=2$ — выполняется равенство $\Rightarrow y\leq 2 \Rightarrow x^2+18x\leq 144$

$x^2+18x-144\leq 0$

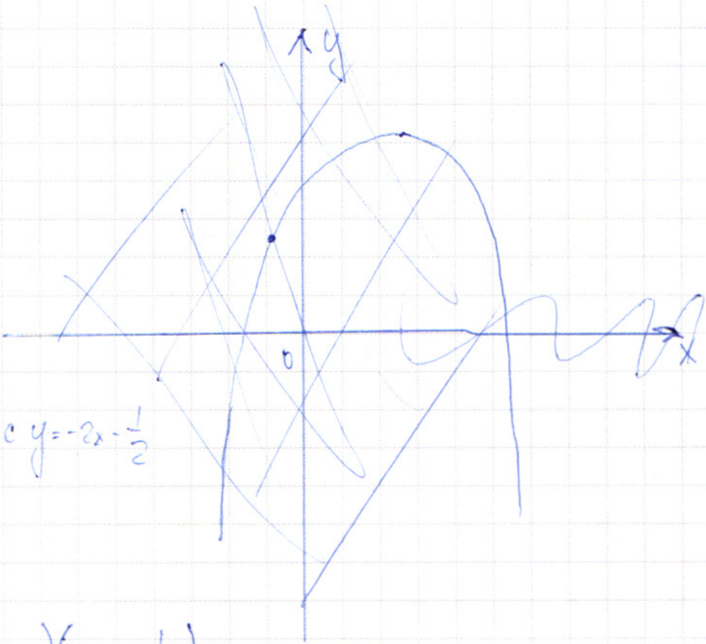


$\left[\begin{array}{l} x=-24\\ x=6\end{array}\right.$ $x\in[-24;6]$

Т.к. $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$ ОДЗ $\Rightarrow$ $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

№6 $\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$



При $x=-\frac{3}{4}$ и $x=-\frac{11}{7}$ $y=5$ и $y=1$

Уравнение прямой:

$5=-\frac{11}{4}k+b$; $1=-\frac{3}{4}k+b \Rightarrow b=-0,5$

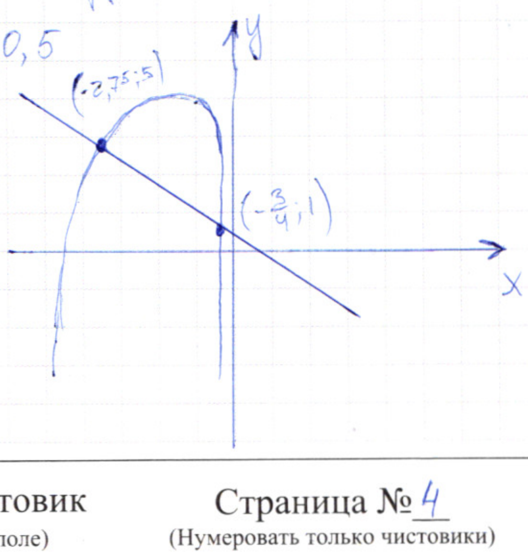
~~Все~~ Все отрезки ниже или на уровне с $y=-2x-\frac{1}{2}$ для x от $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right]$

Гипербола всегда ниже $y=-2x-\frac{1}{2}$

$\frac{12x+11}{4x+3}\leq -2x-\frac{1}{2} \Rightarrow 12x+11 \geq (4x+3)\left(-2x-\frac{1}{2}\right) \Rightarrow (x+1,25)^2\geq 0$

Нельзя взять отрезок ниже данной прямой, тогда он будет ниже касат. гиперболы и будет ее пересек. $\Rightarrow a=-2$ и $b=-0,5$

Ответ: $a=-2$; $b=-0,5$



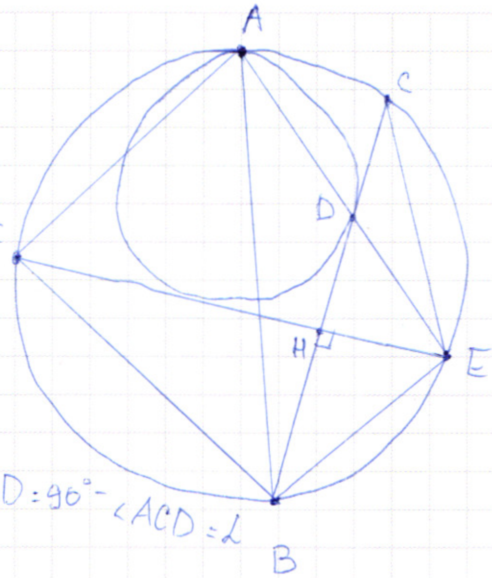
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



№4 $O_1O_2 = R_1 - R_2$

$\triangle BO_2D: (R_1 + R_1 - R_2)^2 = 17 + R^2$

Пусть $FE \cap BC = H$, $\angle ADC = \angle BDE = \alpha$

$\angle AEB = 90° \Rightarrow \angle DBE = 90° - \alpha$; $FE \perp BC \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BEH = 90°$; $\angle AFE = \angle ABE$ - как впис.;

$\angle AEF = \angle CBE \Rightarrow AF = CE$

$\angle ADC = \angle AKD$ как вписан. $\angle ADK = 90° \Rightarrow \angle KAD = 90° - \angle ACD = \alpha$

$= \alpha = \angle CAB \Rightarrow CE = BE$

EA - высота, медиана и бисс. в р/б $\triangle CEB$

Сред. лин. к CB проходит через центр пересеч. $\Rightarrow$ FE проходит через O_1

Тогда $\angle EAF = 90°$, $\angle AFE = 90° - \alpha = \angle ADC = \angle EDB$; $BD = 17$; $CD = 8$

$BA = CA = \frac{1}{2}BC = \frac{25}{2}$, $DA = \frac{9}{2}$; $EA = \sqrt{BA \cdot DA} = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{15}{2}$

По т. $FA = \frac{CA \cdot BA}{AE} = \frac{\frac{25}{2} \cdot \frac{25}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{5 \cdot 25}{6}$; $CE = \frac{15}{2} + \frac{5 \cdot 25}{6} = \frac{170}{6} = \frac{85}{3} \Rightarrow R_1 = \frac{85}{3}$

тогда $R_2 = \frac{136}{15}$

$CE = BE = AF = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{34}}{2}$, тогда $\angle AFE = \arccos \frac{\frac{5\sqrt{34}}{2}}{\frac{85}{3}} = \arccos \frac{3\sqrt{34}}{34} =$

$= \arccos \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin AFE = \frac{5}{\sqrt{34}}$

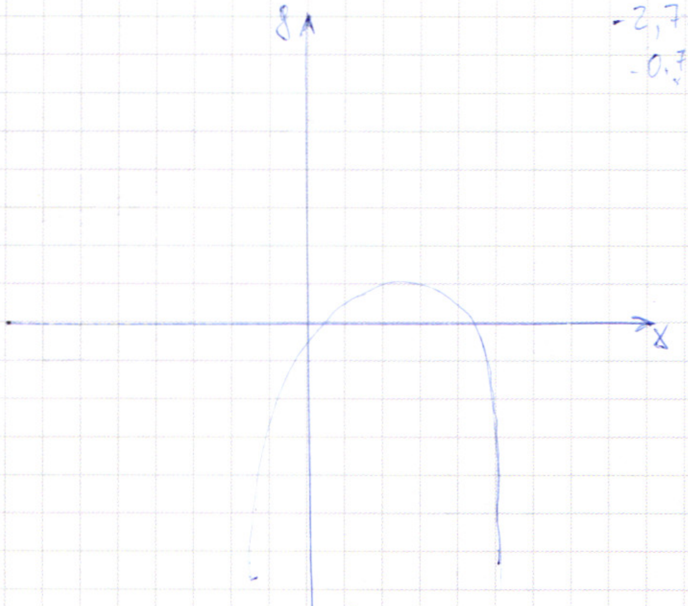
$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot FE \cdot \sin AFE = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{2125}{12}$

Ответ: $R_1 = \frac{85}{3}$; $R_2 = \frac{136}{15}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-2{,}75 ; 5$

$-0{,}75 ; 1$



Нужно найти ~~пр~~ прямые, наход. под параб. => у вынужд. параб. должен ниже точек $x = -\frac{11}{4}$ и $x = -\frac{3}{4}$,

их ~~пер~~ соедин. пересек. парабол. подставит в урав. $y = 5$ и $y = 1$

урав. данной прямой: $5 = -\frac{11}{4} \cdot k + b$ $\quad 1 = -\frac{3}{4} k + b$ =>

=> $b = -0{,}5$

Все отрезки ниже или на уровне с $y = -2x - \frac{1}{2}$ для $x \in$ ~~в~~ от $\left[-\frac{11}{4} ; -\frac{3}{4}\right)$

Заметим на данном отрезке гипербола всегда ниже $y = -2x - \frac{1}{2}$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le -2x - \frac{1}{2}$$

$$12x+11 \ge (4x+3)\left(-2x - \frac{1}{2}\right)$$

$$(x+1{,}25)^2 \ge 0$$

Мы не можем взять отрезок ниже данной прямой, т.к. тогда он будет ниже касат. гиперболы и будет ее пересек. => $\underline{a = -2 \quad b = -0{,}5}$

$BOA = R_1$

$O_1O_2 = R_1 - R_2$

$\triangle BQD: (R_1 + R_1 - R_2)^2 = 17^2 + R^2$

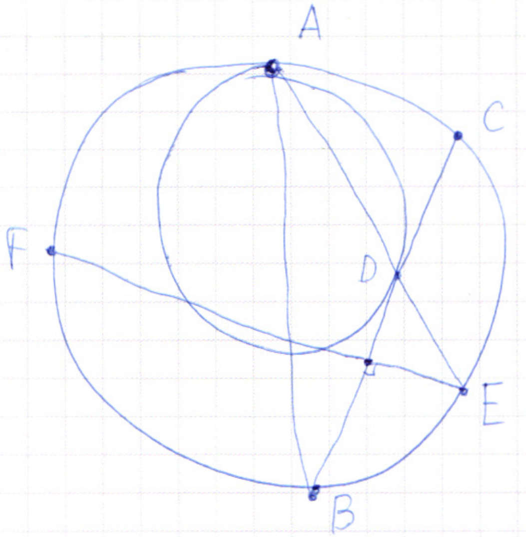
Пусть $FE \cap BC = H$ $\angle ADC = \angle BDE = \angle\alpha$

$\angle AEB = 90° \Rightarrow \angle DBE = 90° - \alpha$,

$FE \perp BC \Rightarrow \angle BEH = 90°$

$\angle AFE = \angle ABE$ - как впис.

$\angle AEF = \angle CBE \Rightarrow AF = CE$



$\angle ADC = \angle AKD$ как вписан., $\angle ADK = 90° \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle KAD = 90° - \angle ACD = \alpha = \angle CAB \Rightarrow$

$CE = BE$

EA - высота, медиана и бисс. в р/б $\triangle CEB$.

Сер. перпендик-к CB проходит через центр. пересечения $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ FE проходит через O_1

Тогда $\angle EAF = 90°$, $\angle AFE = 90° - \alpha = \angle ADC = \angle EDB$

$BD = 17$ $CD = 8$; $BA = CA = \frac{1}{2} BC = \frac{25}{2}$, $DA = \frac{9}{2}$

$EA = \sqrt{BA \cdot DA} = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2}} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$

По т. о $FA = \frac{CA \cdot BA}{AE} = \frac{\frac{25}{2} \cdot \frac{25}{2}}{\frac{15}{2}} = \frac{5 \cdot 25}{6}$

$CE = \frac{15}{2} + \frac{5 \cdot 25}{6} = \frac{170}{6} = \frac{85}{3} \Rightarrow R_1 = \frac{85}{6}$, тогда

$R_2 = \frac{136}{15}$

$CE = BE = AF = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{34}}{2}$, тогда $\angle AFE = \arccos \frac{AF}{FE} = \arccos \frac{\frac{5\sqrt{34}}{2}}{\frac{85}{3}} = \arccos \frac{3\sqrt{34}}{34} = \arccos \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 85 \\ 125 \\ +200 \end{array}$

$\sin = \frac{5}{\sqrt{34}}$ $S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot FE \cdot \sin AFE = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 85}{2 \cdot 2 \cdot 3} =$

$= \frac{2125}{12}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2-4yx+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$-4xy-5y^2+4x+18y=xy-x-2y+2-12$

$-5xy-5y^2+5x+20y=-10$

$y^2+xy-x-4y=2$

$x(y-1)=2-y^2+4y \Rightarrow x=\dfrac{2-y^2+4y}{y-1}$

$-y^2+4y+2 \,|\, y-1$; $-y-1$; $3y+2$; $-y+5$; -3

$=-y-1+\dfrac{-3}{y-5}$

№1 $\sin(2\alpha+2\beta)=-\dfrac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\dfrac{4}{5}$

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

+ −18 − 0 +

$x(x+18)$

+ −18 − 0 +

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq x^{2\log_{12}13}+36x^3+(18x)^{\log_{12}13}-18x$

$18x\left(18x^{\log_{12}13-1}-1\right)$

№2 в квадрах.

$x^2+18x=12^t \Rightarrow 5^t+12^t \geq 13^t \quad |:13^t$

$\left(\dfrac{5}{13}\right)^{t}+\left(\dfrac{12}{13}\right)^{t} \geq 1$

Слева функц. ↘, равенство не более раза, достиг. при $t=2$

$t \leq 2$

Тогда $x^2+18x \leq 144$

$x\in[-24;6]$

$x^2+18x>0$ $\quad x<-18$; $x>0$

Берем

Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$

$y=\dfrac{2+x}{4}$

тоже с., что $(x-y-1)(x-4y+2)=0$ при $x\geq 2y$

подставим x^2+9

$x^2+9(x-1)^2-4x-18(x-1)=12$

$10x^2-40x+15=0$

$x=2\pm\sqrt{\frac52}$

$y=1\pm\sqrt{\frac52}$

2) уравнение:

$25x^2-100x-300=0$

$x=-2;\ x=6$

$y=2$

Подходят: $(6;2)$, $\left(2-\sqrt{\frac52};1-\sqrt{\frac52}\right)$

№6 $\dfrac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Разложим второе $\Rightarrow 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = \frac{-2}{-5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Первое $\sin 2a \cdot \cos 2b + \sin 2\beta \cdot \cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Осн. тождество. $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ подставим: $\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

$$\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} \pm 2\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) = -1$$

$$2\,tg\,\alpha \pm 2(1-tg^2\alpha) = -1-tg^2\alpha$$

$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$ равен одному из них, тангенс ≤ 2

Sin может принимать оба этих значения. $tg\,\alpha = -1$; $tg\,\alpha = 3$; $tg\,\alpha = -1$; $tg\,\alpha = \frac{1}{3}$

№5 Считаем знач. прост.

$f(2); f(3) = 0$ $f(5); f(7) = 1$ $f(11) = 2$ $f(13) = 3$ $f(17) + f(19) = 4$ $f(23) = 5$

Т.к. $f(ab) = f(a)+f(b)$ можем N:

$f = 0$ в 1. т.к. $f(11) = f(1)+f(1)$ 1, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24 $\Rightarrow f = 0$

$f = 1$ в 10, 14, 15, 20, 21

$f = 2$ в 22.

f от $[1; 24]$, $f = 0$ – 11 раз; $f = 1$ – 7 раз; $f = 2$, 2 раза. $f = 3$, 1 раз. $f = 4$, 2 раза, $f = 5$ – 1 раз.

$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) = f(x)$ – разобьем все пары на x, y и y, x. либо для обеих $f = 0$, либо для одной $f < 0$

Необходимо из общего кол-ва пар вычесть пары, где $f(x) = f(y)$ и полученное разделить на 2

$(24\cdot 23 - 11\cdot 10 - 7\cdot 6 - 2\cdot 1 - 2\cdot 1) : 2 = 198$

$\boxtimes$ черновик $\square$ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)